数学分析（3）：第 4 次习题课

刘思齐

1. （Raabe）设 $\alpha > 0$，计算

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \log\Gamma(s)\mathrm{d}s.$$

解答： 对 α 求导得：

$$I'(\alpha) = \log\Gamma(\alpha+1) - \log\Gamma(\alpha) = \log\alpha,$$

所以

$$I(\alpha) = \alpha\log\alpha - \alpha + C.$$

取 $\alpha \to 0$ 的极限得

$$\begin{aligned}
C = &\int_0^1 \log\Gamma(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \log\Gamma(1-s)\mathrm{d}s \\
=&\frac{1}{2}\int_0^1 \log\frac{\pi}{\sin s\,\pi}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\log\pi + \log 2\right) \\
=&\log\sqrt{2\,\pi}.
\end{aligned}$$

所以 $I(\alpha) = \alpha\log\alpha - \alpha + \log\sqrt{2\,\pi}$。 □

2. 设 n 是正整数，求证：

i)（Euler）

$$\prod_{k=1}^{n}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\,\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

ii)（Gauss）

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(\alpha+\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\,\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{n\,\alpha+\frac{1}{2}}}\Gamma(n\,\alpha).$$

解答： i) 设待证等式左边为 A，利用余元公式可得：

$$A^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\,\pi}{n}}.$$

再对恒等式：

$$\left|\frac{z^n-1}{z-1}\right| = \prod_{k=1}^{n-1}\left|z-\cos\frac{k\,\pi}{n}-i\,\sin\frac{k\,\pi}{n}\right|$$

两边取 $z\to 1$ 的极限可得：

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\,\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

由此可得 A^2，然后再开方即可。

ii) 即证明

$$\Gamma(x) = \frac{n^{x+\frac{1}{2}}}{(2\,\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{x+k}{n}\right).$$

利用 i) 和 Bohr-Mollerup 定理即可。 □

3. 设 $\alpha>0$，求证：

i)

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+\alpha}\right).$$

其中 γ 是 Euler 常数：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right).$$

ii)

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = -\gamma + \int_0^1\frac{1-t^{\alpha-1}}{1-t}\mathrm{d}t.$$

iii)

$$\Gamma(\alpha+1) = e^{-\gamma\,\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-1}e^{\frac{\alpha}{n}}.$$

iv)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1-\pi\,\alpha\,\cot\pi\,\alpha}{2\,\alpha^2},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2} = \frac{\pi\,\alpha\,\coth\pi\,\alpha-1}{2\,\alpha^2}.$$

v)

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \ldots$$

解答：　i) 对极限

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha\,n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$$

两边取对数导数即可（需要说明对 $\alpha\in(0,+\infty)$ 内闭一致收敛）。

ii) 利用

$$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+\alpha}=\int_0^1\left(1-t^{\alpha-1}\right)t^k\,\mathrm{d}t.$$

（需要将 $[0,1]$ 分成 $[0,1-\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,1]$，然后取 $\varepsilon\to 0$ 的极限。）

iii) 对 i) 中的 α 从 1 到 $\alpha+1$ 积分。

iv) 考虑余元公式的对数导数，并利用 i)。

v) 对 iv) 中的 α 求导，然后取 $\alpha\to 0$ 的极限（或直接考虑它在 $\alpha=0$ 附近的 Tayler 展开）。

□

4. 证明或计算：

i)

$$\Gamma'(1)=-\gamma,\quad \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\pi}(\gamma+2\log 2),$$
$$\Gamma''(1)=\gamma^2+\frac{\pi^2}{6},\quad \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}+(\gamma+2\log 2)^2\right),$$
$$\Gamma'''(1)=-\gamma^3-\gamma\frac{\pi^2}{2}-2\,\zeta(3),\quad \Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)=?$$

ii)

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\log x\,\mathrm{d}x=-\gamma\frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\log^2 x\,\mathrm{d}x=\gamma^2\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^3}{24},$$
$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\log^3 x\,\mathrm{d}x=?$$

解答：　i) 对前一题 i) 中的 α 求导，然后取 $\alpha=1$ 或 $\alpha=\frac{1}{2}$ 即可。

ii) 对恒等式

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x^s}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\,\Gamma(s)\,\sin\frac{\pi s}{2}}$$

中的 s 求导，然后取 $s=1$ 即可。　□