

# 数学分析 (2): 第 11 次习题课

刘思齐

先约定一些记号:

- $\Omega^k(M)$ : 流形  $M$  上的  $k$ -阶微分形式全体构成的线性空间
- $Z^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\}$
- $B^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \exists \eta \in \Omega^{k-1}(M), \text{ s.t. } \omega = d\eta\}$
- $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$  (因为  $d^2 = 0$ , 所以  $B^k(M) \subseteq Z^k(M)$ .)
- $[\omega] := \omega + B^k(M) \in H^k(M)$

1. 设  $f: M \rightarrow N$  是从流形  $M$  到流形  $N$  的光滑映射,  $f^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  是其拉回映射。求证:

- $f^*(Z^k(N)) \subseteq Z^k(M)$ ;
- $f^*(B^k(N)) \subseteq B^k(M)$ ;
- iii) 定义  $\hat{f}: H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ ,  $[\omega] \mapsto [f^*\omega]$ , 则这个定义是好的;
- iv) 设  $g: L \rightarrow M$  是另一个光滑映射, 则  $(f \circ g)^* = \hat{g} \circ \hat{f}$ ;
- v) 若  $M$  和  $N$  微分同胚, 则  $H^k(M)$  和  $H^k(N)$  同构。

映射  $\hat{f}$  也称为  $f$  的拉回映射。

2. 设  $M$  是一个流形,  $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha \mid \alpha \in A\}$  是  $M$  上的一个图册。记  $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$ ,  $\tilde{U}_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}$ ,  $\tilde{V}_\alpha = V_\alpha \times \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\phi}_\alpha = \phi_\alpha \times \text{id}_{\mathbb{R}}$ , 则  $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\phi}_\alpha: \tilde{V}_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$  是  $\tilde{M}$  上的一个图册。

i) 设  $\omega \in \Omega^k(\tilde{M})$ , 它在地图  $\tilde{\phi}_\alpha: \tilde{V}_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha$  上的坐标形式为:

$$\omega_\alpha = \omega_{i_1 \dots i_k}^{(1)}(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \omega_{j_1 \dots j_{k-1}}^{(2)}(x, t) dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}},$$

其中  $x_1, \dots, x_d$  是  $V_\alpha$  上的坐标,  $t$  是  $\mathbb{R}$  上的坐标 (求和号已省略)。定义  $\tilde{V}_\alpha$  上的  $k-1$  阶微分形式如下:

$$(K\omega)_\alpha = \left( \int_{t_0}^t \omega_{j_1 \dots j_{k-1}}^{(2)}(x, t) dt \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}},$$

其中  $t_0$  是  $\mathbb{R}$  中固定的一点 (例如可取  $t_0 = 0$ )。求证:  $\{(K\omega)_\alpha\}$  满足图册  $\tilde{\mathcal{A}}$  的粘合条件, 于是定义了  $\tilde{M}$  上的一个整体  $k-1$  阶微分形式, 记为  $K\omega$ 。运算  $K: \Omega^k(\tilde{M}) \rightarrow \Omega^{k-1}(\tilde{M})$  叫做同伦算子。

ii) 定义如下映射

$$\begin{aligned}\pi: \tilde{M} &\rightarrow M, & (x, t) &\mapsto x, \\ s: M &\rightarrow \tilde{M}, & x &\mapsto (x, t_0),\end{aligned}$$

设  $\pi^*: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(\tilde{M})$ 、 $s^*: \Omega^k(\tilde{M}) \rightarrow \Omega^k(M)$  为相应的拉回映射。求证:

$$\begin{aligned}s^* \circ \pi^* &= \text{id}, \\ \pi^* \circ s^* &= \text{id} - K \circ d - d \circ K.\end{aligned}$$

iii) 设  $\hat{\pi}: H^k(M) \rightarrow H^k(\tilde{M})$ 、 $\hat{s}: H^k(\tilde{M}) \rightarrow H^k(M)$  为相应的拉回映射。求证:

$$\hat{s} \circ \hat{\pi} = \text{id}, \quad \hat{\pi} \circ \hat{s} = \text{id}.$$

iv) 求证:  $H^k(M)$  与  $H^k(\tilde{M})$  同构。

v) 求证:

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0; \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

3. i) 设  $f, g: M \rightarrow N$  是两个光滑映射, 它们叫做同伦的, 如果存在光滑映射

$$F: M \times [0, 1] \rightarrow N, \quad (x, t) \mapsto F(x, t),$$

使得对任意的  $x \in M$ , 有  $F(x, 0) = f(x)$ 、 $F(x, 1) = g(x)$ 。若  $f$ 、 $g$  同伦, 我们记  $f \sim g$ 。求证: 若  $f \sim g$ , 则  $\hat{f} = \hat{g}$ 。

ii) 流形  $M$ 、 $N$  叫同伦的, 如果存在映射

$$f: M \rightarrow N, \quad g: N \rightarrow M,$$

使得  $f \circ g \sim \text{id}_N$ 、 $g \circ f \sim \text{id}_M$ 。若  $M$ 、 $N$  同伦, 我们记  $M \sim N$ 。求证: 若  $M \sim N$ , 则  $H^k(M) \cong H^k(N)$ 。

iii) 流形  $M$  叫可缩的, 如果  $M \sim pt$ , 这里  $pt$  表示由一个点构成的 0 维流形。求证: 若  $M$  可缩, 则

$$H^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0; \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

iv) 流形  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  叫星形的, 如果存在一点  $x_0 \in M$ , 使得对任意一点  $x \in M$ , 以  $x_0$ 、 $x$  为端点的线段  $I_{x_0, x} \subseteq M$ 。求证: 星形流形是可缩的。

v) 求证:  $B_r^n(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$  是星形的。