数学分析（1）：第 2 次习题课

刘思齐

1. 设 $I = [a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间，S 是 I 的开覆盖。求证：

   i) 存在 $\delta > 0$，使得对任意直径小于 δ 的 I 的非空子集 A，即

   $$A \subseteq I, \quad \sup_{x,y \in A} \{|x - y|\} < \delta,$$

   存在 $J \in S$ 使得 $A \subseteq J$。（这个 δ 叫覆盖 S 的一个勒贝格数。该结果称为勒贝格数引理。）

   ii) 利用勒贝格数引理证明有限覆盖定理。

2. 设 $\mathbb{F}$ 是一个全序域，极限点定理在 $\mathbb{F}$ 上成立，求证：

   i) $\mathbb{F}$ 具有阿基米德性质。

   ii) 有限覆盖定理在 $\mathbb{F}$ 上成立。

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$，求证：

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

4. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$，且

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0,$$

   求证：$\{a_n\}$ 无界。

5. 设 $c \in \mathbb{R}$，定义数列 $\{a_n\}$，其中：

   $$a_0 = c, \quad a_{n+1} = a_n^2 + c.$$

   求证：

   i) 当 $c > \frac{1}{4}$ 或 $c < -2$ 时，$\{a_n\}$ 发散。

   ii) 当 $-\frac{1}{4} \le c \le \frac{1}{4}$ 时，$\{a_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   iii) 当 $-2 \le c < -\frac{1}{4}$ 时，$\{a_n\}$ 有界。

   （在复动力系统理论中，使得上述 $\{a_n\}$ 有界的复数 $c \in \mathbb{C}$ 构成的集合即著名的 Mandelbrot 集。我们在这个练习里求出了这个分形集合和实轴的交。）