数学分析（1）：第 12 次习题课

刘思齐

1. 设 $a>b>0$，定义 $a_0=a$、$b_0=b$，以及

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_n\,b_n}.$$

再定义

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}},$$

求证：

   i) 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$I(a,b)=I(a_n,b_n)$。

   ii) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$，则 $I(a,b)=\frac{\pi}{2A}$。

（注：因为数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 收敛非常快，所以过去的人们用这种方法计算椭圆积分。对于第二类、第三类椭圆积分也有类似的方法。极限 A 叫做正数 a、b 的算术—几何平均，本身也是个有趣的数学对象。）

2. 计算广义积分

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

（提示：利用 $1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$ $(0<x<1)$ 和 Wallis 公式。）

3. 计算广义积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

（提示：考虑 $\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{1}{2})x}\mathrm{d}x$。）

4. 计算无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

（提示：考虑 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\mathrm{d}t$。）

5. 设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto\gamma(t)=(x(t),y(t))$ 是一条连续可导的简单闭曲线。我们课上已经证明，它所围区域的面积 A 和它的长度 L 可按如下公式计算：

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b(x(t)y'(t)-x'(t)y(t))\mathrm{d}t,\quad L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

求证：

i) 面积还可通过如下公式计算：

$$A=\int_a^b x(t)y'(t)\mathrm{d}t,\quad \text{或 } A=-\int_a^b x'(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

ii) 若 $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 连续可导，严格单调增，且 $\phi(\alpha)=a$、$\phi(\beta)=b$，记 $\tilde{x}(s)=x(\phi(s))$、$\tilde{y}(s)=y(\phi(s))$，则有

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(\tilde{x}(s)\tilde{y}'(s)-\tilde{x}'(s)\tilde{y}(s))\mathrm{d}s,\quad L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\tilde{x}'(s)^2+\tilde{y}'(s)^2}\mathrm{d}s.$$

即面积和长度与参数化的选取无关。

iii) 若 $x'(t)^2+y'(t)^2>0$，则称 γ 是正则的。对于正则曲线 γ，定义

$$s(t)=\frac{2\pi}{L}\int_a^t\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t,$$

则 $s(t)$ 连续可导且严格单调，它的逆给出一个满足 ii) 中条件的映射 $\phi:[0,2\pi]\to[a,b]$，于是我们可定义曲线 γ 的一个新参数化 $s\mapsto(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s))$。在此参数化下，我们有 $\sqrt{\tilde{x}'(s)^2+\tilde{y}'(s)^2}=\frac{L}{2\pi}$。

参数 s（或它的正实数倍）叫弧长参数，我们以下假设最初的参数 t 就是弧长参数，且满足 $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=\frac{L}{2\pi}$。

iv)（Wirtinger 不等式）设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是以 2π 为周期的连续可导函数，且满足 $\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=0$，则

$$\int_0^{2\pi}f'(t)^2\mathrm{d}t\geq\int_0^{2\pi}f(t)^2\mathrm{d}t,$$

等号成立当且仅当 $f(t)=a\cos t+b\sin t$。

v) 等周不等式成立：$4\pi A\leq L^2$，等号成立当且仅当 γ 是一个圆。