数学分析（1）期末试题　　卷 A　　2015.01.16

一、（10 分）求极限

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

二、（10 分）设函数 f 在区间 I 上二阶可导，且

$$f(x) \geq \frac{1}{e}, \quad f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I.$$

求证：$f(x)\log(f(x))$ 是 I 上的凸函数（这里 log 是以 e 为底的对数）。

三、（15 分）设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上可导。假设 f 在 $[0,1]$ 上有无限多个互不相同的零点 $x_1, x_2, x_3, \dots$。求证：f 与 f' 有公共零点。

四、（15 分）设 $[a,b]$ 为有界闭区间，函数 f 在 $[a,b]$ 上连续。

(1) 设 $c \in (a,b)$ 并设 f 分别在 (a,c) 和 (c,b) 上可导。求证：存在 $\xi \in (a,c)\cup(c,b)$ 使得

$$|f(b) - f(b)| \leq |f'(\xi)|(b-a). \tag{$*$}$$

(2) 一般地，设 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq (a,b)$，且 f 在 $(a,b) - S$ 上可导。求证：存在 $\xi \in (a,b) - S$ 使得不等式 $(*)$ 成立。

五、（15 分）设 n 为正整数。

(1) 设函数 $f \in C^{2n+1}(\mathbb{R})$ 满足 $f^{(k)}(x) > 0,\ x \in \mathbb{R},\ 0 \leq k \leq 2n+1$。求证：$f$ 的偶数次 Taylor 多项式恒正，即对任意的 $x \in \mathbb{R}$，有

$$P_{2n}(x) := f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)x^{2n}}{(2n)!} > 0.$$

（提示: 对 $x \geq 0$ 和 $x < 0$ 的情形分别讨论。）

(2) 求证：对任意的 $x \in \mathbb{R}$，有

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0.$$

六、（15 分）设函数 f 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $M := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f''(x)| < \infty$。求证：

$$|f'(x)| \le |f(1) - f(0)| + \frac{M}{2}, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

七、（10 分）计算广义积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{6\,x^{1/6}\,(x^{1/3} + x^{1/2})}.$$

八、（10 分）设 $[a,b]$ 为有界闭区间，函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调增且 $0 \le f(x) \le 1$，$\forall\, x \in [a,b]$。求证：

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x))^n \mathrm{d}x = 0.$$

九、（附加题 10 分）设 $f(x) = \tan x - x$。

(1) 设 $0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots$ 是 $f(x) = 0$ 的所有正根，求证：

$$\lim_{n\to\infty} (\beta_n - n\,\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 求证：当 $n \ne m$ 时，

$$\int_0^1 \sin(\beta_n\,x)\sin(\beta_m\,x)\mathrm{d}x = 0.$$