数学分析（3）：第 7 次习题课

刘思齐

1. 设 f 是 $[0, 2\pi]$ 上的实值单调函数，将其延拓为以 2π 为周期的函数，设 c_n 是它的 Fourier 系数，求证：存在常数 $C > 0$，使得对任意的 $n \in \mathbb{Z}$，

$$|n\, c_n| \leq C.$$

解答：　根据第二积分中值定理，存在 $\xi \in [0, 2\pi]$，使得

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i\,n\,x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{f(0+)}{2\pi} \int_0^{\xi} e^{-i\,n\,x} \mathrm{d}x + \frac{f(2\pi-)}{2\pi} \int_{\xi}^{2\pi} e^{-i\,n\,x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{f(0+)}{2\pi} \left[\frac{e^{-i\,n\,x}}{-i\,n} \right]_0^{\xi} + \frac{f(2\pi-)}{2\pi} \left[\frac{e^{-i\,n\,x}}{-i\,n} \right]_{\xi}^{2\pi} \\ &= \frac{f(2\pi-) - f(0+)}{2\pi} \frac{1 - e^{-i\,n\,\xi}}{-i\,n} \end{aligned}$$

于是

$$|n\, c_n| \leq \frac{1}{\pi} \left| f(2\pi-) - f(0+) \right|.$$

□

2. 求证：若发散级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是 Cesàro 可和的，则它也是 Abel 可和的。

解答：　根据 Cesàro 可和性的定义，我们引入记号：

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}, \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \left(s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} \right),$$

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是 Cesàro 可和的意味着极限 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ 存在，记之为 σ。

根据 s_n、σ_n 的定义易知

$$a_n = s_{n+1} - s_n = (n+1)\, \sigma_n - 2\, n\, \sigma_n + (n-1)\, \sigma_{n-1},$$

于是

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)\, \sigma_n - 2\, n\, \sigma_n + (n-1)\, \sigma_{n-1} \right) r^n.$$

经过简单的计算可得：

$$A(r)=\frac{(1-r)^2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}n\,\sigma_n r^n,$$

我们的目标即证明 $\lim_{r\to1^-}A(r)=\sigma$。

对于任意的 $\varepsilon>0$，根据 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对于任意的 $n>N$，有

$$|\sigma_n-\sigma|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是有

$$\begin{aligned}
&|A(r)-\sigma|=\left|\frac{(1-r)^2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}n\,\sigma_n r^n-\sigma\right|\\
\le&\left|\frac{(1-r)^2}{r}\sum_{n=1}^{N}n\,\sigma_n r^n\right|+\left|\frac{(1-r)^2}{r}\sum_{n=N+1}^{\infty}n\,(\sigma_n-\sigma)r^n\right|\\
&+\left|\frac{(1-r)^2}{r}\sum_{n=N+1}^{\infty}n\,\sigma r^n-\sigma\right|\\
\le&(1-r)^2P(r)+\frac{\varepsilon}{2}\,r^N\,(1+N(1-r))+|\sigma|\,\left|r^N\,(1+N(1-r))-1\right|
\end{aligned}$$

当 $r\to1^-$ 时，右边的极限为 $\frac{\varepsilon}{2}$，所以必存在 $\delta>0$，使得对任意的 $r\in(1-\delta,1)$，有 $|A(r)-\sigma|<\varepsilon$。 □

3. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数，求证：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin\lambda x|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解答： 两个极限的证明是差不多的，我们只证第一个。

首先考虑 $f(x)=1$ 时的情况。设 $k_{\min}$、$k_{\max}$ 是满足如下条件的整数：

$$\left(k_{\min}-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\lambda}\le a<\left(k_{\min}+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\lambda},$$
$$\left(k_{\max}-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\lambda}\le b<\left(k_{\max}+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\lambda},$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x\\
=&\left(\int_a^{\left(k_{\min}+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\lambda}}-\int_b^{\left(k_{\max}+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\lambda}}+\sum_{i=1}^{k_{\max}-k_{\min}}\int_{\left(k_{\min}-\frac{1}{2}+i\right)\frac{\pi}{\lambda}}^{\left(k_{\min}+\frac{1}{2}+i\right)\frac{\pi}{\lambda}}\right)|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

在上式的每个积分区间上 $\cos\lambda x$ 符号恒定，于是绝对值号可以去掉，相应的积分可直接算出（略）。于是有：

$$\int_a^b |\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{2}{\lambda}(k_{\max} - k_{\min}).$$

另一方面，由 $k_{\min}$、$k_{\max}$ 的定义可知：

$$\frac{2}{\pi}(b-a) - \frac{2}{\lambda} < \frac{2}{\lambda}(k_{\max} - k_{\min}) < \frac{2}{\pi}(b-a) + \frac{2}{\lambda},$$

所以有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b |\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}(b-a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \frac{2}{\pi}(b-a).$$

接下来考虑一般情况。对于任意的 $\varepsilon > 0$，取一个 $[a,b]$ 的分拆 $P = \{I_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ 使得

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon,$$

于是有

$$\begin{aligned}\limsup_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x &= \limsup_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^n \int_{I_i} f(x)\,|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x \\ \le \limsup_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^n M_i \int_{I_i}|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n M_i\left(\frac{2}{\pi}\,|I_i|\right) = \frac{2}{\pi}\overline{S}(f,P)\end{aligned}$$

同理可得

$$\liminf_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\cos\lambda x|\,\mathrm{d}x \ge \frac{2}{\pi}\underline{S}(f,P),$$

再令 $\varepsilon\to 0$ 即可。 □

4. （Gibbs 现象）设

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}, \quad S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x).$$

i) 求 $S(x)$、$S(0+)$、$S(0-)$。

ii) 设

$$A_N = \max_{x\in(0,\pi)}\left(S_N(x) - S(x)\right),$$

求证：

$$\lim_{N\to\infty} A_N = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}.$$

（注：此例说明，不论取多少项 Fourier 级数，间断点附近的误差是恒定的。）

解答： i) 当 $x = 0$ 时，$S(x) = 0$；当 $0 < x < \pi$ 时，$S(x) = \frac{\pi - x}{2}$；当 x 取其它值时，可利用 $S(x)$ 的周期性和奇偶性将它归结为 $[0,\pi)$ 上的情形。由此不难得出 $S(0+) = \frac{\pi}{2}$、$S(0-) = -\frac{\pi}{2}$。

ii) 设 $f_N(x)=S_N(x)-S(x)$，不难证明：

$$f_N'(x)=\sum_{n=1}^{N}\cos nx+\frac{1}{2}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

于是 $f_N(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的全部驻点为

$$x_k=\frac{2k\pi}{2N+1},\quad k=1,2,\ldots,N.$$

进一步的分析可知：当 k 为奇数时，$f_N(x_k)$ 取极大值；当 k 为偶数时，$f_N(x_k)$ 取极小值；$f_N(x_1)$ 是整个区间上的最大值（这一步不容易）。所以有：

$$A_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2\,n\,\pi}{2N+1}\right)+\frac{2\pi}{2N+1}-\frac{\pi}{2}.$$

上式中的和式可解释为积分 $I=\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 的一个 Riemann 和，所以当 $N\to\infty$ 时，有 $A_N\to I-\frac{\pi}{2}$。 □

5. 设 $\gamma=1+\sqrt{2}$，$x_n=\langle\gamma^n\rangle$，求证：$\{x_n\}$ 不是等分布的。

解答： 设 $\gamma^n=a_n+b_n\sqrt{2}$，其中 a_n、b_n 是自然数。显然，这两个系数满足如下递推关系：

$$a_{n+2}=a_n+2b_n,\quad b_{n+1}=a_n+b_n,$$

且 $a_1=b_1=1$。由此不难证明：

$$a_n^2-2b_n^2=(-1)^n\Rightarrow a_n-b_n\sqrt{2}=\frac{(-1)^n}{\gamma^n},$$

所以有

$$\gamma^n=2a_n+\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n}.$$

注意 $2a_n\in\mathbb{N}$、$\gamma>2$，所以上式说明，当 $n\to\infty$ 时，γ^n 到某个整数的距离将趋于零。所以，对于任意闭区间 $[a,b]\subsetneqq[0,1]$，当 n 充分大时 $\sum_{n:\langle\gamma^n\rangle\in[a,b]}1$ 是一个与 n 无关的常数，于是等分布性质不成立。 □