数学分析（2）期中试题　　卷 A　　2015.05.09

一、（15 分）设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集，求证:

i) 若 E 道路连通，则 E 连通;

ii) 若 E 是连通开集，则 E 道路连通。

二、（15 分）设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，$f : X \to \mathbb{R}^m$ 是连续的单射，记 $Y = f(X)$。求证: f 的逆映射 $f^{-1} : Y \to X$ 是连续的。

三、（15 分）设 $f(x) = x^2 + p\,x + q$，已知当 $(p,q) = (p_0, q_0)$ 时，方程 $f(x) = 0$ 有两个不等的实根 $x_1 < x_2$。

i) 求证: 存在 (p_0, q_0) 在 $\mathbb{R}^2$ 中的开邻域 U，以及光滑映射:

$$g : U \to \mathbb{R}^2, \quad (p,q) \mapsto (u(p,q), v(p,q)),$$

使得对任意的 $(p,q) \in U$，有 $f(u(p,q)) = f(v(p,q)) = 0$，且 $u(p_0,q_0) = x_1$、$v(p_0,q_0) = x_2$;

ii) 计算 g 的 Jacobi 行列式，即 $\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\right)$。

四、（20 分）考虑函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$(x,y) \mapsto (u,v) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$。

i) 将 $\mathbb{R}^2$ 视为 $\mathbb{C}$，求证 f 是一个复解析函数;

ii) 计算 f 的 Jacobi 矩阵的范数，即 $\|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\|$;

iii) 设 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$，求证: 对任意的 $z_1, z_2 \in D$，有

$$\|f(z_1) - f(z_2)\| < \|z_1 - z_2\|.$$

五、（20 分）设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的流形，$x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash M$。定义函数

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x - x_0\|.$$

i) 若 M 是紧的，求证 f 可取到最大值和最小值；

ii) 试举一例，使得 f 取不到最大值和最小值（只需写出 M 和 x_0，无需证明 M 是流形以及 f 取不到最大、最小值等性质）；

iii) 设 $x \in M$ 是 f 的局部极大值（或极小值）点，求证：向量 $\overrightarrow{xx_0}$ 与 M 在 x 处的切空间 T_xM 正交。

六、（15 分）设 $a > b > 0$，$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - 2a^2(y^2+z^2-x^2)+b^4$，$M = f^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$。

i) 求证：对任意的 $p \in M$，$\|\nabla f(p)\| = 4\sqrt{a^4 - b^4}\|p\|$；

ii) 求证：M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个紧致二维流形；

iii) 求函数 $H(x,y,z) = z - z_0$ 在 M 上的最大值和最小值。

七、（10 分）（附加题）设 $p, q \in \mathbb{N}$、$p, q \geq 2$。定义函数

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \quad (z_1, z_2) \mapsto z_1^p + z_2^q.$$

求证：$M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z_1, z_2) = 0,\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ 是一个 $\mathbb{C}^2 (= \mathbb{R}^4)$ 中的一维流形。