数学分析（3）：第 10 次习题课

刘思齐

设 $\mathscr{S}$ 是 Schwartz 速降函数空间，$\mathscr{T} = D(\mathscr{S})$（即速降函数的导数构成的空间），则 $\mathscr{T}$ 显然是 $\mathscr{S}$ 的子空间。

1. 任取一个 $f_0 \in \mathscr{S}$ 满足 $\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\mathrm{d}x = 1$。对于 $f \in \mathscr{S}$，定义：
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} (f(y) - \lambda f_0(y))\, \mathrm{d}y, \quad \text{其中 } \lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x.$$
求证：$F \in \mathscr{S}$。（提示：考虑 F 的 Fourier 变换）

2. 求证：$\mathscr{S} = \mathbb{C}f_0 \oplus \mathscr{T}$。

3. 求证：对于任意的 $\phi \in \mathscr{S}'$，以及 $C \in \mathbb{C}$，存在唯一的 $\psi \in \mathscr{S}'$ 满足：
$$\psi' = \phi, \quad \psi(f_0) = C.$$

4. 若 $\psi \in \mathscr{T}$ 满足 $\psi' = 0$，则 ψ 是一个常数，即存在 $c \in \mathbb{C}$，使得对于任意的 $f \in \mathscr{S}$，有
$$\psi(f) = \int_{\mathbb{R}} c\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

5. 若 $\phi \in \mathscr{S}$ 满足 $x\,\phi = 0$，求证：存在一个常数 $c \in \mathbb{C}$，使得 $\phi = c\,\delta$。（提示：考虑 $x\,\phi$ 的 Fourier 变换）

6. 求方程 $(x - x_0)\phi = 0$ 的通解，其中 $\phi \in \mathscr{S}'$。

7. 求方程 $(x - x_0)^n\phi = 0$ 的通解，其中 $\phi \in \mathscr{S}'$、$n \in \mathbb{N}$。

8. 求方程 $(x - x_1)^n(x - x_2)^m\phi = 0$ 的通解，其中 $\phi \in \mathscr{S}'$、$x_1 \neq x_2$、$n, m \in \mathbb{N}$。

9. 求方程 $P(x)\phi = 0$ 的通解，其中 $P \in \mathbb{C}[x]$、$\phi \in \mathscr{S}'$。

10. 求线性常系数常微分方程 $P(D)\phi = 0$ 的通解，其中 $P \in \mathbb{C}[\xi]$、$\phi \in \mathscr{S}'$。