数学分析（2）期中试题参考答案

一、（15 分）设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集，求证：

i) 若 E 道路连通，则 E 连通；

ii) 若 E 是连通开集，则 E 道路连通。

解答： i)（7 分）假设 E 不连通，于是 $E = U \cup V$，其中 U、V 是 E 中的非空开集，且满足 $U \cap V = \emptyset$。任取 $x \in U$、$y \in V$，因为 E 道路连通，所以存在连续映射 $\gamma : [a, b] \to E$，满足 $\gamma(a) = x$、$\gamma(b) = y$。设 $U' = \gamma^{-1}(U)$、$V' = \gamma^{-1}(V)$，因为 γ 连续，所以 U'、V' 是 $[a, b]$ 中的非空开集，且满足 $[a, b] = U' \cup V'$、$U' \cap V' = \emptyset$，于是 $[a, b]$ 不连通，矛盾！

ii)（8 分）任取 $x_0 \in E$，设 $A = \{x \in E \mid 存在道路连接\ x\ 和\ x_0\}$。设 $x \in A$，因为 E 开，所以存在 $\delta > 0$，使得 $B_\delta(x) \subseteq E$。$B_\delta(x)$ 中的任意点 y 都可通过直线段与 x 相连，因为存在道路连接 x 和 x_0，所以将两条道路接起来就可得到从 x_0 到 y 的道路，所以 $B_\delta(x) \subseteq A$，因此 A 是开集。另一方面，设 $\{x_k\}$ 是 A 中的点列，它们收敛到某 $x \in E$。类似的，我们先选取一个 $\delta > 0$ 使 $B_\delta(x) \subseteq E$，然后，根据收敛的性质，必存在某个 $x_k \in B_\delta(x)$。现在，x_0 到 x_k 存在道路，x_k 可以通过直线段和 x 相连，因此 $x \in A$，这说明 A 是闭集。综上所述，A 是 E 中既开又闭的非空子集，因为 E 连通，所以 $A = E$，因此 E 道路连通。 $\square$

二、（15 分）设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，$f : X \to \mathbb{R}^m$ 是连续的单射，记 $Y = f(X)$。求证：f 的逆映射 $f^{-1} : Y \to X$ 是连续的。

解答： （证法一）要证明 f^{-1} 连续，只需证明：对于 X 中的任意闭集 U，$(f^{-1})^{-1}(U)$ 是 Y 中的闭集。因为 $f : X \to Y$ 是双射，所以 $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$，于是只需证明 f 是开映射。因为 U 是闭的，X 是紧

的，所以 U 也是紧的；因为 f 连续，所以 $f(U)$ 也是紧的，于是 $f(U)$ 是闭的。

（证法二）假设 f^{-1} 在 $y_0 \in Y$ 不连续，于是存在 $\epsilon_0 > 0$，使得对任意的 $\delta > 0$，存在 $y \in B_\delta(y_0) \cap Y$，使得 $\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\| \geq \epsilon_0$。依次取 $\delta = \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$，设相应的 y 为 y_k，则 $\{y_k\}$ 是 Y 中收敛到 y_0 的点列。设 $f^{-1}(y_k) = x_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$，因为 X 紧，点列 $\{x_k\}$ 存在收敛子列，记之为 $\{x_{k_l}\}$，假设 $\lim\limits_{l\to\infty} x_{k_l} = x^*$。因为 f 连续，应有

$$f(x^*) = \lim_{l\to\infty} f(x_{k_l}) = \lim_{l\to\infty} y_{k_l} = y_0 = f(x_0),$$

因为 f 是单射，所以有 $x^* = x_0$。但是另一方面，$\{x_k\}$ 始终满足 $\|x_k - x_0\| \geq \epsilon_0$，所以它的任何收敛子列不可能以 x_0 为极限，矛盾。 $\square$

三、(15 分) 设 $f(x) = x^2 + p\,x + q$，已知当 $(p, q) = (p_0, q_0)$ 时，方程 $f(x) = 0$ 有两个不等的实根 $x_1 < x_2$。

i) 求证：存在 (p_0, q_0) 在 $\mathbb{R}^2$ 中的开邻域 U，以及光滑映射：

$$g : U \to \mathbb{R}^2, \quad (p, q) \mapsto (u(p, q), v(p, q)),$$

使得对任意的 $(p, q) \in U$，有 $f(u(p, q)) = f(v(p, q)) = 0$，且 $u(p_0, q_0) = x_1$、$v(p_0, q_0) = x_2$；

ii) 计算 g 的 Jacobi 行列式，即 $\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\right)$。

解答: （证法一）根据已知条件，有 $p_0^2 - 4\,q_0 = (x_2 - x_1)^2 > 0$，所以存在 (p_0, q_0) 的邻域 U，使得对任意的 $(p, q) \in U$，有 $p^2 - 4\,q > 0$。根据二次方程求根公式

$$u = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad v = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

即是所求。接下来通过直接的计算可得 $\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\right) = \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}$。（注：此做法显然不能推广到一般的 n 次多项式。）

（证法二）设 $(p, q) = (p_0, q_0)$。注意 $f(-\frac{p_0}{2}) = -\frac{p_0^2 - 4\,q_0}{4} < 0$，所以 $x_i \neq -\frac{p_0}{2}$，于是 $f'(x_i) = 2\,x_i + p_0 \neq 0$。由隐函数定理可知，存在 (p_0, q_0) 的

开邻域 U_i 和 x_i 的开邻域 V_i，以及映射 $g_i: U_i \to V_i$，使得 $g_i(p_0, q_0) = x_i$，且对任意的 $(p, q) \in U_i$，都有 $f(g_i(p, q)) = 0$。最后，取 $U = U_1 \cap U_2$，$u = g_1$、$v = g_2$ 即可。

要计算 Jacobi 行列式，由隐函数定理可知：

$$\frac{\partial g_i}{\partial p} = -\frac{g_i}{f'(g_i)}, \quad \frac{\partial g_i}{\partial q} = -\frac{1}{f'(g_i)},$$

由此不难求出 $\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\right) = \frac{1}{v-u} = \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}$。（注：此做法可推广到一般的 n 次多项式，最后计算 Jacobi 行列式时会出现 f 和 f' 的结式。）

（证法三）根据根与系数的关系，$p = -u - v$、$q = uv$，由此不难求出 $\det\left(\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)}\right) = v - u$。在 $(u, v) = (x_1, x_2)$ 处，有 $\det\left(\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)}\right) \neq 0$，所以由反函数定理可知映射 g 的存在性。最后，仍由反函数定理可知 $\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\right) = \frac{1}{v-u} = \frac{1}{\sqrt{p^2-4q}}$。（注：此做法亦可推广到一般的 n 次多项式，除最后一步要用到结式以外，前面计算根与系数关系的行列式时也需要一些技巧。）

评分标准：i) 10 分；ii) 5 分。 □

四、（20 分）考虑函数 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$(x, y) \mapsto (u, v) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$。

i) 将 $\mathbb{R}^2$ 视为 $\mathbb{C}$，求证 f 是一个复解析函数；

ii) 计算 f 的 Jacobi 矩阵的范数，即 $\|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\|$；

iii) 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$，求证：对任意的 $z_1, z_2 \in D$，有

$$\|f(z_1) - f(z_2)\| < \|z_1 - z_2\|.$$

解答： i)（5 分）因为 f 可微，所以只需证明 f 满足 Cauchy-Riemann 方程。直接计算得：

$$u_x = e^x \cos y,\ u_y = -e^x \sin y,\ v_x = e^x \sin y,\ v_y = e^x \cos y,$$

所以 $u_x = v_y$、$v_x = -u_y$，于是 f 解析。

ii)（7 分）由前一问可知：

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

根据课堂上讲过的结果，$\|J\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$，其中 $\lambda_{\max}$ 是 $J^T J$ 的最大特征值。而 $J^T J = e^{2x} I$，所以 $\lambda_{\max} = e^{2x}$，于是 $\|J\| = e^x$。

iii)（8 分）根据有限增量定理，存在 $\xi \in I_{z_1,z_2}$，使得

$$\|f(z_1) - f(z_2)\| \leq \|f'(\xi)\| \, \|z_1 - z_2\|,$$

其中 I_{z_1,z_2} 表示以 z_1、z_2 为端点的闭线段。因为 D 是凸的，所以 $I_{z_1,z_2} \subset D$，于是 $\xi \in D$。根据第 ii) 条，$\|f'(\xi)\| = e^{\mathrm{Re}(\xi)} < 1$，所以所求证的不等式成立。 $\square$

五、（20 分）设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的流形，$x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash M$。定义函数

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x - x_0\|.$$

i) 若 M 是紧的，求证 f 可取到最大值和最小值；

ii) 试举一例，使得 f 取不到最大值和最小值（只需写出 M 和 x_0，无需证明 M 是流形以及 f 取不到最大、最小值等性质）；

iii) 设 $x \in M$ 是 f 的局部极大值（或极小值）点，求证：向量 $\overrightarrow{xx_0}$ 与 M 在 x 处的切空间 $T_x M$ 正交。

解答： i)（5 分）因为 f 是连续函数，所以 $f(M)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集，于是是有界闭集。因为有界，所以存在上下确界。因为闭，所以上下确界可以取到，即最大值和最小值。（此问直接回答连续函数在紧集上能达到最大最小值亦可。）

ii)（5 分）只需取一个非紧的 M，然后取 x_0 是 M 的聚点。例如：

$$M = \{(e^t \cos t, e^t \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad x_0 = (0, 0).$$

iii)（10 分）设 x 是 M 的一个局部极值点，M 在 x 附近由方程

$$\phi_1(x) = 0, \ldots, \phi_k(x) = 0$$

给出。根据书上的有关定理，存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$，使得

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla \phi_1(x) + \cdots + \lambda_k \nabla \phi_k(x).$$

因为每个 $\nabla\phi_i(x)$ 都与 T_xM 正交，所以 $\nabla f(x)$ 也与 T_xM 正交。另一方面，不难算出 $\nabla f(x)=\frac{x-x_0}{f(x)}$，所以 $\overrightarrow{xx_0}$ 与 T_xM 正交。 $\square$

六、(15 分) 设 $a>b>0$，$f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-2a^2(y^2+z^2-x^2)+b^4$，$M=f^{-1}(0)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid f(x,y,z)=0\}$。

i) 求证：对任意的 $p\in M$，$\|\nabla f(p)\|=4\sqrt{a^4-b^4}\|p\|$；

ii) 求证：M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个紧致二维流形；

iii) 求函数 $H(x,y,z)=z-z_0$ 在 M 上的最大值和最小值。

解答： i) (5 分) 设 $g(x,\rho)=(x^2+\rho^2)^2-2a^2(\rho^2-x^2)+b^4$，则 $f(x,y,z)=g(x,\sqrt{y^2+z^2})$，于是

$$f_x=g_x,\ f_y=g_\rho\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\ f_z=g_\rho\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

所以 $f_x^2+f_y^2+f_z^2=g_x^2+g_\rho^2$。接下来，

$$g_x=4\,x\,(x^2+\rho^2+a^2),\ g_\rho=4\,\rho\,(x^2+\rho^2-a^2),$$

然后，利用 $g(x,\rho)=0$ 不难算出 $g_x^2+g_\rho^2=16(a^4-b^4)(x^2+\rho^2)$。

ii) (5 分) 显然 $p=0\notin M$，于是由 i) 知 ∇f 在 M 上处处非零，所以 0 是 f 的一个正则值，因此 M 是流形。因为 f 连续、$\{0\}$ 是闭集，所以 M 也是闭集。当 $x^2+y^2+z^2>2\,a^2$ 时，$f(x,y,z)>0$，所以 M 有界。因为 M 有界闭，所以 M 紧。

iii) (5 分) 首先，因为 M 紧、H 连续，所以 H 一定能在 M 上取得最大、最小值，且极值点可由 Lagrange 乘子法求出。

考虑函数 $u(x,y,z)=H(x,y,z)-\lambda\,f(x,y,z)$，它的驻点满足

$$u_x=-\lambda f_x=0,\ u_y=-\lambda f_y=0,\ u_z=1-\lambda f_z=0.$$

将上述方程与 $f=0$ 联立可得 $x=0$、$y=0$，以及四个 z_i：

$$z_1=-\sqrt{a^2+\sqrt{a^4-b^4}},\ z_2=-\sqrt{a^2-\sqrt{a^4-b^4}},\ z_3=-z_2,\ z_4=-z_1,$$

和四个 $\lambda_i=\frac{1}{f_z(0,0,z_i)}$。

接下来，设 H_i 是 u 在 $(0,0,z_i)$ 处的 Hesse 矩阵，不难知道 H_i 都是对角的，接下来通过直接的计算可知 H_1 正定、H_2 不定，于是 $H_3=-H_2$ 不定，$H_4=-H_1$ 负定，所以 $(0,0,z_1)$ 是极小值点、$(0,0,z_4)$ 是极大值点，相应的极值为 z_1-z_0 和 z_4-z_0。

（注：当 $b=0$ 时，M 就是 Bernoulli 双扭线绕 x 轴旋转一周后得到的曲面，$(0,0,0)$ 是它的奇点，所以不是流形。添加了 b^4 项之后，M 变成一个圆环，但它的横截面并不是圆的，而是一个类似鸡蛋的曲线。另一方面，若将 b^4 改成 $-b^4$，M 则成为一个类似红细胞表面的上下带凹陷的圆饼。） □

七、(10 分)（附加题）设 $p,q\in\mathbb{N}$、$p,q\geq 2$。定义函数

$$f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C},\quad (z_1,z_2)\mapsto z_1^p+z_2^q.$$

求证：$M=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\mid f(z_1,z_2)=0,\ |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$ 是一个 $\mathbb{C}^2(=\mathbb{R}^4)$ 中的一维流形。

解答： 设 $z_1=x+i\,y$、$z_2=z+i\,w$，

$$u=\mathrm{Re}f(z_1,z_2),\ v=\mathrm{Im}f(z_1,z_2),\ g=|z_1|^2+|z_2|^2-1,$$

记 $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ 为映射 $(x,y,z,w)\mapsto(u,v,g)$，则 $M=\phi^{-1}(0)$。要证明 M 是流形，只需证明三个法向量 ∇u、∇v 和 ∇g 在 M 上线性无关即可。

因为 f 关于 z_1 和 z_2 分别解析，所以有

$$u_x=v_y,\ v_x=-u_y,\ u_z=v_w,\ v_z=-u_w,$$

由此不难证明 $\nabla u\cdot\nabla v=0$、$\|\nabla u\|>0$、$\|\nabla v\|>0$，所以 ∇u 和 ∇v 一定是线性无关的。所以若 ∇u、∇v 和 ∇g 线性相关，必存在常数 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，使得 $\nabla g=\lambda\nabla u+\mu\nabla v$。

设 $\lambda+i\,\mu=\zeta$，将上述条件改写为复数形式可得：

$$2\,z_1=\zeta\,p\,\bar{z}_1^{p-1},\ 2\,z_2=\zeta\,q\,\bar{z}_2^{q-1},$$

两式相除，并利用 $f(z_1,z_2)=0$ 可得 $q\,|z_1|^2+p\,|z_2|^2=0$，这是不可能的。所以 ∇u、∇v 和 ∇g 在 M 上处处线性无关，于是 0 是 ϕ 的正则值，所以 M 是流形，其维数等于 $4-3=1$。

（注：这个流形是三维球面 S^3 中的一个扭结，它镶嵌在一个环面上，并且沿环面的两条母线分别转了 p 圈和 q 圈，所以叫做 (p,q) 型的环面扭结。） $\square$