数学分析（1）：第 1 次习题课（附解答版）

刘思齐

1. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$，求证：

i) 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$，$N \geq 2$，存在 $p, q \in \mathbb{Z}$，满足 $1 \leq q < N$，且

$$|q\,\alpha - p| \leq \frac{1}{N}.$$

ii) α 是无理数当且仅当存在无穷多对互素的整数 p, q，其中 $q \neq 0$，且

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

解答： i) 首先将区间 $[0,1]$ 等分成 N 个小区间：

$$[0, \frac{1}{N}),\ [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}),\ \ldots, [\frac{N-2}{N}, \frac{N-1}{N}),\ [\frac{N-1}{N}, 1].$$

然后考虑如下 $N+1$ 个数在这些小区间中的分布。

$$0,\ 1,\ \{\alpha\},\ \{2\alpha\}, \ldots, \{(N-1)\alpha\},$$

其中 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分, 即 $\{x\} = x - [x]$, 而 $[x]$ 是不大于 x 的最大整数。根据抽屉原则，至少有一个小区间中包含这些数中的两个。不妨设这两个数是 $\{q_1\alpha\}$ 和 $\{q_2\alpha\}$，且 $q_2 > q_1$，设它们所在的区间是 $[k/N, (k+1)/N)$，其中 $0 \leq k \leq N-2$，则有

$$\frac{k}{N} \leq q_i\,\alpha - [q_i\,\alpha] < \frac{k}{N} + \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2,$$

于是，取 $q = q_2 - q_1$, $p = [q_2\,\alpha] - [q_1\,\alpha]$，则有：

$$|q\,\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

当这两个数包含 0 或者 1，或者它们所在的区间是最后一个闭区间 $[(N-1)/N, 1]$ 时，讨论是类似的，这里就省略了。

ii) 设 α 是无理数。首先任取一个 $N_1 \in \mathbb{N}$，$N_1 \geq 2$，由 i)，存在 $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$，$1 \leq q_1 < N_1$ 使得

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{q_1\,N_1} < \frac{1}{q_1^2}.$$

若 p_1, q_1 有公因子 d，用 $p_1' = p_1/d$ 和 $q_1' = q_1/d$ 代替 p_1, q_1，则 i) 仍成立，所以上面的不等式亦成立。

再取 $N_2 \in \mathbb{N}$，使得 $1/N_2 < |\alpha - p_1/q_1|$，然后再根据 i) 取 p_2, q_2 使得

$$\left|\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{1}{q_2 N_2} < \frac{1}{q_2^2}.$$

我们同样可假设 p_2, q_2 互素。注意

$$\left|\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{1}{q_2 N_2} \leq \frac{1}{N_2} < \left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right|,$$

所以 p_2/q_2 和 p_1/q_1 一定是不同的有理数。

用类似方法可以再取 N_3，p_3，q_3，N_4，p_4，q_4，⋯⋯。这就证明了所求证的事实。

若 α 是有理数，不妨设 $\alpha = u/v$，其中 $u, v \in \mathbb{Z}$，且 u, v 互素，则

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p\,v - q\,u}{q\,v}\right| \geq \frac{1}{|q\,v|}.$$

若 $|\alpha - p/q| < 1/q^2$，则有 $|q| < |v|$，所以 q 只能有有限多种取法。给定 q，显然 p 也只能有有限多种取法，所以使 $|\alpha - p/q| < 1/q^2$ 成立的互素整数对 p, q 只能有有限多组。 $\square$

2. 设 $q \in \mathbb{N}$，$q \geq 2$，求证：

i) 设 $p = q - 1$，则 q-进制小数 $0.pppp\ldots$ 对应的实数就是 1。

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ 是有理数当且仅当 α 的 q-进制小数是循环的。

解答： i) 设 r_n 是小数 $0.pppp\ldots$ 的前 n 位截断给出的有理数，我们在课堂上已经证明：

$$r_n \leq r_{n+1}, \quad s_n := r_n + \frac{1}{q^n} \geq r_{n+1} + \frac{1}{q^{n+1}} = s_{n+1},$$

实数 x 就是由区间套 $[r_0, s_0] \supseteq [r_1, s_1] \supseteq [r_2, s_2] \supseteq \ldots$ 确定的唯一的那个实数。

在本题中，很容易算出 $r_n = 1 - \frac{1}{q^n}$，$s_n = 1$。所以 $r_n \leq 1 \leq s_n$ 对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 成立，所以 1 就是 $0.pppp\ldots$ 对应的实数 x。

ii) 不妨设 $\alpha = 0.\dot{a}_1 \ldots \dot{a}_m$，其它情况很容易归结为这种。$q$-进制小数 α 事实上可以看成一个 q^m-进制小数，它的循环节只有一位 $a = a_1 q^{m-1} + \cdots + a_m$，所以我们只需考虑 $m = 1$ 的情况。设 $\alpha = 0.aaaa\ldots$，$p = q - 1$，则 $p\alpha/a = 0.pppp\cdots = 1$，所以 $\alpha = a/p$，是有理数。

反之，假设 $\alpha = a/b$，$a, b \in \mathbb{Z}$，$b \geq 1$。我们只需证明存在 $m, n \in \mathbb{N}$，$n \geq 1$，满足 $b | q^m(q^n - 1)$。设 q 的素因子分解为

$$q = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}.$$

将 b 分解为 $b = b_1 \cdot b_2$，其中

$$b_1 = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k},$$

b_2 与 q 互素。设 m 是满足

$$m \geq \max\left(\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}\right)$$

的自然数，则 $b_1 | q^m$。另一方面，根据欧拉 φ 函数的性质，取 $n = \varphi(b_2)$，则有 $b_2 | q^n - 1$。于是有 $b | q^m(q^n - 1)$. □

3. 我们考虑所有形如 $\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\dots$ 的 3-进制小数，其中

$$\alpha_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 2, \quad i = 1, 2, \dots.$$

（注意，在这个练习中我们不排除那种从某一位开始全是 2 的小数，所以不同的小数可能对应同一个实数。）设 I_n $(n \in \mathbb{N})$ 是如下集合：

$$I_n = \{0.\alpha_1\alpha_2 \cdots \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0 \text{ 或 } 2\}.$$

求证：

i) 每个 I_n 都是 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间的并；

ii) $I_{n+1} \subseteq I_n$；$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ 非空；

iii) 对任意的 $\epsilon > 0$，存在有限多个开区间 $J_1, \dots, J_N$，满足

$$\sum_{j=1}^{N} |J_j| < \epsilon, \quad \text{且 } K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} J_j.$$

iv) $|K| = |\mathbb{R}|$。

集合 K 叫做康托集，它是具有零测度（性质 iii)）和连续统势（性质 iv)）的集合的例子。

解答： i) 当 $n = 0$ 时，I_0 即区间 $[0, 1]$（注意 α_i 可全取为 2，所以 $1 \in I_0$）。对于一般的 $n \in \mathbb{N}$，固定一组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$，则从第 $n+1$ 位开始可以任取，所以这组固定的 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 对应一个长度为 3^{-n} 的闭区间。而前 n 位有 2^n 种选择，所以 I_n 是 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间的并。

ii) 显然，略。

iii) 对于 $\epsilon > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $(2/3)^n < \epsilon/2$。考虑 I_n，它由 $N = 2^n$ 个闭区间组成，每个闭区间的长度为 3^{-n}，这样的闭区间可以用一个长度为 $2 \cdot 3^{-n}$ 的开区间盖住，这些开区间长度的和为 $N \cdot (2 \cdot 3^{-n}) < \epsilon$。另一方面 $K \subseteq I_n$，所以 K 也可被这些开区间盖住。

iv) K 中的元素即每一位只能取 0 或 2 的 3-进制小数。就像证明 $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ 时一样，我们可以定义一个从 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 到 K 的单射，于是 $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |K|$。另一方面，两个 K 中的元素一定对应不同的实数（因为一旦把 $\cdots 02222\ldots$ 换成 $\cdots 1$，就不再是 K 中元素了），所以 $|K| \leq |\mathbb{R}|$。 □

4. 设 $\mathbb{F}$ 是一个全序域，求证：$\mathbb{F}$ 是序完备的当且仅当有限覆盖定理成立。

解答： 我们已经在课堂上证明“序完备”$\Rightarrow$“闭区间套定理 + 阿基米德性质”$\Rightarrow$“有限覆盖定理”。所以，“序完备”$\Rightarrow$“有限覆盖定理”。下面介绍另一种更直接的证法，不需要中间步骤。

$\Rightarrow$：设闭区间 $I = [a, b]$ 有一个开覆盖 S，定义

$$A = \{x \in I \mid [a, x] \text{ 有来自 } S \text{ 的开覆盖}\}.$$

因为 $a \in I$ 必然被 S 中的某个开区间 J 盖住，所以存在一个 $\epsilon > 0$，使得 $[a, a+\epsilon] \subseteq J$，所以 $a + \epsilon \in A$，即 A 非空。另一方面，注意 A 具有性质

$$x \in A \Rightarrow (a, x) \subseteq A,$$

所以假如 A 没有上界，则必有 $b \in A$，无需再证什么了。以下假设 A 有上界，于是有上确界 $c = \sup(A)$。若 $c > b$，那么同样有 $b \in A$，无需再证，所以我们假设 $c \leq b$。

若 $c \leq b$，则 $c \in I$，于是存在 $J_0 \in S$ 使得 $c \in J_0$。取 $x, y \in J_0$ 满足 $x < c < y$。因为 c 是 A 的最小上界，所以 x 一定不是 A 的上界，于是存在 $x' > x$ 且 $x' \in A$，于是 $x \in A$，所以有 $[a, x]$ 的来自 S 的有限覆盖 $\{J_1, \ldots, J_N\}$。现在，有限的开区间族 $\{J_0, J_1, \ldots, J_N\}$ 能够覆盖 $[a, y]$ 了，于是 $y \in A$，这与 c 是 A 的上界矛盾。

$\Leftarrow$：设 A 是非空有上界集合，$a \in A$，b 是 A 的上界，$I = [a, b]$。如果 A 有上确界，那么它一定在 I 中。我们假设 I 中的点全都不是 A 的上确界，于是对任意的 $x \in I$，x 或者不是上界，或者是上界但不是最小的。

- 若 x 不是上界，则存在 $x' > x$ 且 $x' \in A$。此时，(a, x') 中的点都不是 A 的上界，我们记 $I_x = (a-1, x')$，称之为第一类开区间。
- 若 x 是上界但不是最小的，则存在 $x'' < x$ 且 x'' 是 A 的上界。此时 (x'', b) 中的点都是 A 的上界，我们记 $I_x = (x'', b+1)$，称之为第二类开区间。

对每个 $x \in I$ 都可按上述方式定义一个开区间 I_x，所有这样的开区间构成 I 的一个覆盖，于是有有限多个这样的区间同样能够盖住 I。设这有限多个开区间是 $\{I_1, \ldots, I_k, J_1, \ldots J_l\}$，其中 I_i 是第一类的，J_j 是第二类的。设 $I_i = (a-1, x_i)$，$J_j = (y_j, b+1)$。因为第一类开区间和第二类开区间不可能相交，所以 $x_i < y_j$，于是

$$z = \frac{1}{2}(\max(x_1, \ldots, x_k) + \min(y_1, \ldots, y_l)) \in I$$

不在任何 I_i, J_j 中，这与 $\{I_1, \ldots, I_k, J_1, \ldots J_l\}$ 是 I 的覆盖矛盾。 $\square$

5. 设 $\mathbb{F}$ 是一个全序域，有限覆盖性质在 $\mathbb{F}$ 上成立，则

  i) $\mathbb{F}$ 具有阿基米德性质；

  ii) 闭区间套定理在 $\mathbb{F}$ 上成立。

解答： i) 设 $x \in \mathbb{F}$，$x > 0$，取 $\epsilon = 1/(2x)$，考虑 $I = [0,1]$ 的开覆盖 $\{B_\epsilon(y) \mid y \in [0,1]\}$，其中 $B_\epsilon(y)$ 表示开区间 $(y-\epsilon, y+\epsilon)$。这个开覆盖有有限子覆盖，设它为 $\{B_\epsilon(y_1), \ldots, B_\epsilon(y_n)\}$，则这些开区间长度之和必然大于 I 的长度，所以有 $n \cdot (2\epsilon) > 1$，于是 $x < n$。

ii) 我们将证明如下结论：设 S 是一个非空集合，其元素都是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间。若 S 的任何有限子集都有非空的交，则 S 有非空的交。这个性质称为有限覆盖定理的对偶命题或闭集描述，它显然可以推出闭区间套定理，只要取 $S = \{I_0, I_1, \ldots\}$ 即可。

首先不妨假设存在一个闭区间 $I = [a,b]$ 使得 S 的元素都是 I 的子集。若不然，只需任取一个 $I \in S$，然后将 S 修改为 $S' = \{J \cap I \mid J \in S\}$ 即可。一旦证出 S' 有非空的交，那么 S 的交就是 S' 的交。

接下来用反证法，假设 $\bigcap S = \emptyset$，则 $I - \bigcap S = I$，于是

$$I = \bigcup_{J \in S} (I - J).$$

对于 $J = [c,d]$，定义 $J' = (a-1, c)$、$J'' = (d, b+1)$，则 $\{J', J''\}$ 覆盖 $I - J$，于是 $\{J', J'' \mid J \in S\}$ 覆盖 I。根据有限覆盖性质，存在这个开覆盖的一个子覆盖，设它为 $\{J_1', \ldots, J_k', J_{k+1}'', \ldots, J_n''\}$，那么

$$\{J_1', J_1'', \ldots, J_n', J_n''\}$$

也是一个有限子覆盖，所以有

$$\emptyset = I - \bigcup_{j=1}^{n} \left(J_j' \cup J_j''\right) = \bigcap_{j=1}^{n} \left(I - (J_k' \cup J_k'')\right) = \bigcap_{j=1}^{n} J_k,$$

这与 S 的任何有限子集都有非空的交矛盾。 $\square$