数学分析（1）：第 9 次习题课

刘思齐

这次的主题是椭圆积分，以下内容来自卓里奇《数学分析（第一卷）》的第五章、第 §7 节的练习 5。

a) 任何实系数三次多项式都有实根 x_0，且替换 $x - x_0 = t^2$ 导致形如 $t^2(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e)$ 的多项式，其中 $a \neq 0$。

b) 函数 $R(x, \sqrt{P(x)})$（其中 $R(u, v)$ 是有理函数，而 P 是三次或四次多项式）可以化成 $R_1(t, \sqrt{at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e})$。

c) 四次多项式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 可表成乘积

$$a(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2),$$

且经替换 $x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + 1}$ 总可化成

$$\frac{(M_1 + N_1t^2)(M_2 + N_2t^2)}{(\gamma t + 1)^2}.$$

d) 函数 $R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})$ 经替换 $x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + 1}$ 可化成

$$R_1(t, \sqrt{A(1 + m_1t^2)(1 + m_2t^2)}).$$

e) 函数 $R(x, \sqrt{y})$ 可以表成和式 $R_1(x, y) + \frac{R_2(x,y)}{\sqrt{y}}$，其中 R_1 和 R_2 是有理函数。

f) 任何有理函数都可以表成偶的和奇的两个有理函数之和。

g) 若有理函数 $R(x)$ 是偶的，则有 $r(x^2)$ 的形式，而若它是奇的，则有 $x\,r(x^2)$ 的形式，其中 $r(x)$ 是有理函数。

h) 任何函数 $R(x, \sqrt{y})$ 都可化为

$$R_1(x, y) + \frac{R_2(x^2, y)}{\sqrt{y}} + \frac{R_3(x^2, y)}{\sqrt{y}}x.$$

i) 任何 $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$ 型的积分（其中 $P(x)$ 是四次多项式）都可以化成积分

$$\int \frac{r(t^2)dt}{\sqrt{A(1 + m_1t^2)(1 + m_2t^2)}}.$$

j) 如果 $|m_1| > |m_2| > 0$，那么以下四种变换

$$\sqrt{|m_1|}t = x, \quad \sqrt{|m_1|}t = \sqrt{1-x^2},$$
$$\sqrt{|m_1|}t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{|m_1|}t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

中的一种可把积分 $\int \frac{r(t^2)dt}{\sqrt{A(1+m_1t^2)(1+m_2t^2)}}$ 化为

$$\int \frac{\tilde{r}(x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

其中 $0 < k < 1$，而 $\tilde{r}$ 是有理函数。

k) 求以下积分的递推公式：

$$I_n = \int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2-a)^m\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

l) 任何椭圆积分

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$$

（其中 P 是四次多项式）都可以化为以下三种标准椭圆积分之一

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

再加上一个初等函数。

m) 把 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ 化成标准椭圆积分。

n) 把 $\int \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$ 化成标准椭圆积分。