数学分析（3）：第 3 次习题课

刘思齐

1. （Froullani 积分）设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，$a,b>0$。考虑含参广义积分：

$$I(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{f(b\,x)-f(a\,x)}{x}\mathrm{d}x.$$

i) 若极限

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=:f(+\infty)$$

存在，则 $I(a,b)=(f(0)-f(+\infty))\log\frac{a}{b}$；

ii) 若存在 $A>0$ 使得广义积分

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

存在，则 $I(a,b)=f(0)\log\frac{a}{b}$。

解答： 广义积分 $I(a,b)$ 有两个瑕点 0 和 $+\infty$，任取 $0<\alpha<\beta<+\infty$，考虑

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta\frac{f(b\,x)-f(a\,x)}{x}\mathrm{d}x\\
=&\int_\alpha^\beta\frac{f(b\,x)}{x}\mathrm{d}x-\int_\alpha^\beta\frac{f(a\,x)}{x}\mathrm{d}x\\
=&\int_{b\,\alpha}^{b\,\beta}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y-\int_{a\,\alpha}^{a\,\beta}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y\quad\text{（换元法）}\\
=&\int_{a\,\beta}^{b\,\beta}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y-\int_{a\,\alpha}^{b\,\alpha}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y\quad\text{（NL 公式）}
\end{aligned}$$

根据第二积分中值定理，存在 $\xi\in(a\,\beta,b\,\beta)$、$\eta\in(a\,\alpha,b\,\alpha)$ 满足：

$$\int_{a\,\beta}^{b\,\beta}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y=f(\xi)\log\frac{b}{a},\quad\int_{a\,\alpha}^{b\,\alpha}\frac{f(y)}{y}\mathrm{d}y=f(\eta)\log\frac{b}{a},$$

再令 $\alpha\to0$、$\beta\to+\infty$ 即可证明第 i) 种情况。对于第 ii) 种情况，不必取 ξ，直接利用广义积分的定义可知上式第一项极限为零。 □

2.

i) 设 $P(x)$、$Q(x)$ 是实系数多项式，满足 $Q(x) > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$，且广义积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x$$

收敛。设 $Q(x)$ 的根为 $z_j, \bar{z}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$，其中 $\mathrm{Im}(z_j) > 0$。若 $z_j \neq z_k$ $(j \neq k)$，求证：

$$I = 2\,\pi\,i \sum_{j=1}^{n} \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}.$$

ii) 设 m、n 是自然数，满足 $m < n$。计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} \mathrm{d}x.$$

iii) 设 $0 < \alpha < 1$，计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \mathrm{d}x.$$

解答： i) 考虑 $R(x) = P(x)/Q(x)$ 的部分分式展开：

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{x - z_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{x - \bar{z}_j},$$

$R(x)$ 是实系数的，所以有 $B_j = \bar{A}_j$；积分 I 收敛，所以有 $B_j = -A_j$；于是 A_j 都是纯虚数。接下来，不难算出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A_j}{x - z_j} + \frac{\bar{A}_j}{x - \bar{z}_j} \right) \mathrm{d}x = 2\,\pi\,i\,A_j.$$

再注意到，

$$A_j = \lim_{x \to z_j} (x - z_j)\, R(x) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)},$$

则不难算出所求证的等式。

ii) $Q(x) = 1 + x^{2n}$ 的根 z_k、$\bar{z}_k$ 为 $z_k = z_0^{2k+1}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$，其中

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2n} + i\,\sin\frac{\pi}{2n}.$$

于是不难求出 $A_k = -\frac{1}{2n} z_0^{(2k+1)(2m+1)}$，接下来利用等比数列求和公式不难得出

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2n\,\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

iii) 对 ii) 中的积分换元 $y = x^{2n}$，不难得出，当 $\alpha = \frac{2m+1}{2n}$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{1+y} \mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

因为形如 $\frac{2m+1}{2n}$ 的 α 在区间 $(0,1)$ 中是稠密的，所以只要说明上述含参积分关于参数 α 连续即可。

对于 $\alpha\in(0,1)$，选一个包含它的闭区间 $[\alpha_0,\alpha_1]\subset(0,1)$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{x^{\alpha_0-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha_1-1}}{1+x}\mathrm{d}x,$$

所以由 Weierstrass 判别法可知，这个含参广义积分对于 $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$ 一致收敛。因为被积函数是连续的，所以积分结果也连续。 □

3. 设 $a,\ b>0$，计算积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x.$$

解答: 首先换元 $y=\sqrt{a}\,x$，得

$$\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{a\,b}{y^2}}\mathrm{d}y.$$

设 $c=a\,b>0$，考虑以下含参广义积分

$$I(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c}{y^2}}\mathrm{d}y,\quad J(c)=-\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c}{y^2}}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

由 Weierstrass 判别法不难看出，$I(c)$ 对于 $c\ge 0$ 一致收敛，$J(c)$ 对于 $c\ge c_0>0$ 一致收敛，于是在 $(0,+\infty)$ 上，有 $I'(c)=J(c)$。在 $J(c)$ 中再做变量替换 $y=\sqrt{c}/x$，不难得到

$$I'(c)=J(c)=-\frac{1}{\sqrt{c}}I(c),$$

注意到 $I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以 $I(c)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{c}}$，于是原积分等于 $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-2\sqrt{a\,b}}$。 □

4. 设 $a,\ b>0$，计算积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2}\cos bx\,\mathrm{d}x,\quad\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2}x\,\sin bx\,\mathrm{d}x.$$

解答: 任取自然数 n，考虑 $\cos bx$ 的 n 阶 Taylor 公式:

$$\cos bx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{b^{2k}x^{2k}}{(2k)!}+R_n(x),\quad |R_n(x)|\le\frac{b^{2n+2}x^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

于是有

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2}\cos bx\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{b^{2k}x^{2k}}{(2k)!}\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\le\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2}\frac{b^{2n+2}x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\mathrm{d}x.$$

若记

$$I_k(a)=\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2}x^{2k}\,\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2}\cos bx\,\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{b^{2k}}{(2k)!}I_k(a)\right|\\ \leq&\frac{b^{2n+2}}{(2n+2)!}I_{n+1}(a).\end{aligned}$$

含参广义积分 $I_k(a)$ 对于 $a\geq a_0>0$ 一致收敛，于是不难证明，对于 $a\in(0,+\infty)$ 有

$$I_0(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}},\quad I_{k+1}(a)=-I_k'(a),$$

由此可得

$$I_k(a)=\sqrt{\pi}\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}a^{-\frac{1}{2}-k}.$$

当 $n\to\infty$ 时，显然有 $\frac{b^{2n+2}}{(2n+2)!}I_{n+1}(a)\to 0$，所以

$$\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2}\cos bx\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{b^{2k}}{(2k)!}I_k(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

对 b 求导即可得另一积分（它们显然对 $b\in\mathbb{R}$ 一致收敛）。 □

5. 设 a, $b>0$，计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,\quad\int_0^{+\infty}\frac{x\,\sin bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$$

解答: 利用

$$\frac{1}{x^2+a^2}=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+a^2)y}\mathrm{d}y$$

可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\cos bx\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+a^2)y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

这个二重含参广义积分满足可换序的条件（关于 x、y 的积分分别一致收敛、且关于绝对值的二重积分存在），于是

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{+\infty}e^{-a^2\,y}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}e^{-x^2\,y}\cos bx\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{+\infty}e^{-a^2\,y}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}e^{-\frac{b^2}{4\,y}}\mathrm{d}y\\ =&\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\,z^2-\frac{b^2}{4\,z^2}}\mathrm{d}z\\ =&\frac{\pi}{2\,a}e^{-a\,b}.\end{aligned}$$

对 b 求导即可得另一积分（它们对 $b \in \mathbb{R}$ 一致收敛，其中导数的一致收敛性需要 Abel-Dirichlet 判别法）。 $\square$

6. 设 $a,\ b > 0$，计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)\arctan(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

解答： 记所求积分为 $I(a,b)$。注意 $\arctan(ax) \le ax$，所以对于 $a, b \in [0, A]$，

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)\arctan(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 A^2\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\pi^2}{4}\frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

所以由 Weierstrass 判别法可知原积分在 $[0, A] \times [0, A]$ 上一致收敛。

记

$$J(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2x^2}\frac{\arctan(bx)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

则它对于 $a \ge a_0 > 0$ 和 $b \in [0, A]$ 一致收敛，所以在 $(0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上，有

$$\frac{\partial}{\partial a} I(a,b) = J(a,b).$$

记

$$K(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2x^2}\frac{1}{1+b^2x^2}\,\mathrm{d}x,$$

则它对于 $a \ge a_0 > 0$ 和 $b \ge b_0 > 0$ 一致收敛，所以在 $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ 上，有

$$\frac{\partial}{\partial b} J(a,b) = K(a,b).$$

不难算出

$$K(a,b) = \frac{\pi}{2(a+b)},$$

对 b 积分，并利用 $J(a, 0) = 0$ 可得

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2}\log\frac{a+b}{a}.$$

再对 a 积分，并利用 $I(0, b) = 0$ 可得

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}.$$

$\square$