数学分析（2）：第 8 次习题课

刘思齐

1. 设 $A > 0$。

   i) 求证：
$$\left(\int_0^A \exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{A^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta.$$
（提示：在 $D = [0, A] \times [0, A]$ 上用极坐标计算左边的积分。）

   ii) 求证：
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

解答： i) 根据提示在极坐标下化成累次积分，先把 r 积掉即得结论。ii) 第 i) 条右边的积分以 $\frac{\pi}{4}e^{-A^2}$ 为上界，所以只需令 $A \to \infty$。 □

2. （球和球壳的 Newton 势）设 A 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 Jordan 可测有界闭区域，对于 $x \in \mathbb{R}^3 \backslash A$，定义
$$\Phi_A(x) = -\int_A \frac{\mathrm{d}y}{\|y - x\|}.$$

   i) 设 $R > 0$，$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \le R\}$，求 $\Phi_A(x)$；

   ii) 设 $R > r > 0$，$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r \le \|x\| \le R\}$，求 $\Phi_A(x)$。

解答： 根据对称性，不妨设 $x = (0, 0, a)$，然后在柱坐标下化成累次积分即可。注意积分的时候要先对柱坐标的 ρ 积分，然后再积 z。

i)
$$\Phi_A(x) = -\frac{\mu(A)}{\|x\|}.$$
这一结果表明球体的引力等效于球心处同质量质点的引力。

ii)
$$\Phi_A(x) = \begin{cases} -\frac{\mu(A)}{\|x\|}, & \|x\| > R; \\ -2\pi(R^2 - r^2), & \|x\| < r. \end{cases}$$
这一结果表明球壳内部没有引力，外部的情况与第一条相同。 □

3. （Newton-Gregory 猜想）

i) 设 S_1 是 $\mathbb{R}^3$ 中半径为 R 的球，球心为 O；S_2 是半径为 r $(r < R)$ 的球，球心在 S_1 上；C 是以 O 为顶点的与 S_2 相切的圆锥。求 S_1 被 C 截下来的球冠的面积。

ii) 设 K_3 是与一个球相切且互不重叠的、和它等大的球的个数。求证：$K_3 \leq 14$。

解答： i) 在球坐标下化成累次积分可得：

$$S = 2\,\pi\, R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}\right).$$

ii) 取 $R = 1$、$r = 1/2$ 得

$$K_3 \leq \frac{4\,\pi}{S} = \frac{2}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 14.9282\cdots,$$

所以 $K_3 \leq 14$。

（注：这类问题叫做 kissing number problem。对于三维的情况，Newton 猜测 $K_3 = 12$，Gregory 猜测 $K_3 = 13$。这一问题直到 1953 年才由 Schütte 和 van der Waerden 解决，正确答案应该是 12。

对于更高维的情况，直到 2008 年人们才证出 $K_4 = 24$，另外还知道：

$$40 \leq K_5 \leq 44, \quad 72 \leq K_6 \leq 78, \quad 126 \leq K_7 \leq 134.$$

但是，在 8 维，人们很早就知道 $K_8 = 240$，因为 8 维和 2 维比较像，有一种堆积方法使得球和球之间没有任何缝隙。另一个类似的维数是 24，此时有 $K_{24} = 196560$。8 维和 24 维的这些球的构型与有限单群、顶点代数、弦理论等数学、物理分支都有联系。） □

4.

i)（Pappus-Guldinus 定理）设 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$，$t \mapsto (a(t), b(t))$ 的像集是一条连续可微的简单曲线 C，且 $a(t) \geq 0$。设曲面 S 为

$$x(t, \phi) = a(t) \cos\phi, \quad y(t, \phi) = a(t) \sin\phi, \quad z(t, \phi) = b(t),$$

其中 $a \leq t \leq b$，$0 \leq \phi \leq 2\pi$。求证：

$$\mu(S) = (2\,\pi\, R)\ \mu(C),$$

其中 $\mu(S)$ 是 S 的面积，$\mu(C)$ 是 C 的长度，R 是 C 的重心的横坐标。

ii) 当 C 由一个连续可微函数的图像给出时，即 $a(t) = f(t)$，$b(t) = t$，求 $\mu(S)$ 的计算公式。

iii)（极小曲面）设 $f(a)=f(b)=H$，你能否猜到什么样的 f 会使 $\mu(S)$ 最小?

解答: i)、ii) 可参看上册 7.1 节。iii)

$$S=2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\mathrm{d}t$$

若忽略因子 2π，然后将被积函数中的 $f(t)$ 理解为重力势能 mgh 中的 h、将 $\sqrt{1+f'(t)^2}\mathrm{d}t$ 理解为线元的质量 m，则 S 就是 f 的图像的重力势能（$g=1$）。使 S 最小的 f 应当是所谓的悬链线，即两端固定、质量均匀、无弹性的线在均匀重力场中所形成的曲线。

（注：如果看过卓里奇的 10.6.3 节，也可直接用 Euler-Lagrange 方程求出 S 取极值的条件：

$$f''f-f'^2=1,$$

设法求解这个微分方程，结果为

$$f(t)=h\cosh\frac{2t-(a+b)}{2h},$$

其中 h 是方程

$$H=h\cosh\frac{b-a}{2h}$$

的根。当 $b-a$ 很小时，这个方程总有两个根，其中一个会给出使 S 取极小值并且稳定的 f。但是当 $b-a$ 比较大时，上述方程可能没有根，于是此时不存在极小曲面。

这个问题可以很好地用两个铁圈和肥皂水来演示。当铁圈离得较近时，它们之间可以形成一个肥皂泡，它的形状正是我们求出的极小曲面。但是当铁圈之间的距离变大时，肥皂泡会突然爆掉，爆掉的地方就是上述方程从有解变成无解的那个临界点。） □

5. 设 $R>r>0$，考虑环面 T:

$$x=(R+r\cos\theta)\cos\phi,\quad y=(R+r\cos\theta)\sin\phi,\quad z=r\sin\theta.$$

根据微分几何知识可以算出，环面上一点处的两个主曲率为:

$$\kappa_1=\frac{\cos\theta}{R+r\cos\theta},\quad \kappa_2=\frac{1}{r}.$$

设 $K=\kappa_1\kappa_2$, $H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$，分别叫做 Gauss 曲率和平均曲率。

i)（Gauss-Bonnet 公式）求积分 $\chi=\int_T K\mathrm{d}\sigma$（即课堂上讲的以被积函数为密度的“质量”）；

ii)（Willmore 能量）求积分 $W=\int_T H^2\mathrm{d}\sigma$（同上）；

iii)（Willmore 猜想）不妨设 $r=1$，问：当 R 为多少时，W 最小？最小值是多少?

解答： i) 注意 $\sqrt{\det J^T J} = r(R + r\cos\theta)$，于是

$$\chi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{r(R + r\cos\theta)} r(R + r\cos\theta)\mathrm{d}\theta = 0.$$

（注：根据 Gauss-Bonnet 定理，闭曲面上 Gauss 曲率的积分给出欧拉示性数 $\chi = 2 - 2g$，其中 g 叫做曲面的亏格，表示曲面上洞的个数。环面的亏格为 1，于是 $\chi = 0$。）

ii) 计算过程与第 i) 类似，结果为

$$W = \frac{\pi^2 R^2}{r\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

iii) 这是一个简单的一元函数极值问题，结果为 $R = \sqrt{2}$，此时 $W = 2\pi^2$。

（注：$\mathbb{R}^3$ 中任何闭曲面的 Willmore 能量都 $\geq 4\pi$，取等号当且仅当曲面是球面。1965 年 Willmore 猜想："如果曲面的亏格为 1，则其 Willmore 能量 $\geq 2\pi^2$，取等号当且仅当曲面是第 iii) 问中确定的那个环面。"这个猜想在 2012 年由 Fernando Codá Marques 和 André Neves 证明。）

□