数学分析（3）期末试题参考答案及评分标准

一、（15 分）求下列函数的 Fourier 级数：

$$\text{i)}\quad u(x) = e^{\cos x}\cos(\sin(x))\,; \qquad \text{ii)}\quad v(x) = e^{\cos x}\sin(\sin(x))\,.$$

解答：　（解法一）函数 $u(x)$ 是偶函数，所以它的 Fourier 级数是余弦级数。由 e^y 和 $\cos y$ 的性质可知，对任意的 $x \in \mathbb{R}$，以下级数绝对一致收敛：

$$e^{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cos^n x, \quad \cos(\sin x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\sin^{2m} x,$$

所以它们相乘后得到的二重级数可按任意顺序求和，特别地

$$\begin{aligned}
u(x) =& e^{\cos x}\cos(\sin(x)) \\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!\,(2m)!}\cos^n x \sin^{2m} x \\
=& \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}\sum_{m=0}^{[N/2]}(-1)^m \frac{N!}{(N-2m)!\,(2m)!}\cos^{N-2m} x \sin^{2m} x \\
=& \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\cos Nx}{N!}
\end{aligned}$$

这里用到如下三角恒等式，它可由数学归纳法证明：

$$\cos Nx = \sum_{m=0}^{[N/2]}(-1)^m \binom{N}{2m}\cos^{N-2m} x\ \sin^{2m} x.$$

注意在上述 $u(x)$ 的三角级数表达式中的系数是衰减很快的，所以不难证明如下级数

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{\cos Nx}{N!}\cos nx$$

对于 $x \in [0,\ 2\pi]$ 一致收敛，于是可逐项积分，所以有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\,\cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{n!},$$

这说明上述 $u(x)$ 的三角级数表达式就是 $u(x)$ 的 Fourier 级数。

类似地，利用如下三角恒等式

$$\sin Nx = \sum_{m=0}^{[(N-1)/2]} (-1)^m \binom{N}{2m+1} \cos^{N-2m-1} x\, \sin^{2m+1} x$$

可证明 $v(x)$ 的 Fourier 级数是

$$v(x) = e^{\cos x} \sin\left(\sin(x)\right) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\sin Nx}{N!}.$$

（解法二）显然 $u(x)$ 是偶函数、$v(x)$ 是奇函数，所以它们的 Fourier 级数分别是余弦级数和正弦级数，设

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

对于 $n \geq 1$，有:

$$\begin{aligned}
&a_n + b_n \\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(u(x)\cos nx + v(x)\sin nx\right)\,\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin nx}{n}\right) + v(x)\,\mathrm{d}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) \\
=&\frac{1}{n\,\pi}\int_0^{2\pi} -\sin nx\,\mathrm{d}u(x) + \cos nx\,\mathrm{d}v(x) = \cdots\cdots \\
=&\frac{1}{n\,\pi}\int_0^{2\pi} \left(u(x)\cos(n-1)x + v(x)\sin(n-1)x\right)\,\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{n}\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right),
\end{aligned}$$

同理可得，

$$a_n - b_n = \frac{1}{n}\left(-a_{n+1} + b_{n+1}\right),$$

特别地

$$a_1 - b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}v(x) = 0.$$

利用上述三组关系、以及 $b_0 = 0$ 可解得：

$$a_n = b_n = \frac{a_0}{2n!}.$$

最后，注意 $u(x)$ 是光滑函数，所以其 Fourier 级数处处收敛到 $u(x)$。取 $x = 0$ 得

$$e = u(0) = \frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

所以 $a_0 = 2$。于是，$u(x)$、$v(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}, \quad v(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}.$$

□

（注：课上介绍如何从三角级数反求其和函数时讲过这两个例子，这里只不过是反过来：已知和函数，求 Fourier 级数。所以，答案是已知的，只要设法算出来就行。以上两种解法如果改用复数来写会更简单，这里就不啰嗦了。

评分标准：只要算出答案，即使过程不太严谨，也会给满分。若答案略有瑕疵，会酌情扣 $1 \sim 2$ 分。根据奇偶性指出答案分别是余弦级数和正弦级数可得 1 分。其它情况不得分。）

二、（15 分）

i) 设 $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是两个周期为 2π 的 Riemann 可积函数。求证：若它们具有相同的 Fourier 系数，则它们几乎处处相等。

ii) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是周期为 2π 的连续函数，$\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是它的 Fourier 系数。求证：若 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n| < +\infty$，则 f 的 Fourier 级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 f。

解答： i) 设 $h=f-g$，则 h 的 Fourier 系数全是 0，由 Parsevel 等式，

$$\int_0^{2\pi} |h(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0,$$

所以 h 几乎处处为零，于是 f 和 g 几乎处处相等。

ii) 设 $g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\,n\,x}$，因为 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$，根据 Weierstrass 判别法，该级数在整个实轴上一致收敛，于是 g 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的连续函数。仍由 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$ 可知，级数

$$g(x)e^{-i\,m\,x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\,(n-m)\,x}$$

对于 $x\in[0,\ 2\pi]$ 一致收敛，于是可逐项积分，所以有

$$\tilde{c}_m = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-i\,m\,x}\mathrm{d}x = c_n,$$

所以 g 和 f 拥有相同的 Fourier 系数，由 i) 可知它们几乎处处相等。又因为它们都是连续函数，所以处处相等，所以 f 的 Fourier 级数一致收敛到它自己。 $\square$

（注：第 i) 问也可用均方收敛性的其它等价写法，或者好核性质加 Riemann 可积函数几乎处处连续来证。此处略。

评分标准：第 i) 问 7 分。第 ii) 问 8 分，其中利用 Weierstrass 判别法得一致收敛 2 分，说明 g 和 f 具有相同的 Fourier 系数 3 分，最后几乎处处相等加连续得出结论 3 分。）

三、（20 分）设 f 是周期为 $2\,\pi$ 的奇函数，且对于 $x\in[0,\pi]$ 有

$$f(x) = x(\pi - x).$$

i) 求 f 的 Fourier 级数；

ii) 计算无穷级数的值：

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

解答: i) 因为 f 是奇函数，所以其 Fourier 级数是正弦级数，于是

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

分部积分两次可得

$$b_n = \frac{4(1 + (-1)^{n-1})}{\pi \, n^3} = \begin{cases} \frac{8}{\pi \, (2k+1)^3}, & n = 2k+1; \\ 0, & n = 2k, \end{cases}$$

所以

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi \, (2k+1)^3} \sin(2k+1)x.$$

ii) 注意，f 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处可导，所以由 Dirichlet 定理，f 的 Fourier 级数在该点处收敛，于是有

$$\frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi \, (2k+1)^3} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2},$$

整理得

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

另一方面，利用 Parsevel 等式可得

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

整理得:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960},$$

再由

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{64} S_2$$

可得

$$S_2 = \frac{\pi^6}{945}.$$

□

（注：这是 Stein 书中的原题，纯送分。

评分标准：第 i) 问 10 分，第二问每个和式 5 分。若第 i) 问算错系数导致第 ii) 问做错，酌情扣 $1 \sim 2$ 分。）

四、（15 分）设 $\mathcal{S}$ 是 Schwartz 速降函数空间，$\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 是其上的 Fourier 变换。定义运算 $\mathcal{P}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$，

$$f \mapsto \mathcal{P}(f) = \frac{1}{2}\left(f \cdot \mathcal{F}^2(f) + \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}^3(f)\right),$$

其中 $\cdot$ 表示乘法，$\star$ 表示卷积。

i) 求证：对于任意的 $f \in \mathcal{S}$，$\mathcal{F}\left(\mathcal{P}\left(f\right)\right) = \mathcal{P}\left(f\right)$；

ii) 对于 $g(x) = e^{-\pi x^2}$，试求一个 $f \in \mathcal{S}$，使得 $g = \mathcal{P}\left(f\right)$。

解答： i) 根据卷积的性质和 Fourier 变换的性质，

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\mathcal{P}\left(f\right)\right) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(f \cdot \mathcal{F}^2(f)\right) + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}^3(f)\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}^3(f) + \frac{1}{2}\mathcal{F}^2(f) \cdot \mathcal{F}^4(f) \\
&= \frac{1}{2}\left(f \cdot \mathcal{F}^2(f) + \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}^3(f)\right) = \mathcal{P}\left(f\right).
\end{aligned}$$

ii) 取 $f = g^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}x^2}$，则 $\mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x) = f(x)$，

$$\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}^3(f) = \mathcal{F}\left(f \cdot \mathcal{F}^2(f)\right) = \mathcal{F}\left(f^2\right) = \mathcal{F}\left(g\right) = g,$$

所以

$$\mathcal{P}\left(f\right) = \frac{1}{2}\left(f \cdot \mathcal{F}^2(f) + \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}^3(f)\right) = \frac{1}{2}\left(g + g\right) = g.$$

□

（注：第 i) 问为送分题（然而并没有送出去）。第 ii) 问需要猜一下。

评分标准：第 i) 问 10 分。第 ii) 问 5 分。）

五、（15 分）设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是偶函数，满足 $\mathrm{supp}(f) \subseteq [-A, A]$，且 f 在 $[-A, A]$ 上 Riemann 可积。设 $\hat{f}(\xi)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 变换。求证：

i) $\hat{f}(\xi)$ 是一个光滑函数；

ii) $\hat{f}(\xi)$ 可在 $\xi=0$ 处展开为收敛半径为无穷大的 Taylor 级数。

解答：　i) 根据已知条件，

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, \mathrm{d}x = \int_{-A}^{A} f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^A 2\, f(x)\, \cos\left(2\pi\, \xi\, x\right)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

设 $F(\xi, x) = 2\, f(x)\, \cos\left(2\pi\, \xi\, x\right)$，根据含参积分部分的有关结果，

$$\hat{f}'(\xi) = \int_0^A \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x) \mathrm{d}x = -4\pi \int_0^A x\, f(x)\, \sin\left(2\pi\, \xi\, x\right)\, \mathrm{d}x,$$

所以 $\hat{f}'(\xi)$ 存在。类似地，可证明 $\hat{f}^{(k)}(\xi)$ 存在。

ii) $\hat{f}(\xi)$ 显然是偶函数，所以它在 $\xi=0$ 处的 Taylor 级数为

$$\hat{f}(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \xi^{2k},$$

其中

$$a_{2k} = \frac{2\, (2\pi)^{2k}\, (-1)^k}{(2k)!} \int_0^A x^{2k}\, f(x) \cos\left(2\pi\, \xi\, x\right)\, \mathrm{d}x.$$

设 $M = \sup_{0\le x\le A} |f(x)|$，根据 Cauchy-Hadamard 公式，

$$0 \le R^{-1} = \limsup_{k\to\infty} |a_{2k}|^{\frac{1}{2k}} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{2\pi\, A\, \left(2\, A\, M\right)^{\frac{1}{2k}}}{\left((2k)!\right)^{\frac{1}{2k}}} = 0,$$

所以 $R = +\infty$。由此不难知道，对于任意的 $\xi \in \mathbb{R}$，$\hat{f}(\xi)$ 的 Taylor 级数收敛到它自己。 □

（注：此题结论又称紧支型 Paley-Wiener 定理，实为送分题（然而又没有送出去）。更多信息可参看 Stein 和 Shakarchi 的《复分析》的第四章。

评分标准：第 i) 问 7 分，第 ii) 问 8 分。）

六、（20 分）设 $\alpha \in \mathbb{R}$、f 是周期为 2π 的奇函数，且对于 $x \in (0,\pi)$ 有

$$f(x) = \cosh\left(\alpha\, \left(2\, x - \pi\right)\right).$$

i) 求 f 的 Fourier 级数；

ii) 求证：

$$\frac{\pi}{\cosh \pi \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{\alpha^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2};$$

iii) 计算 $g(x) = \frac{1}{\cosh \pi x}$ 的 Fourier 变换。

解答： i) 与第三题类似，

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh\left(\alpha\ (2x - \pi)\right) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

分部积分两次可得

$$b_n = \frac{\cosh(\alpha \pi)}{\pi} \frac{2n\,(1 + (-1)^{n-1})}{4\alpha^2 + n^2}$$

所以

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cosh(\alpha \pi)}{\pi} \frac{2k+1}{\alpha^2 + \left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2k+1)x.$$

ii) 仍取 $x = \frac{\pi}{2}$ 即可。

iii) 根据定义，并换元 $y = \pi x$ 得：

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{\cosh \pi x} \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\xi y)}{\cosh y} \mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(2\xi y)\ \frac{e^{-y}}{1 + e^{-2y}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(2\xi y)\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)y} \mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4\xi^2 + (2k+1)^2} = \frac{1}{\cosh \pi \xi}.
\end{aligned}$$

最后一步用到第 ii) 问的结论。

上面只是形式推导，为了说明其中对级数逐项积分运算的合理性，还需要验证一些一致收敛性质，并将积分区间分割成 $[0, \varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty]$。（这些细节在期中考试时已经充分练习过，这里就省略了。） □

（注：此题前两问与第三题非常类似，它们主要是为了给第 iii) 问铺路。第 iii) 问是一个著名的 Fourier 变换等于自身的函数的例子。若直接将第 ii) 问结论代入最初的积分并逐项积分，会得到所谓的 Poisson 积分。Poisson

积分并不能用 Newton-Leibniz 公式算出，但是可以用其它含参积分技术求出，由此也可得到想要的结果。

评分标准：第 i)、ii) 问各 5 分，第 iii) 问 10 分。）