数学分析（2）：第 5 次习题课

刘思齐

1. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$f: D \to D$ 连续可微。若 f 满足对任意的 $x \in D$，$f(f(x)) = f(x)$。求证：$M = f(D)$ 是一个流形。

解答： 设 x_0 是 M 中的任意一点，根据秩定理，我们只需证明存在 x_0 在 D 中的开邻域 U，使得 f 在 U 上的秩是一个与 x_0 无关的常数。

设 $A = f'(x_0)$、$\mathrm{rank}(A) = k$。因为 $x_0 \in M$，所以存在 $y_0 \in D$，使得 $x_0 = f(y_0)$，于是 $f(x_0) = f(f(y_0)) = f(y_0) = x_0$。根据条件 $f(f(x)) = f(x)$ 以及复合函数求导法则，我们有 $A^2 = A$，于是

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(I - A) = n.$$

当 x_0 变为它附近的 $x \in M$ 时，上式仍然成立（需将 A 替换为 $\mathrm{rank} f'(x)$），而两个秩只能增加不能减少，所以对任意的 $x \in M$ 都有 $\mathrm{rank}(f'(x)) = k$（这里还用到 M 是连通的，因为它是连续函数 f 在连通集合 D 上的像）。

另一方面，取 x_0 的充分小的邻域 U 使得对任意的 $x \in U$，有 $\mathrm{rank}(f'(x)) \geq \mathrm{rank}(f'(x_0))$。根据条件 $f(f(x)) = f(x)$ 以及秩的性质，我们有

$$\mathrm{rank}(f'(x)) = \mathrm{rank}(f'(f(x))f'(x)) \leq \mathrm{rank}(f'(f(x))) = k,$$

所以对任意的 $x \in U$ 都有 $\mathrm{rank}(f'(x)) = k$。 □

2. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$f \in C^2(D)$。求证：f 是凸函数当且仅当对于任意的 $x \in D$，f 在 x 处的 Hesse 矩阵 $H_f(x)$ 是半正定的。特别地，如果对于任意的 $x \in D$，$H_f(x)$ 正定，则 f 严格凸。反之，如果 f 严格凸，你能否举出一个例子，其 $H_f(x)$ 不是处处正定的?

解答： 先证充分性：设 $x, y \in D$，根据 Lagrange 余项的 Taylor 公式，我们有

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T H_f(\xi)(y - x),$$

其中 ξ 是连接 x, y 的线段上的某一点。若 $H_f(\xi)$ 半正定，则 $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$，所以 f 凸。若正定，则严格凸。

再证必要性：假设在某点 x 处 $H_f(x)$ 不是半正定的，于是存在 $h \in \mathbb{R}^n$ 使得 $h^T H_f(x) h < 0$。考虑 Peano 型余项的 Taylor 公式：

$$f(x + t\,h) = f(x) + f'(x)(t\,h) + \frac{t^2}{2} h^T H_f(x) h + o(t^2),$$

当 t 充分小时，可使后两项之和小于零，于是 $f(x+th) > f(x) + f'(x)(th)$，这与 f 凸矛盾，

最后，严格凸但不处处正定的例子：$f(x) = x^4$。它显然严格凸，但在 $x_0 = 0$ 时，二阶导数为零。 □

3. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$f \in C^2(D)$ 满足对于任意的 $x \in D$，$H_f(x)$ 正定。设 $x_0 \in D$ 是 f 的一个局部极小点。求证：

i) x_0 是 f 在 D 内的唯一整体极小点；

ii) 设 $q \in f(D)$ 不是 f 的最小值，则 $M = f^{-1}(q)$ 是一个超曲面。

解答： i) 假设有另一个点 x_1 满足 $f(x_1) \leq f(x_0)$。根据前一题，f 严格凸，于是对任意的 $t \in (0,1)$，有

$$f((1-t)x_1 + tx_0) < f(x_0) + (1-t)(f(x_1) - f(x_0)).$$

当 t 充分接近 1 时，$(1-t)x_1 + tx_0$ 充分靠近 x_0，因为 x_0 是局部极小，所以应有 $f(x_0) \leq f((1-t)x_1 + tx_0)$。另一方面，$(1-t)(f(x_1) - f(x_0)) \leq 0$，所以我们得到 $f(x_0) < f(x_0)$，矛盾。

ii) 只需说明 q 是正则值，或者等价地，只需说明 M 中的点不是驻点。根据 i)，f 在 D 中的驻点只有 x_0，而 $f(x_0) \neq q$。 □

4. （Legendre 变换）设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域，$f \in C^2(D)$ 满足对于任意的 $x \in D$，$H_f(x)$ 正定。

i) 求证：对于每一点 $x_0 \in D$，存在它的开邻域 U，以及 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 V，使得映射

$$\phi : U \to V, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

是一个微分同胚，其中 $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$。

ii) 在 V 上定义函数

$$\tilde{f} : V \to \mathbb{R}, \quad (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i - f(x_1, \ldots, x_n),$$

其中 $(x_1, \ldots, x_n) = \phi^{-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$，计算 $\tilde{f}$ 的 Hess 矩阵 $H_{\tilde{f}}(\xi)$，并证明 $H_{\tilde{f}}(\xi)$ 是正定的。

iii) 上述变换 $(x, f) \mapsto (\xi, \tilde{f})$ 叫做 Legendre 变换。求证：若对 $(\xi, \tilde{f})$ 再做一次 Legendre 变换则回到 (x, f)。

解答： i) ϕ 的 Jacobi 行列式就是 f 的 Hesse 矩阵。因为 H_f 正定，所以非退化，于是根据反函数定理，ϕ 是局部微分同胚。

ii) 直接计算可得

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_k} = x_k + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial x_i}{\xi_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = x_k,$$

于是，

$$H_{\tilde{f}}(\xi) = \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \right) = \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \right) = \left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right)^{-1} = H_f(x)^{-1}.$$

因为 $H_f(x)$ 正定，所以 $H_{\tilde{f}}(\xi)$ 正定（若对称矩阵 A 正定，则对于任意的 x，$x^T A^{-1} x = x^T (A^{-1})^T A A^{-1} x = (A^{-1}x)^T A (A^{-1}x) > 0$）。

iii) 前面已经证明过 $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi_k} = x_k$，所以结论几乎是显然的。 □

5. 构造一个光滑函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，使得它在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的驻点，且这个驻点是极大值点，但不是整个 $\mathbb{R}^2$ 上的最大值点。

解答: 设

$$f(x,y) = 2\arctan^3 x - 2\arctan^2 x + \frac{1}{8}\arctan x \arctan y - \frac{1}{64}\arctan^2 y.$$

驻点满足的方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{48u^2 - 32u + v}{8(1+x^2)} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{4u - v}{32(1+y^2)} = 0, \end{aligned}$$

其中 $u = \arctan x$、$v = \arctan y$。从中可解出 $(u,v) = (0,0)$ 或 $(\frac{7}{12}, \frac{7}{3})$，但 $\frac{7}{3} > \frac{\pi}{2}$，所以唯一的驻点就是 $(x,y) = (0,0)$。

接下来可进一步计算出驻点 $(0,0)$ 处的 Hesse 矩阵:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix},$$

它是正定的，所以 $(0,0)$ 是局部极大值点，相应的局部极大值为 $f(0,0) = 0$。

最后，比如 $f(\tan 1, \tan 1) = \frac{7}{64} > 0$，所以 0 不是整个定义域上的最大值。事实上，在这个例子中，最大值是取不到的。 □