数学分析（2）：第 10 次习题课

刘思齐

1. 设 V 是一个 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间，V^* 是 V 的对偶空间，我们将 V 等同于 V^* 的对偶空间。设 $e_1,\dots,e_n \in V$ 是 V 的基，$f_1,\dots,f_n \in V^*$ 是相应的对偶基。课堂上已经证明：
$$F = \{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$$
构成 $A^k(V)$ 的基，于是
$$E = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$$
也构成 $A^k(V^*)$ 的基。求证：存在一个同构 $\phi : A^k(V^*) \to (A^k(V))^*$，使得 $\phi(E)$ 恰是 F 的对偶基。

2. 记 $\Lambda^k(V) = A^k(V^*)$、$\Lambda^*(V) = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$。$\Lambda^*(V)$ 称为 V 的外代数或 Grassmann 代数。设 $v_1,\dots,v_k \in V$，求证：
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \det\nolimits_{i_1\dots i_k}(v_1,\dots,v_k)\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$
其中 $\det_{i_1\dots i_k}(v_1,\dots,v_k)$ 表示将 $v_1,\dots,v_k$ 的坐标排成 n 行 k 列的矩阵后，其中第 $i_1,\dots,i_k$ 行构成的子式。

3. 设 W 是 V 的 k 维子空间，$S = \{v_1,\dots,v_k\}$ 是 W 的一组基，定义
$$p_{i_1\dots i_k}(W,S) = \det\nolimits_{i_1\dots i_k}(v_1,\dots,v_k),$$
称为 (W,S) 的 Plücker 坐标。设 $T = \{w_1,\dots,w_k\}$ 是 W 的另一组基，求证：
$$p_{i_1\dots i_k}(W,T) = c(S,T) \cdot p_{i_1\dots i_k}(W,S),$$
其中 $c(S,T)$ 是从 S 到 T 的转移矩阵的行列式。特别地，若 S、T 都是标准正交基，则 $c(S,T) = \pm 1$。所以 Plücker 坐标基本上不依赖于基的选取。

4. 设 (W_1,S_1)、(W_2,S_2) 是 V 的两个 k 维子空间和相应的基，求证：若对所有的 $i_1,\dots,i_k$，有
$$p_{i_1\dots i_k}(W_1,S_1) = p_{i_1\dots i_k}(W_2,S_2),$$
则 $W_1 = W_2$，且 S_1、S_2 之间相差一个行列式为 1 的正交变换。

5. 考虑 $n=4$、$k=2$ 的特殊情况。设 W 的基为 $S=\{v_1,v_2\}$，对于 $1\le i<j\le 4$，记 $p_{ij}=p_{ij}(W,S)$。

   i) 求证：$p_{12}p_{34}-p_{13}p_{24}+p_{14}p_{23}=0$；

   ii) 若 $\omega=\sum\limits_{1\le i<j\le 4} p_{ij}\, e_j\wedge e_j$ 的坐标 p_{ij} 满足 i) 中的恒等式，则它们一定是某个 (W,S) 的 Plücker 坐标。

   （注：一般的 n 维空间中的 k 维子空间的 Plücker 坐标满足更多的二次关系，它们统称为 Plücker 关系。）

6. 定义 $\mathbb{R}^6$ 的子集：

$$\tilde{G}_{2,4}=\{(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)\in\mathbb{R}^6 \mid p_1\,p_6-p_2\,p_5+p_3\,p_4=0,\ \|p\|=1\}.$$

   i) 求证：$\tilde{G}_{2,4}$ 是一个四维流形；

   ii) 求证：$\tilde{G}_{2,4}$ 微分同胚与 $S^2\times S^2$。

   （注：$V=\mathbb{R}^4$ 中的定向二维子空间与 $\tilde{G}_{2,4}$ 中的点一一对应。这是最简单的 Grassmann 流形的例子。将 $(4,2)$ 换成更一般的 (n,k) 则可得更一般的 Grassmann 流形，它们总是一些二次方程（即 Plücker 关系）的交点。）