数学分析（1）：第 9 次习题课

刘思齐

这次的主题是椭圆积分，以下内容来自卓里奇《数学分析（第一卷）》的第五章、第 §7 节的练习 5。

a) 任何实系数三次多项式都有实根 x_0，且替换 $x - x_0 = t^2$ 导致形如 $t^2(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e)$ 的多项式，其中 $a \neq 0$。

解答：

$$(x - x_0)(Ax^2 + Bx + c) = t^2(At^4 + (B + 2x_0A)t^2 + (C + Bx_0 + Ax_0^2)).$$

□

b) 函数 $R(x, \sqrt{P(x)})$（其中 $R(u, v)$ 是有理函数，而 P 是三次或四次多项式）可以化成 $R_1(t, \sqrt{at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e})$。

解答： 由 a) 显然。 □

c) 四次多项式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 可表成乘积

$$a(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2),$$

且经替换 $x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + 1}$ 总可化成

$$\frac{(M_1 + N_1t^2)(M_2 + N_2t^2)}{(\gamma t + 1)^4}.$$

解答： 四次实系数多项式可分解为两个二次实系数多项式的乘积是代数基本定理的推论。至于后一结论，其实就是找 α, β, γ 使得分子中的线性项不出现。两个线性项的给出的方程为：

$$2\alpha\beta + p_i(\alpha + \beta\gamma) + 2q_i\gamma = 0, \quad i = 1, 2,$$

消去 α, γ，可先解出 β

$$\beta = \frac{-(q_1 - q_2) \pm \sqrt{\Delta}}{p_1 - p_2},$$

其中 $\Delta = (y_1 - y_2)(y_1 - z_2)(z_1 - y_2)(z_1 - z_2)$，$y_i$、$z_i$ 表示方程 $x^2 + p_ix + q_i = 0$ $(i = 1, 2)$ 的两个根。如果它们是两对共轭虚根或者一对共轭虚根和一对实根，那么不难看出 $\Delta \geq 0$。如果四个根都是实的，将它们按大小关系重新排列为

$$y_1 \geq z_1 \geq y_2 \geq z_2,$$

则仍有 $\Delta \geq 0$，所以可以选到一个实的 β。接下来再解 α、γ 就不难了。 $\square$

d) 函数 $R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})$ 经替换 $x = \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+1}$ 可化成

$$R_1(t, \sqrt{A(1 + m_1 t^2)(1 + m_2 t^2)}).$$

解答： 由 c) 显然。 $\square$

e) 函数 $R(x, \sqrt{y})$ 可以表成和式 $R_1(x, y) + \frac{R_2(x,y)}{\sqrt{y}}$，其中 R_1 和 R_2 是有理函数。
解答： 将 R 表示为

$$R(x, \sqrt{y}) = \frac{A(x, y) + B(x, y)\sqrt{y}}{C(x, y) + D(x, y)\sqrt{y}},$$

其中 A、B、C、D 为多项式，然后分母有理化即可。 $\square$

f) 任何有理函数都可以表成偶的和奇的两个有理函数之和。
解答：

$$R(x) = \frac{R(x) + R(-x)}{2} + \frac{R(x) - R(-x)}{2}.$$

$\square$

g) 若有理函数 $R(x)$ 是偶的，则有 $r(x^2)$ 的形式，而若它是奇的，则有 $x\,r(x^2)$ 的形式，其中 $r(x)$ 是有理函数。
解答： 设 $R(x) = P(x)/Q(x)$，其中 $P(x)$、$Q(x)$ 没有非常数的公因子。偶函数条件给出 $P(x)Q(-x) = P(-x)Q(x)$，因为 P、Q 没有公因子，所以 $Q(x)$ 的所有因子一定都整除 $Q(-x)$，所以 $Q(-x) = c\,Q(x)$，同理 $P(-x) = c\,P(x)$。从首项系数看，这个 c 只能是 ± 1。根据 P、Q 无公因子，$c = -1$ 是不可能的。所以 P、Q 本身也都是偶的多项式。接下来不难证明所需结论。 $\square$

h) 任何函数 $R(x, \sqrt{y})$ 都可化为

$$R_1(x, y) + \frac{R_2(x^2, y)}{\sqrt{y}} + \frac{R_3(x^2, y)}{\sqrt{y}} x.$$

解答： 由 g) 显然。 $\square$

i) 任何 $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$ 型的积分（其中 $P(x)$ 是四次多项式）都可以化成积分

$$\int \frac{r(t^2)dt}{\sqrt{A(1 + m_1 t^2)(1 + m_2 t^2)}},$$

再加一个初等函数项，其中 $r(t)$ 是有理函数，$A = \pm 1$。
解答： 由 d)、h)，所求积分可化为

$$\int \left(r_1(t) + \frac{r_2(t^2)}{\sqrt{A(1 + m_1 t^2)(1 + m_2 t^2)}} + \frac{r_3(t^2)}{\sqrt{A(1 + m_1 t^2)(1 + m_2 t^2)}} t \right) dt,$$

其中第一、三项都是初等函数，第二项即所求结果。 □

j) 如果 $|m_1| > |m_2| > 0$，那么以下四种变换

$$\sqrt{|m_1|}t = x, \quad \sqrt{|m_1|}t = \sqrt{1-x^2},$$
$$\sqrt{|m_1|}t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{|m_1|}t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

中的一种可把积分 $\int \frac{r(t^2)dt}{\sqrt{A(1+m_1t^2)(1+m_2t^2)}}$ 化为

$$\int \frac{\tilde{r}(x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

其中 $0 < k < 1$，而 $\tilde{r}$ 是有理函数。

解答： 这一步较麻烦，需根据 A、m_1、m_2 的符号分情况讨论。例如，当 $A=1$、$m_1<0$、$m_2<0$ 时用第一种、当 $A=1$、$m_1<0$、$m_2>0$ 时用第二种、当 $A=1$、$m_1>0$、$m_2>0$ 时用第三种都可直接转化为标准型。若 $A=1$、$m_1>0$、$m_2<0$，用第四种可以转化为 $A=1$、$m_1<0$、$m_2<0$ 的情况，然后再用第一种即可。$A=-1$ 的情况类似。具体细节可参考椭圆积分方面的书。□

k) 求以下积分的递推公式：

$$I_n = \int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2-a)^m\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

解答： 设 $P(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$。对于 I_n，用两种方法计算 $\int x^{2n-1}dP(x)$，可得一个三项递推关系。对 J_n，考虑 $\int \frac{xdx}{(x^2-a)^{m-1}}dP(x)$。 □

l) 任何椭圆积分

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$$

（其中 P 是四次多项式）都可以化为以下三种标准椭圆积分之一

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \text{ 或} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \text{ 或} \int \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi$$
$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \text{ 或} \int \frac{d\phi}{(1+h\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

再加上一个初等函数。

解答： 在 i) 之后，考虑 $\tilde{r}$ 的复系数部分分式展开，接下来应用 k) 中的递推公式即可。 □

m) 把 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ 化成标准椭圆积分。

解答：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = -\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},$$

其中

$$\phi = \arccos\frac{1-\sqrt{3}+x}{1+\sqrt{3}+x}, \quad k = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

□

n) 把 $\int \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt$ 化成标准椭圆积分。

解答：

$$\int \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt = a \int \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\, dt,$$

其中 $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$。

注：这是计算椭圆周长时出现的积分，椭圆积分这个名字就由此而来。 □

在实际应用中很少需要手工化简椭圆积分，计算机软件可以直接给出结果。但是，椭圆积分的麻烦之处在于，不同的定义域上会有非常不一样的表达式，计算机给出的结果往往只适用于某个特定的区域，所以仍然不够方便。更好的选择是查积分表，例如著名的《Table of Integrals, Series, and Products》，里面针对各种不同的区域或者参数大小关系都有详尽的结果。例如上面的第 m) 条就是查表得到的，手算实在是太麻烦了……