数学分析（1）：第 10 次习题课

刘思齐

1. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的凸函数，求证：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

解答： 首先我们利用定义证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x.$$

对于区间 $[a,b]$ 的任意一个带标记的分划 (P,ξ)：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

定义它的镜像分划为 (P', ξ')，其中

$$x_i' = a+b-x_{n-i}, \quad \xi_i = a+b-\xi_{n+1-i}.$$

再定义 $g(x) = f(a+b-x)$，于是相应的 Riemann 和满足：

$$S(f,P,\xi) = S(g,P',\xi'),$$

然后对 P 取极限 $\|P\| \to 0$ 即可。

接下来，对不等式

$$\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

两边从 a 到 b 积分即可证明所求不等式。 □

注：讲了换元法之后，第一步就是显然的了。

2. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，若对 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\int_a^b x^i f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

求证：f 在 $[a,b]$ 上至少有 n 个零点。

解答： 假设 f 在 $[a,b]$ 上至多有 $n-1$ 个零点，于是 f 在 $[a,b]$ 上至多变号 $n-1$ 次。设 $x_1, \ldots, x_m$ 是 f 的变号点，定义多项式

$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m),$$

则 $f(x)p(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒 ≥ 0 或者恒 ≤ 0。根据已知条件，我们应有

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x = 0.$$

根据前面的某道作业题，应有 $f(x)p(x)=0$，所以只要 $p(x)\neq 0$，就有 $f(x)=0$，于是 f 在 $[a,b]$ 上有无穷多个零点。这和最初的假设矛盾。 $\square$

3. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f \geq 0$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{a\leq x\leq b} f(x).$$

解答： 设 $M=\max_{a\leq x\leq b} f(x)$，由积分的性质易知，

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}},$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leq M.$$

另一方面，设 $f(x_0)=M$，由连续函数的性质，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，有

$$f(x) > M-\varepsilon,$$

于是

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{x_0-\frac{\delta}{2}}^{x_0+\frac{\delta}{2}} f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq (M-\varepsilon)(\delta)^{\frac{1}{n}},$$

所以

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq M-\varepsilon.$$

最后，令 ε 趋于 0 即可。 $\square$

4. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续增函数，求证：

$$\int_a^b x\,f(x)\,dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

解答： 因为 f 增，对于任意的 $x,y\in[a,b]$，有

$$(x-y)(f(x)-f(y)) \geq 0.$$

取 $y=\frac{a+b}{2}$，然后将上式对 x 从 a 到 b 积分即可。 $\square$

5. 设 f 是区间 $[1,+\infty)$ 上的连续可导函数，满足：

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)},\quad f(1)=1,$$

求证：$\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在且有 $\lim_{x\to\infty} f(x)\le 1+\frac{\pi}{4}$。

解答： 根据已知条件和牛顿—莱布尼茨公式，

$$f(x)=1+\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+f^2(t)},$$

所以 f 单调增。特别地，有 $f(x)\ge 1$，于是

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+f^2(t)}\le\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\arctan x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}.$$

根据单调有界收敛定理，所求极限存在且小于 $1+\frac{\pi}{4}$。 □

6. 设 f 是区间 $[0,a]$ 上的连续函数，M、k 是正实数，f 满足：

$$|f(x)|\le M+k\int_0^x |f(t)|\,dt,$$

求证：$|f(x)|\le Me^{k\,x}$。

解答： 设 $F(x)=M+k\int_0^x |f(t)|\,dt$，则 F 满足 $F'(x)\le kF(x)$，所以 $(e^{-k\,x}F(x))'\le 0$，于是 $e^{-k\,x}F(x)$ 单调减少，因此 $F(x)\le F(0)e^{k\,x}$，这就是所求证的不等式。 □