数学分析（3）期中试题　　卷 A　　2015.11.14

一、（15 分）设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$、$Y \subseteq \mathbb{R}^m$ 是两个非退化有界闭区间，f 是 $X \times Y$ 上的连续可微函数，$x_0 \in X$。求证：当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x, y)$ 对于 $y \in Y$ 一致收敛于极限函数 $f(x_0, y)$。

二、（15 分）设 $\mu > 0$，且不是偶数。

i) 求证：函数 $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$ 满足如下微分方程：

$$(1 - x^2) f''(x) - x\, f'(x) + \mu^2 f(x) = 0.$$

ii) 利用上述微分方程计算 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近的 Taylor 级数，并确定其收敛区域。

三、（15 分）设 f 是闭区间 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续可微函数，求证：对任意的 $\varepsilon > 0$，存在多项式 $P \in \mathbb{R}[x]$，使得对任意的 $x \in [a, b]$，有

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad |f'(x) - P'(x)| < \varepsilon.$$

四、（15 分）

i) 求证：如下广义积分收敛

$$I = \int_0^1 \frac{\log(t)\, \log(1-t)}{t\,(1-t)} \mathrm{d}t.$$

ii) 求证：函数项级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(t)}{n} t^{n-1}$$

对于 $t \in [0, 1]$ 一致收敛。

iii) 利用 i)、ii) 证明：$I = 2\zeta(3)$，即

$$I = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

五、（20 分）设

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty}\cos(x^{\alpha})\mathrm{d}x.$$

i) 求证：对于 $\alpha_0 > 1$，$I(\alpha)$ 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛。

ii) 求极限

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha).$$

iii) 试计算 $I(\alpha)$。

六、（20 分）

i) 对自然数 n，定义

$$K_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2\,x^2},$$

求证：

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x)\mathrm{d}x = 1,$$

且对任意的 $\delta > 0$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|>\delta} K_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

ii) 对自然数 n，定义

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} K_n(x-y)\sin^2 y\,\mathrm{d}y,$$

求证：$\{f_n\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 $f(x) = \sin^2 x$。