数学分析（3）：第 3 次习题课

刘思齐

1. （Froullani 积分）设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，$a,b>0$。考虑含参广义积分：
$$I(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{f(b\,x)-f(a\,x)}{x}\mathrm{d}x.$$
   i) 若极限
   $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=:f(+\infty)$$
   存在，则 $I(a,b)=(f(0)-f(+\infty))\log\frac{a}{b}$；
   ii) 若存在 $A>0$ 使得广义积分
   $$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$
   存在，则 $I(a,b)=f(0)\log\frac{a}{b}$。

2. i) 设 $P(x)$、$Q(x)$ 是实系数多项式，满足 $Q(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$，且广义积分
   $$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$$
   收敛。设 $Q(x)$ 的根为 $z_j,\bar{z}_j$ $(j=1,\ldots,n)$，其中 $\mathrm{Im}(z_j)>0$。若 $z_j\neq z_k$ $(j\neq k)$，求证：
   $$I=2\,\pi\,i\sum_{j=1}^{n}\frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}.$$
   ii) 设 m、n 是自然数，满足 $m<n$。计算
   $$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x.$$
   iii) 设 $0<\alpha<1$，计算
   $$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

3. 设 $a,\ b>0$，计算积分
$$\int_0^{+\infty}e^{-a\,x^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x.$$

4. 设 a，$b>0$，计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\,x^2}\cos bx\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} e^{-a\,x^2}x\ \sin bx\,\mathrm{d}x.$$

5. 设 a，$b>0$，计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x\ \sin bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$$

6. 设 a，$b>0$，计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)\arctan(bx)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$