数学分析（1）：第 11 次习题课

刘思齐

1. 利用确界原理证明 Cousin 引理：对闭区间 $I=[a,b]$ 上的任意正值函数 $\delta: I \to \mathbb{R}_{>0}$，存在 I 的带标记分划 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ 满足 $I_i \subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$。

解答： 设 $E=\{x \in (a,b] \mid 在 [a,x] 上存在满足条件的带标记分划\}$，则 $(a,\delta(a)) \subseteq E$（因为对任意的 $x \in (a,\delta(a))$，$\{([a,x],a)\}$ 本身就是 $[a,x]$ 的一个满足条件的带标记分划），所以 E 非空；另外，E 显然有上界 b，所以存在上确界，记 $z=\sup E \in I$。

因为 z 是 E 的上确界，所以存在 $y \in (z-\delta(z),z) \cap E$ 满足在 $[a,y]$ 上存在满足条件的带标记分划 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$，于是 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n \cup \{([y,z],z)\}$ 就构成一个 $[a,z]$ 的满足条件的带标记分划，所以 $z \in E$，于是 $z=\max E$。

若 $z<b$，则存在 $y \in (z,z+\delta(z)) \cap I$。设 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ 是 $[a,z]$ 的一个满足条件的带标记分划，则 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n \cup \{([z,y],z)\}$ 构成 $[a,y]$ 的一个满足条件的带标记分划，于是 $y \in E$，这与 $z=\max E$ 矛盾。所以必有 $z=b$。 □

2. 利用 Cousin 引理证明有限覆盖定理：闭区间 $I=[a,b]$ 的任意开覆盖有有限子覆盖。

解答： 设 S 是 I 的一个开覆盖，则对任意的 $x \in I$，存在一个 $J_x \in S$ 使得 $x \in J_x$。根据开区间性质，存在正数 $\delta_x>0$ 使得 $B_{\delta_x}(x) \subseteq J_x$。定义 $\delta: I \to \mathbb{R}_{>0}$，$x \mapsto \delta_x$，根据 Cousin 引理，存在一个 I 的带标记分划 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ 满足 $I_i \subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i) \subseteq J_{\xi_i}$，于是 $\{J_{\xi_1},\ldots,J_{\xi_n}\}$ 就是一个 I 的来自 S 的有限子覆盖。 □

3. 设 $I=[0,1]$，$K \subseteq I$ 是 Cantor 集（见第一次习题课材料）。定义一个单调函数 $F: I \to \mathbb{R}$ 如下：

- 若 $x \in K$，根据定义，x 的 3-进制小数中只有 0 和 2，将所有的 2 替换成 1 并将所得结果视为一个 2-进制小数，这样得到的实数就定义为 $F(x)$ 的值。
- 若 $x \notin K$，则 x 落在一个开区间 $J=(y,z)$ 中，其中 $y,z \in K$，且 $F(y)=F(z)$。根据单调性，我们有 $F(x)=F(y)=F(z)$。

求证：

i) 若开区间 $J=(y,z)$ 满足 $J \cap K=\emptyset$，且 $y,z \in K$，则有 $F(y)=F(z)$。

ii) 函数 $F(x)$ 连续但不 Lipschitz 连续[1]。

iii) 函数 $F(z)$ 几乎处处可导且导函数 $f(x) = F'(x)$ 几乎处处为零。

iv) Newton-Leibniz 公式 $F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不成立。

解答： i) 根据 Cantor 集的定义可知 y 的 3-进制小数为如下形式：

$$y = 0.a_1a_2 \cdots a_n0222 \cdots ,$$

于是，$F(y)$ 的 2-进制小数为

$$F(y) = 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2} \cdots \frac{a_n}{2}0111 \cdots ,$$

同理，z 的 3-进制小数和 $F(z)$ 的 2-进制小数为

$$z = 0.a_1a_2 \cdots a_n2, \quad F(z) = 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2} \cdots \frac{a_n}{2}1,$$

所以有 $F(y) = F(z)$。

ii) 设 $x_0 \in I$，对于任意的 $\varepsilon > 0$，取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $2^{-n} < \varepsilon$，取 $0 < \delta < 3^{-n}$，则对于 $x \in B_\delta(x_0)$，x 和 x_0 的 3-进制小数的前 n 位都相同，于是由 F 的定义可知 $F(x)$ 和 $F(x_0)$ 的 2-进制小数的前 n 位相同，所以 $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$，所以 F 在 x_0 连续。

取 x、y 的 3-进制小数为 $0.a_1 \cdots a_n12$、$0.a_1 \cdots a_n22$，则 $F(x)$、$F(y)$ 的二进制小数为 $0.\frac{a_1}{2} \cdots \frac{a_n}{2}1$、$0.\frac{a_1}{2} \cdots \frac{a_n}{2}11$，所以 $|x-y| = 3^{-n}$、$|F(x)-F(y)| = 2^{-n-1}$，所以不存在 $L > 0$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$，使得 $|F(x) - F(y)| < L|x - y|$。

iii) 若 $x \in K$，则 $F'(x) = 0$，而 K 是 Lebesgue 零测集。

iv) $F(1) = 1$，$F(0) = 0$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$。 □

4. 设函数 F 在区间 $I = [a, b]$ 上 Lipschitz 连续，且 $f(x) = F'(x)$ 在 I 上 Riemann 可积[2]，则 Newton-Leibniz 公式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

（提示：利用 Lebesgue 可积性定理的证明方法先证明 f 几乎处处为零的情况，然后利用先积后微版的微积分基本定理将一般情况转化为 f 几乎处处为零的情况。）

解答： 若 $f(x) = F'(x)$ 几乎处处为零，我们只需证明 $F(b) = F(a)$，即对任意的 $\varepsilon > 0$，有 $|F(b) - F(a)| < \varepsilon$。设

$$D = \{x \in I \mid F'(x) \text{ 不存在或非零}\},$$

[1]Lipschitz 连续：若存在常数 L 使得对任意的 $x, y \in I$，有 $|F(x) - F(y)| < L|x - y|$ 则称 F 在 I 上 Lipschitz 连续，常数 L 称为 F 的 Lipschitz 常数。

[2]此处我们承认 Lebesgue 微分定理，于是 Lipschitz 连续的函数一定几乎处处可导。定义函数 f 时，在 F 不可导的点随意规定其值即可。

D 是零测集，所以对前述 $\varepsilon > 0$，存在开区间的集合 $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$，满足

$$D \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

其中 L 是函数 $F(x)$ 的 Lipschitz 常数。在 I 上定义一个函数 $\delta : I \to \mathbb{R}_{>0}$

- 若 $x \in D$，则 x 属于某个 J_k，于是存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $B_{\delta_1}(x) \subseteq J_k$，我们定义 $\delta(x) = \delta_1$；
- 若 $x \notin D$，则 $F'(x)$ 存在且等于零，于是存在 $\delta_2 > 0$，使得对任意的 $y_1, y_2 \in B_{\delta_2}(x)$ 有 $|F(y_1) - F(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|y_1 - y_2|$，我们定义 $\delta(x) = \delta_2$。

对于上述 δ，根据 Cousin 引理，存在一个 I 的带标记分划 $\{(I_i, \xi_i)\}_{i=1}^{n}$，满足 $I_i \in B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$。设 $T = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \xi_i \in D\}$，于是有

$$\begin{aligned}
&|F(b) - F(a)| \leq \sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \\
=&\sum_{i\in T} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \sum_{i\notin T} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \\
<&L \sum_{i\in T} |x_i - x_{i-1}| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i\notin T} |x_i - x_{i-1}| \\
<&L \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| \\
<&L \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了 $f(x)$ 几乎处处为零的情况。

对于一般情况，设 $G(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，则 $G(x)$ Lipschitz 连续，于是几乎处处可导，并且有 $G'(x) = f(x) = F'(x)$（几乎处处），所以 $G(x) - F(x)$ 几乎处处可导且导数几乎处处为零，根据前面已经证过的结果，$G(b) = F(b) + G(a) - F(a) = F(b) - F(a)$，这就是 Newton-Leibniz 公式。 □

5. 通过如下步骤证明 π^2 不是有理数：

   i) 设 $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$，则 $f_n(x)$ 的各阶导数在 $x = 0$、$x = 1$ 处的值都是整数。

   ii) 对任意正实数 a，设 $I_n = \int_0^1 \pi\, a^n\, f_n(x) \sin(\pi\, x)\mathrm{d}x$，则当 n 充分大时 $0 < I_n < 1$。

   iii) 假设 $\pi^2 = a/b$，其中 $a, b \in \mathbb{N}$，则 $I_n \in \mathbb{Z}$。

（注：类似技术还可用来证明 e 的超越性，具体细节可参看菲赫·金哥尔茨的《微积分学教程》或 Goursat 的《数学分析教程》。）

解答： i) 若 $k<n$，则显然有 $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$；若 $k\geq n$，由 Leibniz 公式易知 $f^{(k)}(0)$、$f^{(k)}(1)$ 都是整数。

ii) I_n 显然大于零，而当 n 趋于无穷时，有

$$|I_n|\leq \frac{\pi\, a^n}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x=\frac{\pi\, a^n\, n!}{(2n+1)!}\to 0.$$

iii) 由分部积分法可得如下不定积分公式：

$$\int \pi\, P(x)\, \sin(\pi\, x)\mathrm{d}x = Q'(x)\frac{\sin(\pi\, x)}{\pi}-Q(x)\cos(\pi\, x),$$

其中 $P(x)$ 是多项式，$Q(x)$ 为

$$Q(x)=P(x)-\frac{P''(x)}{\pi^2}+\frac{P''''(x)}{\pi^4}-\cdots.$$

将 $P(x)=a^n f_n(x)$ 代入可得

$$\begin{aligned}Q(x)&=a^n\left(f_n(x)-\frac{f_n''(x)}{\pi^2}+\frac{f_n''''(x)}{\pi^4}-\cdots\right)\\&=a^n f_n(x)-a^{n-1}bf_n''(x)+a^{n-2}b^2 f_n''''(x)-\cdots,\end{aligned}$$

所以 $Q(0)$、$Q(1)$ 都是整数，于是 $I_n=Q(0)+Q(1)$ 也是整数。 □

6. 设

$$I_n(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\, t)\cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

求证：

i)

$$(n^2-z^2)I_n(z)=n(n-1)I_{n-2}(z).$$

ii)

$$\sin\frac{\pi\, z}{2}=\frac{\pi\, z}{2}\frac{I_0(z)}{I_0(0)},\quad \cos\frac{\pi\, z}{2}=(1-z^2)\frac{I_1(z)}{I_1(0)}.$$

iii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n(z)}{I_n(0)}=1.$$

iv)

$$\sin\frac{\pi\, z}{2}=\frac{\pi\, z}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2}\right),\quad \cos\frac{\pi\, z}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(2k+1)^2}\right).$$

解答： i) 由两次分部积分易得所求等式。

ii) 直接计算 $I_0(z)$、$I_1(z)$ 即可。

iii) 首先计算 $|I_n(0) - I_n(z)|$

$$\begin{aligned}|I_n(0) - I_n(z)| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(z\,t)) \cos^n(t) \mathrm{d}t\right| \\ &= \left|2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{z\,t}{2} \cos^n(t) \mathrm{d}t\right| < \frac{|z|^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^n(t) \mathrm{d}t \\ &< \frac{|z|^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^{n-1}(t) \mathrm{d}(\cos t) < \frac{|z|^2}{2n}|I_n(0)|,\end{aligned}$$

由此不难证明结论。

iv) 由 i)、ii)、iii) 显然。 □