# 数学分析（3）：第 10 次作业

刘思齐

固定一个 $\varepsilon > 0$，一个连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 叫做 $\varepsilon$-慢速下降的，如果存在 $A > 0$ 使得

$$|f(x)| < \frac{A}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}.$$

所有这样的函数构成的集合记为 $M_\varepsilon$。求证：

1. $M_\varepsilon$ 是一个线性空间。

2. 若 $f(x) \in M_\varepsilon$，则对于 $\forall h \in \mathbb{R}$，$f(x-h) \in M_\varepsilon$。

3. 若 $f(x) \in M_\varepsilon$，则对于 $\forall \delta \in \mathbb{R}$，$f(\delta x) \in M_\varepsilon$。

4. 若 $f \in M_\varepsilon$，则 $f$ 绝对可积（于是 $\hat{f}$ 存在）。

5. 若 $f \in M_\varepsilon$、$\hat{f} \in M_\varepsilon$，则存在 $B > 0$，使得

$$|f(x+h) - f(x)| \leq B\,|h|^\varepsilon.$$

（即 $\varepsilon$-Hölder 连续。）

6. 若 $f \in M_\varepsilon$、$\hat{f} \in M_\varepsilon$，则对 $\forall x \in \mathbb{R}$，

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \mathrm{d}\xi.$$

（即 Fourier 反演公式处处成立。）

7. 若 $f, g \in M_\varepsilon$，则 $f * g \in M_\varepsilon$。

8. 对于 $f \in M_\varepsilon$，定义

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x}.$$

若 $f \in M_\varepsilon$、$\hat{f} \in M_\varepsilon$，求证：$\|f\| = \|\hat{f}\|$。

解答： 1. 显然。

2. 考虑函数

$$\lambda_h(x) = \frac{1 + |x|^{1+\varepsilon}}{1 + |x-h|^{1+\varepsilon}},$$

当 $x\to\pm\infty$ 时，$\lambda\to 1$，所以 $\lambda_h(x)$ 对于所有的 $x\in\mathbb{R}$ 有界。设 $\lambda_h(x)$ 的最大值为 $M_h$，则有

$$|f(x-h)|<\frac{A}{1+|x-h|^{1+\varepsilon}}\le\frac{A\,M_h}{1+|x|^{1+\varepsilon}},$$

所以 $f(x-h)\in M_\varepsilon$。

3. 与 2. 同理。

4. 显然。

5. （此题缺条件 $0<\varepsilon<1$，否则不对。）根据 6. 的反演公式：

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)|&=\left|\int_{\mathbb{R}}\hat f(\xi)\left(e^{2\pi i\xi(x+h)}-e^{2\pi i\xi x}\right)\mathrm{d}\xi\right|\\ \le\int_{\mathbb{R}}\left|\hat f(\xi)\right|\left|e^{2\pi i\xi h}-1\right|\mathrm{d}\xi&\le 4A\int_0^\infty\frac{|\sin\pi\xi h|}{1+\xi^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

设 $y=\xi h$，则有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{|\sin\pi\xi h|}{1+\xi^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}\xi&<h^\varepsilon\int_0^\infty\frac{|\sin\pi y|}{y^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}y\\ \le h^\varepsilon\left(\int_0^1\frac{\pi y}{y^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}y+\int_1^\infty\frac{1}{y^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}y\right)&=h^\varepsilon\left(\frac{\pi}{1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

6. 与 Stein & Shakarchi 第 141 页定理 1.9 一样。

7. 设

$$|f(x)|<\frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}},\quad |g(x)|<\frac{B}{1+|x|^{1+\varepsilon}},$$

于是

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)|&=\left|\int_{\mathbb{R}}f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\right|\le\int_{\mathbb{R}}\frac{A}{1+|x-y|^{1+\varepsilon}}\frac{B}{1+|y|^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}y\\ \le&A\,B\left(\int_{|y|\le\frac{|x|}{2}}+\int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\left(1+|x-y|^{1+\varepsilon}\right)\left(1+|y|^{1+\varepsilon}\right)}\\ \le&A\,B\left(\frac{1}{1+\left|\frac{x}{2}\right|^{1+\varepsilon}}\int_{|y|\le\frac{|x|}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{1+|y|^{1+\varepsilon}}+\frac{1}{1+\left|\frac{x}{2}\right|^{1+\varepsilon}}\int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{1+|x-y|^{1+\varepsilon}}\right)\\ \le&\frac{4\,A\,B}{1+\left|\frac{x}{2}\right|^{1+\varepsilon}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}y}{1+y^{1+\varepsilon}}\end{aligned}$$

上式右边的积分是收敛的，所以有

$$|(f*g)(x)|<\frac{C}{1+\left|\frac{x}{2}\right|^{1+\varepsilon}},$$

再由 3. 可知，$f*g\in M_\varepsilon$。

8. 与 Stein & Shakarchi 第 143 页定理 1.12 一样。 $\square$