数学分析（1）：第 1 次习题课

刘思齐

1. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$，求证：

   i) 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$，$N \geq 2$，存在 $p, q \in \mathbb{Z}$，满足 $1 \leq q < N$，且
   $$|q\,\alpha - p| \leq \frac{1}{N}.$$

   ii) α 是无理数当且仅当存在无穷多对互素的整数 p, q，其中 $q \neq 0$，且
   $$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

2. 设 $q \in \mathbb{N}$，$q \geq 2$，求证：

   i) 设 $p = q - 1$，则 q-进制小数 $0.pppp\ldots$ 对应的实数就是 1。

   ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ 是有理数当且仅当 α 的 q-进制小数是循环的。

3. 我们考虑所有形如 $\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots$ 的 3-进制小数，其中
   $$\alpha_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 2, \quad i = 1, 2, \ldots.$$
   （注意，在这个练习中我们不排除那种从某一位开始全是 2 的小数，所以不同的小数可能对应同一个实数。）设 I_n $(n \in \mathbb{N})$ 是如下集合：
   $$I_n = \{0.\alpha_1\alpha_2\cdots \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0 \text{ 或 } 2\}.$$
   求证：

   i) 每个 I_n 都是长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的 2^n 个闭区间的并；

   ii) $I_{n+1} \subseteq I_n$；$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ 非空；

   iii) 对任意的 $\epsilon > 0$，存在有限多个开区间 $J_1, \ldots, J_N$，满足
   $$\sum_{j=1}^{N} |J_j| < \epsilon, \quad \text{且 } K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} J_j.$$

   iv) $|K| = |\mathbb{R}|$。

集合 K 叫做康托集，它是具有零测度（性质 iii)）和连续统势（性质 iv)）的集合的例子。

4. 设 $\mathbb{F}$ 是一个全序域，求证：$\mathbb{F}$ 是序完备的当且仅当有限覆盖定理成立。

5. 设 $\mathbb{F}$ 是一个全序域，有限覆盖性质在 $\mathbb{F}$ 上成立，则

   i) $\mathbb{F}$ 具有阿基米德性质；

   ii) 闭区间套定理在 $\mathbb{F}$ 上成立。