数学分析（1）：第 11 次习题课

刘思齐

1. 利用确界原理证明 Cousin 引理：对闭区间 $I=[a,b]$ 上的任意正值函数 $\delta: I \to \mathbb{R}_{>0}$，存在 I 的带标记分划 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^n$ 满足 $I_i \subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$。

2. 利用 Cousin 引理证明有限覆盖定理：闭区间 $I=[a,b]$ 的任意开覆盖有有限子覆盖。

3. 设 $I=[0,1]$，$K \subseteq I$ 是 Cantor 集（见第一次习题课材料）。定义一个单调函数 $F: I \to \mathbb{R}$ 如下：

   - 若 $x \in K$，根据定义，x 的 3-进制小数中只有 0 和 2，将所有的 2 替换成 1 并将所得结果视为一个 2-进制小数，这样得到的实数就定义为 $F(x)$ 的值。
   - 若 $x \notin K$，则 x 落在一个开区间 $J=(y,z)$ 中，其中 $y,z \in K$，且 $F(y)=F(z)$。根据单调性，我们有 $F(x)=F(y)=F(z)$。

   求证：

   i) 若开区间 $J=(y,z)$ 满足 $J \cap K=\emptyset$，且 $y,z \in K$，则有 $F(y)=F(z)$。

   ii) 函数 $F(x)$ 连续但不 Lipschitz 连续[1]。

   iii) 函数 $F(z)$ 几乎处处可导且导函数 $f(x)=F'(x)$ 几乎处处为零。

   iv) Newton-Leibniz 公式 $F(1)-F(0)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 不成立。

4. 设函数 F 在区间 $I=[a,b]$ 上 Lipschitz 连续，且 $f(x)=F'(x)$ 在 I 上 Riemann 可积[2]，则 Newton-Leibniz 公式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

   （提示：利用 Lebesgue 可积性定理的证明方法先证明 f 几乎处处为零的情况，然后利用先积后微版的微积分基本定理将一般情况转化为 f 几乎处处为零的情况。）

[1] Lipschitz 连续：若存在常数 L 使得对任意的 $x,y \in I$，有 $|F(x)-F(y)|<L|x-y|$ 则称 F 在 I 上 Lipschitz 连续，常数 L 称为 F 的 Lipschitz 常数。

[2] 此处我们承认 Lebesgue 微分定理，于是 Lipschitz 连续的函数一定几乎处处可导。定义函数 f 时，在 F 不可导的点随意规定其值即可。

5. 通过如下步骤证明 π^2 不是有理数：

   i) 设 $f_n(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}$，则 $f_n(x)$ 的各阶导数在 $x=0$、$x=1$ 处的值都是整数。

   ii) 对任意正实数 a，设 $I_n=\int_0^1 \pi\, a^n\, f_n(x)\sin(\pi\, x)\mathrm{d}x$，则当 n 充分大时 $0<I_n<1$。

   iii) 假设 $\pi^2=a/b$，其中 $a,b\in\mathbb{N}$，则 $I_n\in\mathbb{Z}$。

   （注：类似技术还可用来证明 e 的超越性，具体细节可参看菲赫・金哥尔茨的《微积分学教程》或 Goursat 的《数学分析教程》。）

6. 设

$$I_n(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\,t)\cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

   求证：

   i)

$$(n^2-z^2)I_n(z)=n(n-1)I_{n-2}(z).$$

   ii)

$$\sin\frac{\pi\, z}{2}=\frac{\pi\, z}{2}\frac{I_0(z)}{I_0(0)},\quad \cos\frac{\pi\, z}{2}=(1-z^2)\frac{I_1(z)}{I_1(0)}.$$

   iii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n(z)}{I_n(0)}=1.$$

   iv)

$$\sin\frac{\pi\, z}{2}=\frac{\pi\, z}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(2k)^2}\right),\quad \cos\frac{\pi\, z}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(2k+1)^2}\right).$$