数学分析（1）：第 8 次习题课

刘思齐

1.（Bernoulli 数）按如下递推公式定义 Bernoulli 数 $\{B_k\}$：

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0 \ (m = 1, 2, \dots).$$

i) 设 $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$，则：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

由此可推出，如果 k 是大于 1 的奇数，则 $B_k = 0$。

ii) 前 n 个自然数的 m 次幂的和可按如下公式计算：

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k (n+1)^{m+1-k}.$$

iii) 证明如下 Taylor 级数：

$$x \cot x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} (2^{2k}),$$

$$x \tan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} (2^{2k} - 2^{4k}),$$

$$\frac{x}{\sin x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} (2 - 2^{2k}),$$

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} (1 - 2k) 2^{2k},$$

$$\log \frac{x}{\sin x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \frac{2^{2k-1}}{k},$$

$$\log \frac{1}{\cos x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \frac{2^{4k-1} - 2^{2k-1}}{k}.$$

iv) 全体自然数的 $2k$ 次方的倒数之和可按如下公式计算：

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

（此问的严格证明需要用到 Fourier 级数。如果不管严格性，只做形式推导，则可从正弦函数的无穷乘积表达式得到。）

2. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 具有 n 阶导数，定义

$$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\quad M_k=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|\ (k=1,\ldots,n).$$

求证：

i) 若 M_0、M_n 为有限数，则 M_k $(k=1,\ldots,n-1)$ 都是有限数，且有：

$$M_k\le 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}}.$$

ii) 当 $n=3$ 时，有更好的结果：

$$M_1\le\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}M_0^{\frac{2}{3}}M_3^{\frac{1}{3}},\quad M_2\le 3^{\frac{1}{3}}M_0^{\frac{1}{3}}M_3^{\frac{2}{3}}.$$

iii) 当 $n=4$ 时，则有：

$$M_1\le\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{4}}M_0^{\frac{3}{4}}M_4^{\frac{1}{4}},\quad M_2\le\frac{2}{\sqrt{3}}M_0^{\frac{2}{4}}M_4^{\frac{2}{4}},\quad M_3\le(6)^{\frac{1}{4}}M_0^{\frac{1}{4}}M_4^{\frac{3}{4}}.$$

（此问较难，需要求解二元函数的极值问题，下学期才会讲到。不过如果熟悉均值不等式的相关技巧的话也可以用初等方法求出。）

3.（n 阶微分形式不变性）设 $E=(a,b)$、$D=(c,d)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的两个开区间，$g:D\to E$、$f:E\to\mathbb{R}$ 是两个 n 阶可导的函数，$t_0\in D$, $x_0=g(t_0)\in E$。求证：

$$T_n(f\circ g,t_0;t)=T_n(T_n(f,x_0;g(t)),t_0;t).$$

4. 设函数 f 在 x 附近具有收敛的 Taylor 级数，记 D 为求导算子，即 $D(f(x))=f'(x)$，则 f 的 Taylor 级数可写为

$$f(x+t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D^n(f(x))=\exp(t\,D)(f(x)).$$

现在考虑如下算子 $\delta(f(x))=xf(x)+f'(x)$，求 $\exp(t\,\delta)(f(x))$。