数学分析（2）：第 11 次习题课

刘思齐

先约定一些记号：

- $\Omega^k(M)$: 流形 M 上的 k-阶微分形式全体构成的线性空间
- $Z^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \mathrm{d}\omega = 0\}$
- $B^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \exists \eta \in \Omega^{k-1}(M), \text{ s.t. } \omega = \mathrm{d}\eta\}$
- $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$ （因为 $\mathrm{d}^2 = 0$，所以 $B^k(M) \subseteq Z^k(M)$。）
- $[\omega] := \omega + B^k(M) \in H^k(M)$

商空间 $H^k(M)$ 叫做 M 的第 k 个 de Rham 上同调群。

1. 设 $f: M \to N$ 是从流形 M 到流形 N 的光滑映射，$f^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ 是其拉回映射。求证：

i) $f^*(Z^k(N)) \subseteq Z^k(M)$;

ii) $f^*(B^k(N)) \subseteq B^k(M)$;

iii) 定义 $\hat{f}: H^k(N) \to H^k(M), [\omega] \mapsto [f^*\omega]$，则这个定义是好的；

iv) 设 $g: L \to M$ 是另一个光滑映射，则 $(f \circ g)\hat{} = \hat{g} \circ \hat{f}$；

v) 若 M 和 N 微分同胚，则 $H^k(M)$ 和 $H^k(N)$ 同构。

映射 $\hat{f}$ 也称为 f 的拉回映射。

解答： i)、ii) 都是 $\mathrm{d} \circ f^* = f^* \circ \mathrm{d}$ 的简单推论。iii) 利用 i)，说明 $f^*\omega \in Z^k(M)$，利用 ii) 说明 $[f^*\omega]$ 不依赖于 ω 的选取。iv) 是 $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ 的简单推论。v) 设 $f: M \to N$、$g: N \to M$ 满足 $f \circ g = \mathrm{id}_N$、$g \circ f = \mathrm{id}_M$，于是

$$\hat{g} \circ \hat{f} = \hat{\mathrm{id}}_N = \mathrm{id}_{H^k(N)}, \quad \hat{f} \circ \hat{g} = \hat{\mathrm{id}}_M = \mathrm{id}_{H^k(M)},$$

所以 $H^k(M)$ 和 $H^k(N)$ 同构。 □

2. 设 M 是一个流形，$\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是 M 上的一个图册。记 $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$，$\tilde{U}_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}$，$\tilde{V}_\alpha = V_\alpha \times \mathbb{R}$，$\tilde{\phi}_\alpha = \phi_\alpha \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$，则 $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\phi}_\alpha : \tilde{V}_\alpha \to \tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是 $\tilde{M}$ 上的一个图册。

i) 设 $\omega \in \Omega^k(\tilde{M})$，它在地图 $\tilde{\phi}_\alpha : \tilde{V}_\alpha \to \tilde{U}_\alpha$ 上的坐标形式为：

$$\omega_\alpha = \omega^{(1)}_{i_1\cdots i_k}(x,t)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} + \omega^{(2)}_{j_1\cdots j_{k-1}}(x,t)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_{k-1}},$$

其中 $x_1, \ldots, x_d$ 是 V_α 上的坐标，t 是 $\mathbb{R}$ 上的坐标（求和号已省略）。定义 $\tilde{V}_\alpha$ 上的 $k-1$ 阶微分形式如下：

$$(K\,\omega)_\alpha = \left(\int_{t_0}^{t} \omega^{(2)}_{j_1\cdots j_{k-1}}(x,t)\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_{k-1}},$$

其中 t_0 是 $\mathbb{R}$ 中固定的一点（例如可取 $t_0 = 0$）。求证：$\{(K\,\omega)_\alpha\}$ 满足图册 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的粘合条件，于是定义了 $\tilde{M}$ 上的一个整体 $k-1$ 阶微分形式，记为 $K\,\omega$。运算 $K : \Omega^k(\tilde{M}) \to \Omega^{k-1}(\tilde{M})$ 叫做同伦算子。

ii) 定义如下映射

$$\begin{aligned} \pi :&\tilde{M} \to M, \quad (x,t) \mapsto x, \\ s :&M \to \tilde{M}, \quad x \mapsto (x,t_0), \end{aligned}$$

设 $\pi^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(\tilde{M})$、$s^* : \Omega^k(\tilde{M}) \to \Omega^k(M)$ 为相应的拉回映射。求证：

$$\begin{aligned} s^* \circ \pi^* =&\mathrm{id}, \\ \pi^* \circ s^* =&\mathrm{id} - K \circ \mathrm{d} - \mathrm{d} \circ K. \end{aligned}$$

iii) 设 $\hat{\pi} : H^k(M) \to H^k(\tilde{M})$、$\hat{s} : H^k(\tilde{M}) \to H^k(M)$ 为相应的拉回映射。求证：

$$\hat{s} \circ \hat{\pi} = \mathrm{id}, \quad \hat{\pi} \circ \hat{s} = \mathrm{id}.$$

iv) 求证：$H^k(M)$ 与 $H^k(\tilde{M})$ 同构。

v) 求证：

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0; \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

解答： i) 根据图册 $\tilde{\mathcal{A}}$ 的定义，它的转移函数 $\tilde{\phi}_{\alpha\beta}$ 与图册 $\mathcal{A}$ 的转移函数 $\phi_{\alpha\beta}$ 是完全一样的，特别地，它是和 t 无关的，由此不难验证

$$\tilde{\phi}^*_{\alpha\beta}(K\,\omega)_\beta = K(\tilde{\phi}^*_{\alpha\beta}\omega_\beta) = (K\,\omega)_\alpha,$$

所以 $\{(K\,\omega)_\alpha\}$ 定义了一个整体微分形式。

ii) 因为 $\pi\circ s = \mathrm{id}$, 所以显然有 $s^*\circ\pi^* = \mathrm{id}$。下证 $K\circ\mathrm{d}+\mathrm{d}\circ K = \mathrm{id}-\pi^*\circ s^*$。由 K 的定义不难算出:

$$
\begin{aligned}
d(K\,\omega) =&\omega^{(2)}_{j_1\cdots j_{k-1}}(x,t)\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_{k-1}}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\int_{t_0}^{t}\omega^{(2)}_{j_1\cdots j_{k-1}}(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_\ell\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_{k-1}},\\
K(d\,\omega) =&K\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\omega^{(1)}_{i_1\cdots i_k}(x,t)\,\mathrm{d}x_\ell\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}+\right.\\
&\frac{\partial}{\partial t}\omega^{(1)}_{i_1\cdots i_k}(x,t)\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}+\\
&\left.\frac{\partial}{\partial x_\ell}\omega^{(2)}_{j_1\cdots j_{k-1}}(x,t)\,\mathrm{d}x_\ell\wedge\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_{k-1}}\right)\\
=&\left(\omega^{(1)}_{i_1\cdots i_k}(x,t)-\omega^{(1)}_{i_1\cdots i_k}(x,t_0)\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}+\\
&\quad-\left(\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\omega^{(2)}_{j_1\cdots j_{k-1}}(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_\ell\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_{k-1}}.
\end{aligned}
$$

到含参积分部分我们会证明上面对 t 积分和对 x_ℓ 求导这两个运算是可以交换顺序的，所以，将上面两式相加不难得到所求恒等式。

iii) 因为 $\pi\circ s = \mathrm{id}$, 所以显然有 $\hat{s}\circ\hat{\pi} = \mathrm{id}$。下证 $\hat{\pi}\circ\hat{s} = \mathrm{id}$。设 $\omega\in Z^k(\tilde{M})$，则有

$$\pi^*(s^*(\omega)) = \omega - K(d\,\omega) - d(K\,\omega) = \omega - d(K\,\omega),$$

于是

$$\hat{\pi}\circ\hat{s}([\omega]) = [\pi^*(s^*(\omega))] = [\omega - d(K\,\omega)] = [\omega].$$

iv) 由 iii) 显然。v) 由 iv)，$H^k(\mathbb{R}^n)$ 与 $H^k(pt)$ 同构，其中 pt 表示由一个点构成的 0 维流形。由维数可知 $H^{>0}(pt)\cong 0$；由连通性可知 $H^0(pt)\cong\mathbb{R}$. □

3.

i) 设 $f, g : M\to N$ 是两个光滑映射，它们叫做同伦的，如果存在光滑映射

$$F : M\times[0,1]\to N,\quad (x,t)\mapsto F(x,t),$$

使得对任意的 $x\in M$，有 $F(x,0) = f(x)$、$F(x,1) = g(x)$。若 f、g 同伦，我们记 $f\sim g$。求证：若 $f\sim g$，则 $\hat{f} = \hat{g}$。

ii) 流形 M、N 叫同伦的，如果存在映射

$$f : M\to N,\quad g : N\to M,$$

使得 $f\circ g\sim\mathrm{id}_N$、$g\circ f\sim\mathrm{id}_M$。若 M、N 同伦，我们记 $M\sim N$。求证：若 $M\sim N$，则 $H^k(M)\cong H^k(N)$。

iii)（Poincare 引理）流形 M 叫可缩的，如果 $M \sim pt$，这里 pt 表示由一个点构成的 0 维流形。求证：若 M 可缩，则

$$H^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k=0; \\ 0, & k>0. \end{cases}$$

iv) 流形 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 叫星形的，如果存在一点 $x_0 \in M$，使得对任意一点 $x \in M$，以 x_0、x 为端点的线段 $I_{x_0,x} \subseteq M$。求证：星形流形是可缩的。

v) 求证：$B_r^n(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$ 是星形的。

解答： i) 记 $\tilde{M} = M \times [0,1]$，定义映射

$$\begin{aligned} \pi :& \tilde{M} \to M, \quad (x,t) \mapsto x, \\ s_0 :& M \to \tilde{M}, \quad x \mapsto (x,0), \\ s_1 :& M \to \tilde{M}, \quad x \mapsto (x,1), \end{aligned}$$

于是 $f = F \circ s_0$、$g = F \circ s_1$，所以

$$\hat{f} = \hat{s}_0 \circ \hat{F}, \quad \hat{g} = \hat{s}_1 \circ \hat{F}.$$

另一方面，利用与第 2 题完全一样的方法可以证明 $\hat{s}_0 = \hat{s}_1 = \hat{\pi}^{-1}$，所以 $\hat{f} = \hat{g}$。

ii) 由 i) 知 $\hat{g} \circ \hat{f} = \mathrm{id}$、$\hat{f} \circ \hat{g} = \mathrm{id}$，所以 $H^k(M) \cong H^k(N)$。

iii) 由 ii) 知 $H^k(M) \cong H^k(pt)$，下同第 2 题的 v)。

iv) 取 $pt = \{x_0\}$，定义

$$\begin{aligned} & f : pt \to M, \quad x_0 \mapsto x_0, \\ & g : M \to pt, \quad x \mapsto x_0, \\ & F : M \times [0,1] \to M, \quad (x,t) \mapsto (1-t)\,x + t\,x_0, \end{aligned}$$

则 $g \circ f = \mathrm{id}_{pt}$，$F(\cdot,0) = \mathrm{id}_M$，$F(\cdot,1) = f \circ g$，所以 $f \circ g \sim \mathrm{id}_M$，于是 $M \sim pt$。

v) 显然。 □

（注：关于 Poincare 引理，以及微分形式在关于流形的拓扑性质的研究中的应用，可参看 Bott 和 Tu 的《Differential Forms in Algebraic Topology》（GTM 82）。）