数学分析（3）：第 1 次习题课

刘思齐

本次习题课给出 Weierstrass 逼近定理的几种不同的证明。

Weierstrass 逼近定理 设 $f \in C[a,b]$，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个多项式 P，使得对任意的 $x \in [a,b]$，有 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$。

（证法一）

1. 如果对闭区间 $[0,1]$，Weierstrass 逼近定理成立，则对任意闭区间 $[a,b]$ 定理也成立。

2. 对自然数 n，以及 $i = 0, 1, \ldots, n$，定义：
$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i},$$
求证：
   i) 对 $x \in [0,1]$，有 $0 \le B_i^n(x) \le 1$；
   ii) $\sum_{i=0}^n B_i^n(x) = 1$；
   iii) $\sum_{i=0}^n i\, B_i^n(x) = n\, x$；
   iv) $\sum_{i=0}^n i^2\, B_i^n(x) = n\, x\, (1 + (n-1)\, x)$；
   v) $\sum_{i=0}^n (i - n\, x)^2 B_i^n(x) = n\, x\, (1-x)$。

3. 对 $f \in C[0,1]$，定义
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x),$$
求证：P_n 一致收敛到 f，于是 Weierstrass 逼近定理成立。

（证法二）

1. 如果对闭区间 $[0,1]$ 以及 $f \in C[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$，Weierstrass 逼近定理成立，则对任意闭区间 $[a,b]$ 以及 $f \in C[a,b]$ 定理也成立。

2. 对自然数 n 定义：
$$Q_n(x) = c_n\, (1 - x^2)^n,$$
其中 c_n 使得 $\int_{-1}^1 Q_n(x) \mathrm{d}x = 1$。求证：$c_n < \sqrt{n}$。

3. 设 $f \in C[0,1]$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$，将它在整个 $\mathbb{R}$ 上做零延拓（即当 $x \notin [0,1]$ 时，规定 $f(x) = 0$）。定义：

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t) \mathrm{d}t,$$

求证：

   i) 对任意的自然数 n，$P_n(x)$ 是多项式；

   ii) P_n 一致收敛到 f，于是 Weierstrass 逼近定理成立。

（证法三）

1. 对自然数 n 定义：

$$K_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2},$$

求证：

   i) $\int_{\mathbb{R}} K_n(x)\, \mathrm{d}x = 1$；

   ii) 对任意的 $\delta > 0$，$\lim_{n \to \infty} \int_{|x| > \delta} K_n(x)\, \mathrm{d}x = 0$；

   iii) 对任意的 $M > 0$，$K_n(x)$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 级数在 $[-M, M]$ 上一致收敛到 $K_n(x)$。

2. 对 $\mathbb{R}$ 上的有界一致连续函数 f，定义

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, K_n(x-t) \mathrm{d}t,$$

求证：f_n 一致收敛到 f。

3. 利用前两题的结论证明 Weierstrass 逼近定理。