重积分换元公式

刘思齐

在这份讲义中，我们给出如下定理的证明。

定理 *设 D_x、D_t 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个 Jordan 可测闭区域，$\phi: D_t \to D_x$ 是连续可微的微分同胚，设 $\psi: D_t \to \mathbb{R}$ 为 $t \mapsto |\det \phi'(t)|$，$f: D_x \to \mathbb{R}$，则有：*

i) $f \in R(D_x) \Leftrightarrow f \circ \phi \cdot \psi \in R(D_t)$；

ii) $f \in R(D_x) \Rightarrow \int_{D_x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{D_t} f(\phi(t))\psi(t)\mathrm{d}t$。

第 i) 条的证明是简单的，只需利用 Lebesgue 可积性定理即可。

证明：i) 只需证明必要性，因为充分性可由必要性方向应用于微分同胚 ϕ^{-1} 和函数 $f \circ \phi \cdot \psi$ 得到。根据定理的条件，D_t 紧、ψ 连续，所以 ψ 在 D_t 上有界。$f \in R(D_x)$ 说明 f 有界，于是 $f \circ \phi \cdot \psi$ 也有界。根据复合函数的连续性，若 f 在 $x \in D_x$ 处连续，则 $f \circ \phi$ 在 $t = \phi^{-1}(x)$ 处也连续，所以 $f \circ \phi$ 的不连续点一定是 $\phi^{-1}(D(f))$ 的子集，其中 $D(f)$ 表示 f 的不连续点集。根据 Lebesgue 可积性判据，$D(f)$ 是零测集；因为 ϕ^{-1} 是连续可微的，所以 $\phi^{-1}(D(f))$ 也是零测集，于是 $f \circ \phi$ 的不连续点构成一个零测集，所以 $f \circ \phi$ Riemann 可积，再乘以连续函数 ψ 后当然还是 Riemann 可积的。 □

第 ii) 条则较难，我们需要准备一些引理。

引理 1 *若能证明*

$$\mu(D_x) \leq \int_{D_t} \psi(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

则定理的第 ii) 条成立，其中 μ 表示一个 Jordan 可测集的 Jordan 测度。

证明：换元公式关于 f 是线性的，所以只要证明它对 f_1、f_2 成立，就能知道它对 $f = f_1 + f_2$ 也成立。特别地，任何函数 f 可分解为

$$f = f_+ - f_-,\ \text{其中}\ f_\pm = \frac{|f| \pm f}{2},$$

而 $f_\pm \geq 0$，所以我们不妨假设 $f \geq 0$。

取一个闭区间 I 使得 $D_x \subseteq I$。因为 D_x Jordan 可测且紧，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在开区间 $I_1, \ldots, I_N$，使得

$$\partial D_x \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_N,\ \text{且}\ \sum_{\alpha=1}^{N} \mu(I_\alpha) < \frac{\varepsilon}{M_f},$$

其中 $M_f=\sup\{f(x)\mid x\in D_x\}$。延长 $I_1,\ldots,I_N$ 的边界可得 I 的一个网格分划，记为 P_0。

对 I 的任意分划 P，记 $\tilde{P}=P+P_0$ 是 P 和 P_0 的公共加细，则 $\tilde{P}$ 中的小区间可分为三类:

$$\begin{aligned}
&P_1=\{J\in\tilde{P}\mid \exists\alpha\in\{1,\ldots,N\},\text{s.t. } J\subseteq I_\alpha\},\\
&P_2=\{J\in\tilde{P}\backslash P_1\mid J\subseteq D_x\},\\
&P_3=\{J\in\tilde{P}\backslash P_1\mid J\nsubseteq D_x\}.
\end{aligned}$$

设 $\tilde{f}:I\to\mathbb{R}$ 是 f 在 I 上的零延拓。对于 $J\in\tilde{P}$，定义 $f_J=\inf\{\tilde{f}(x)\mid x\in J\}$，则有

$$\begin{aligned}
&\underline{S}(\tilde{f},P)\le\underline{S}(\tilde{f},\tilde{P})=\left(\sum_{J\in P_1}+\sum_{J\in P_2}\right)f_J\mu(J)\\
\le&M_f\sum_{\alpha=1}^{N}\mu(I_\alpha)+\sum_{J\in P_2}\int_J f_J\mathrm{d}x\\
<&\varepsilon+\sum_{J\in P_2}\int_{\phi^{-1}(J)}f_J\psi(t)\mathrm{d}t\\
\le&\varepsilon+\int_{\phi^{-1}\left(\bigcup\limits_{J\in P_2}J\right)}f(\phi(t))\psi(t)\mathrm{d}t\\
\le&\varepsilon+\int_{D_t}f(\phi(t))\psi(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

对上式先取 $\|P\|\to 0$ 的极限、再取 $\varepsilon\to 0$ 的极限得:

$$\int_{D_x}f(x)\mathrm{d}x\le\int_{D_t}f(\phi(t))\psi(t)\mathrm{d}t.$$

最后，再对微分同胚 ϕ^{-1} 和函数 $f\circ\phi\cdot\psi$ 应用上式，得:

$$\int_{D_t}f(\phi(t))\psi(t)\mathrm{d}t\le\int_{D_x}f(\phi(\phi^{-1}(x)))\psi(\phi^{-1}(x))|\det(\phi^{-1})'(x)|\mathrm{d}x.$$

根据反函数定理，上式右端正是 $\int_{D_x}f(x)\mathrm{d}x$，于是换元公式成立。 □

引理 2 *若 ϕ 是可逆线性变换，记 $A=|\det\phi'|$，则*

$$\mu(D_x)=A\,\mu(D_t).$$

证明: 当 D_t 是一个闭区间时，我们已经用 Fubini 定理证明过这个公式。若考虑 $\phi^{-1}:D_x\to D_t$，则当 D_x 是闭区间时上式仍成立。

对于一般的 Jordan 可测闭区域 D_x，取闭区间 I 使得 $D_x\subseteq I$。对 I 的任一分划 P，P 中的小区间可分为三类:

$$\begin{aligned}
&Q_1=\{J\in P\mid J\cap\partial D_x\neq\emptyset\},\\
&Q_2=\{J\in P\mid J\subseteq D_x\},\\
&Q_3=\{J\in P\mid J\cap D_x=\emptyset\}.
\end{aligned}$$

设 $\chi: I \to \mathbb{R}$ 是 D_x 的指示函数，则

$$\underline{S}(\chi, P) = \sum_{J \in Q_2} \mu(J), \quad \overline{S}(\chi, P) = \sum_{J \in Q_1 \cup Q_2} \mu(J).$$

注意 $\mu(J) = A\,\mu(\phi^{-1}(J))$，所以有

$$A^{-1}\,\underline{S}(\chi, P) = \sum_{J \in Q_2} \mu(\phi^{-1}(J)) = \mu\left(\phi^{-1}\left(\bigcup_{J \in Q_2} J\right)\right) \le \mu(D_t).$$

对上式取 $\|P\| \to 0$ 的极限可得 $\mu(D_x) \le A\,\mu(D_t)$。对 $\overline{S}(\chi, P)$ 做类似计算可得 $\mu(D_x) \ge A\,\mu(D_t)$，于是等号成立。 □

在接下来的证明中，我们将用一些立方体覆盖所关心的区域，然后考虑立方体在微分同胚下的体积变化。这种计算在以前证明连续可微映射将零测集映为零测集时曾经做过。不过那时候对体积变化的估计比较粗糙，因为当时只要证明像集的体积不大于原来立方体的体积乘以一个固定的常数倍就够了，这个常数倍数不做到最优也能保证零测性质成立。但是在接下来的证明中，我们要证的不是零测性质，而是估计测度的大小，这时就需要更精细的体积估计。为了做到这一点，需要将原来而欧式范数换成无穷范数。

定义 对于 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，定义 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$。

练习

i) 求证：$\|\cdot\|_\infty$ 是一个范数。

ii) 设 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个线性变换，其对应的矩阵为 (a_{ij})。若定义

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|A(x)\|_\infty,$$

求证：$\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$。

iii) 设 $D \in \mathbb{R}^n$ 是一个区域，点 $x_1, x_2 \in D$ 满足以 x_1, x_2 为端点的线段 $I_{x_1,x_2} \subset D$。若函数 $f: D \to \mathbb{R}^m$ 连续可微，求证：存在 $\xi \in I_{x_1,x_2}$，使得

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_\infty \le \|f'(\xi)\|_\infty \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

（提示：先对 f 的每个分量应用 *Lagrange* 中值定理，然后利用第 *ii)* 条的结论。若 f 仅可微，结论仍成立，但证明要复杂一些，可参看卓里奇 *10.4.1* 节。）

引理 3 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域，映射 $\phi: D \to \mathbb{R}^n$ 连续可微，$C \subset D$ 是一个立方体，则有：

$$\mu(\phi(C)) \le \left(\max_{t \in J} \|\phi'(t)\|_\infty\right)^n \mu(C).$$

证明： 设 $C=\{x\in D\mid \|x-x_0\|_\infty<\frac{\ell}{2}\}$，则 $\mu(C)=\ell^n$。对于 $x\in C$，

$$\|\phi(x)-\phi(x_0)\|_\infty\le\|\phi'(\xi)\|_\infty\|x-x_0\|_\infty\le\max_{t\in J}\|\phi'(t)\|_\infty\frac{\ell}{2},$$

所以 $\phi(C)$ 位于以 $\phi(x_0)$ 为中心、以 $\max_{t\in J}\|\phi'(t)\|_\infty\,\ell$ 为边长的立方体中，所以有

$$\mu(\phi(C))\le\left(\max_{t\in J}\|\phi'(t)\|_\infty\right)^n\ell^n.$$

□

下面我们可以给出换元公式的证明了。

证明： ii) 根据引理 1，只需证明公式 (1) 成立。先任取一个 $\varepsilon>0$。

1. 设 I_0 是一个包含 D_x 的闭区间。因为 D_x Jordan 可测，所以存在开区间 $I_1,\ldots,I_N$，使得

$$\partial D_x\subseteq I_1\cup\cdots\cup I_N,\ \text{且}\ \sum_{\alpha=1}^{N}\mu(I_\alpha)<\varepsilon.$$

利用 $I_1,\ldots,I_N$ 的边界构造 I_0 的一个网格分划 P_0，则 P_0 中的闭区间 I 可分为三类：

$$\begin{aligned}
&P_1=\{J\in P_0\mid\exists\alpha\in\{1,\ldots,N\},\text{s.t. }J\subseteq I_\alpha\},\\
&P_2=\{J\in P_0\backslash P_1\mid J\subseteq D_x\},\\
&P_3=\{J\in P_0\backslash P_1\mid J\nsubseteq D_x\}.
\end{aligned}$$

记 $D_x'=\bigcup\limits_{I\in P_2}I$、$D_x''=\bigcup\limits_{I\in P_1\cup P_2}I$，则有 $D_x'\subseteq D_x\subseteq D_x''$。另一方面，

$$\mu(D_x'')-\mu(D_x')=\sum_{I\in P_1}\mu(I)=\sum_{\alpha=1}^{N}\mu(I_\alpha)<\varepsilon,$$

所以有

$$\mu(D_x')\le\mu(D_x)\le\mu(D_x')+\varepsilon.$$

接下来我们只需估计 $\mu(D_x')$。

设 $D_t'=\phi^{-1}(D_x')$，定义

$$\delta_1=\inf\{\|x-y\|_\infty\mid x\in D_t',\ y\in\partial D_t\},$$

注意 D_t' 是 $\mathring{D}_t$ 中的紧集，所以必有 $\delta_1>0$。

2. 考虑如下函数：

$$\eta:D_t\times D_t\to\mathbb{R},\quad(t_1,t_2)\mapsto\left(\left\|(\phi'(t_1))^{-1}\phi'(t_2)\right\|_\infty\right)^n,$$

它显然是一个连续函数，且满足 $\eta(t,t)=1$。利用连续函数的性质，以及集合 $\Delta=\{(t_1,t_2)\in D_t\times D_t\mid t_1=t_2\}$ 的紧性不难证明如下结论：

练习 *存在 $\delta_2>0$，使得当 $\|t_1-t_2\|_\infty<\delta_2$ 时，有 $|\eta(t_1,t_2)-1|<\varepsilon$。（提示：先考虑点 (t_1,t_2) 到 Δ 的（无穷范数）距离。）*

3. 取一个包含 D_t 的立方体 C_0，其边长为 ℓ_0。设 $\tilde{\psi}: C_0\to\mathbb{R}$ 是 $\psi: D_t\to\mathbb{R}$ 的零延拓，则 $\tilde{\psi}\in R(C_0)$，于是存在 $\delta_3>0$，使得对任意满足 $\|P\|_\infty<\delta_3$ 的分划 P，以及 P 的任意标记点组 ξ，都有

$$\left|S(\tilde{\psi},P,\xi)-\int_{C_0}\tilde{\psi}(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

注意，这里的 $\|P\|_\infty$ 表示无穷范数下闭区间的“粒度”。设 $P=\{C_1,\ldots,C_N\}$，则 $\|P\|_\infty$ 定义为：

$$\|P\|_\infty=\max\{\mathrm{diam}_\infty(C_1),\ldots,\mathrm{diam}_\infty(C_N)\},$$

其中

$$\mathrm{diam}_\infty(E)=\sup\{\|x-y\|_\infty \mid x,y\in E\}.$$

我们曾经证明过，$\mathbb{R}^n$ 上的任何范数都等价于欧氏范数，所以用欧氏范数还是其它范数衡量区间的大小不会改变 Riemann 积分的定义，只需把正数 δ 乘以一些只跟空间维数有关的正的常数就可以了。

4. 取一个充分大的自然数 m 使得 $\frac{\ell_0}{m}<\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$，将 C_0 各边 m 等分得到一个网格分划，记为 Q_0，则 Q_0 中的元素都是立方体，并且可以分成三类：

$$\begin{aligned}Q_1&=\{C\in Q_0 \mid C\cap\partial D_t\neq\emptyset\},\\ Q_2&=\{C\in Q_0 \mid C\subseteq D_t\},\\ Q_3&=\{C\in Q_0 \mid C\cap D_t=\emptyset\}.\end{aligned}$$

根据 δ_1 和 m 的取法可知 $D_t'\subseteq\bigcup\limits_{C\in Q_2}C$，于是

$$\mu(D_x')=\mu(\phi(D_t'))\le\sum_{C\in Q_2}\mu(\phi(C)).$$

5. 对于任一 $C\in Q_2$，设 t_C 是它的中心，记 $A=\phi'(t_C)$，它是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的可逆线性映射。对于立方体 C 和映射 $A^{-1}\circ\phi$ 应用引理 3 得：

$$\mu\left(A^{-1}\left(\phi(C)\right)\right)\le\left(\max_{t\in C}\left\|A^{-1}\circ\phi'(t)\right\|_\infty\right)^n\mu(C)=\max_{t\in C}\left(\eta(t_C,t)\right)\mu(C).$$

根据引理 2，$\mu\left(A^{-1}\left(\phi(C)\right)\right)=|\det(A)|^{-1}\mu(\phi(C))=\psi(t_C)^{-1}\mu(\phi(C))$。另一方面，根据 δ_2 和 m 的取法，应有 $\eta(t_C,t)<1+\varepsilon$，所以

$$\mu(\phi(C))\le(1+\varepsilon)\,\psi(t_C)\,\mu(C).$$

6. 对 $C\in Q_2$ 求和得：

$$\sum_{C\in Q_2}\mu(\phi(C))\le(1+\varepsilon)\sum_{C\in Q_2}\psi(t_C)\,\mu(C).$$

对于 $C \in Q_1$ 或 $C \in Q_3$，我们总能找到一个 $t_C \notin D_t$，于是 $\tilde{\psi}(t_C) = 0$。所有 t_C 构成分划 Q_0 的一个标记点组 ξ，且其 Riemann 和恰好为上式右端的和式，所以

$$\sum_{C \in Q_2} \mu(\phi(C)) \leq (1+\varepsilon) S(\tilde{\psi}, Q_0, \xi).$$

根据 δ_3 和 m 的取法，

$$S(\tilde{\psi}, Q_0, \xi) \leq \int_{C_0} \tilde{\psi}(t) \mathrm{d}t + \varepsilon = \int_{D_t} \psi(t) \mathrm{d}t + \varepsilon.$$

7. 最后，

$$\begin{aligned} \mu(D_x) \leq \mu(D'_x) + \varepsilon \leq (1+\varepsilon) \sum_{C \in Q_2} \mu(\phi(C)) + \varepsilon \\ \leq (1+\varepsilon)\, S(\tilde{\psi}, Q_0, \xi) + \varepsilon \leq (1+\varepsilon) \left(\int_{D_t} \psi(t) \mathrm{d}t + \varepsilon \right) + \varepsilon, \end{aligned}$$

再令 $\varepsilon \to 0$ 即得所求结论。 $\square$