数学分析（1）：第 3 次习题课

刘思齐

1. 设函数 $G:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足如下递推关系：

$$G(0)=0,\quad G(n)=n-G(G(n-1)).$$

这个数列称为 Hofstadter G-序列。求证：

i) 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$0\le G(n)\le n$，因此 G 由上述递推关系唯一确定。

ii) 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$G(n-1)\le G(n)\le G(n-1)+1$。

iii) 数列 $x_n=G(n)/n$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解答： 由定义易知 G 的前几个值为：

$$\{0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ \dots\}.$$

它们都满足 i) 和 ii)。下面对 $n\in\mathbb{N}$ 用归纳法：假设对于所有 $0\le k\le n-1$，i) 和 ii) 都成立，于是有

$$0\le G(n-1)\le n-1,$$

$$0\le G(G(n-1))\le G(n-1)\le n-1,$$

因此

$$1\le G(n)=n-G(G(n-1))\le n.$$

所以 i) 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

要证 ii) 对 n 成立，根据递推关系，只需证明：

$$n-1-G(G(n-2))\le n-G(G(n-1))\le n-1-G(G(n-2))+1,$$

即

$$G(G(n-2))\le G(G(n-1))\le G(G(n-2))+1.$$

注意 $G(n-2)\le G(n-1)\le G(n-2)+1$，所以 $G(n-1)$ 只有两个可能的取值。如果它等于 $G(n-2)$，那么上式显然成立。如果它等于 $G(n-2)+1$，那么上式即 $k=G(n-2)+1$ 时 ii) 的归纳假设。所以 ii) 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立。

下面考虑 iii)。由 i) 知数列 $\{x_n\}$ 有界，所以有有限的上下极限，记

$$\alpha=\liminf_{n\to\infty}x_n,\quad \beta=\limsup_{n\to\infty}x_n.$$

由上面的归纳法知，当 $n \geq 1$ 时 $G(n) > 0$，所以对一切 $n \geq 2$ 可定义 $y_n = x_{G(n-1)}$，数列 $\{y_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列，所以也有有限的上下极限，记

$$\alpha' = \liminf_{n\to\infty} y_n, \quad \beta' = \limsup_{n\to\infty} y_n,$$

并且这四个极限满足如下关系：

$$\alpha \leq \alpha' \leq \beta' \leq \beta.$$

函数 $G(n)$ 的递推关系现在可写为

$$1 + y_n \frac{x_{n-1}}{x_n} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{x_n}.$$

注意 $\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{G(n-1)}{G(n)} \frac{n-1}{n}$，由递推关系和 i) 易知 $G(n)$ 没有上界，于是由 ii) 可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G(n-1)}{G(n)} = 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1$。对上式分别取上下极限可得：

$$1 + \beta' = \frac{1}{\alpha}, \quad 1 + \alpha' = \frac{1}{\beta},$$

解出 α'、β'，代入前面的不等式可得：

$$\alpha \leq \frac{1}{\beta} - 1 \leq \frac{1}{\alpha} - 1 \leq \beta,$$

这个不等式有唯一解：

$$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，其值即上述 α。 $\square$

2.

i) 对任意的 $n \in \mathbb{N}$，求证：

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

ii) 设

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n),$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。这个极限称为 Euler 常数，一般记为 γ。

iii) 求极限：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

解答： 设

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

课堂上我们已经证明过 $\{e_n\}$ 单调递增趋向于 e。另一方面

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \Big/ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

根据伯努力不等式 $(1+x)^n \geq 1+n\,x$，我们有

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n(n+2)} > 1+\frac{1}{n+1},$$

所以 $\{f_n\}$ 单调递减趋向于 e。所以，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

两边取对数可得 i).

对于 ii)，首先根据 i) 的左边，

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调递减，接下来只需证明它有下界。根据 i) 的右边，

$$\log(n) = \log \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

所以 $x_n > 0$，因此极限存在。

对于 iii)，记 $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$，所求极限即 $\lim\limits_{n\to\infty}(H_{2n} - H_n)$。由 ii) 知

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \log(n)) = \gamma, \quad \lim_{n\to\infty}(H_{2n} - \log(2n)) = \gamma,$$

相减得 $\lim\limits_{n\to\infty}(H_{2n} - H_n) = \log(2)$。 $\square$

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$，记

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \beta,$$

求证：闭区间 $[\alpha, \beta]$ 中的每一点都是 $\{x_n\}$ 的极限点。你能构造一个满足这样的条件的 $\{x_n\}$ 吗？

解答： 假设 $x \in [\alpha, \beta]$ 不是极限点，那么 x 一定不是 α、β，并且存在一个 $\epsilon > 0$，使得 $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq [\alpha, \beta]$ 且 $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ 只包含数列 $\{x_n\}$ 中的有限项。将数列 $\{x_n\}$ 的前面有限项扔掉并不影响题目的条件和结论，所以我们不妨设 $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ 不包含数列中的任何一点。

定义两个集合

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [\alpha, x - \epsilon]\}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [x + \epsilon, \beta]\},$$

于是 $A \cap B = \emptyset$，$A \cup B = \mathbb{N}$，且 A、B 都是无穷集（因为 α、β 是极限点）。于是一定存在无穷多个 $n_1 < n_2 < \dots$ 满足

$$x_{n_k} \in A \text{ 且 } x_{n_k+1} \in B,$$

所以 $x_{n_k+1} - x_{n_k} \geq 2\epsilon$，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ 矛盾。

如下数列满足题目的条件：

$$\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{0}{5}, \dots\right\}.$$

□

4. 设 $a_n > 0$，求证：

$$\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geq 1.$$

你能构造一个数列 $\{a_n\}$ 使得上述不等式的等号成立吗？

解答： 假设 $\limsup\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1$，于是存在 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时有

$$n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1,$$

它等价于

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

通过归纳法易证：对于一切 $p \in \mathbb{N}$，$p \geq 1$，有

$$\frac{a_{n+p}}{n+p} < \frac{a_n}{n} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k}.$$

注意，当 p 充分大时，右边小于零，而左边大于零，矛盾。

取 $a_n = n\log(n)$ $(n \geq 2)$，则上述不等式等号成立。 □

5. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数，求证：总存在一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

所以，不存在收敛得最慢的级数，于是各种基于比较的判敛法都不是万能的。

解答： 如果有某个 $a_n = 0$，我们可以去掉它，然后让后面的 a_n 向前进一格。如果去掉等于零的 a_n 之后只剩下一个有限和，那么可取 $b_n = 2^{-n}$。接下来我们总假设所有的 $a_n > 0$。

设 $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$，则 $R_n>0$，并且 $\{R_n\}$ 严格单调递减趋于零。设 $b_n=\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}}$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}})=\sqrt{R_0}.$$

另一方面

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{R_n-R_{n+1}}{\sqrt{R_n}-\sqrt{R_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{R_n}+\sqrt{R_{n+1}})=0,$$

所以我们的确构造出了一个收敛的正项级数，它比原级数收敛得慢。 □

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的正项级数，记

$$A_n=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}},$$

求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\le e\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

你能证明 e 是最优的吗？

解答： 利用均值不等式和课堂上讲过的如下不等式

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!,$$

我们有

$$A_n=\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(k\,a_k)\right)^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\le\frac{e}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\,a_k,$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}A_n&\le e\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\,a_k\\&=e\sum_{k=1}^{N}k\,a_k\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\\&=e\sum_{k=1}^{N}k\,a_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right)\\&\le e\sum_{k=1}^{N}a_k.\end{aligned}$$

要说明 e 最优，即证明：若将 e 换成 $e' < e$，则存在一个正项级数使不等式不成立。定义数列 $\alpha_n = 1/n$，$\beta_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\frac{1}{n}} = 1/(n!)^{\frac{1}{n}}$，

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}, \quad y_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

不难证明 $\{x_n\}$ 单调递增，于是 $\{y_n\}$ 也单调递增。

注意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$，所以根据 Stolze 定理，有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = e.$$

于是，对任意的 $e' < e$，存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得 $y_N > e'$。现在，取

$$a_n = \begin{cases} \alpha_n, & n \le N; \\ 0, & n > N, \end{cases}$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{N} \beta_n > e' \sum_{n=1}^{N} \alpha_n = e' \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

可以证明，不等式的等号成立当且仅当 $a_n = 0$。 □