# 数学分析（3）：第 5 次习题课

刘思齐

记号约定: 设 $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化闭区间, $R(I)$ 表示 $I$ 上 Riemann 可积的复值函数的全体构成的线性空间。对于任意的 $p > 0$，定义一个 $R(I)$ 上的运算:

$$\|\cdot\|_p : R(I) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们在课堂上已经说过，运算 $\|\cdot\|_p$ 满足范数的大部分性质。如果规定 $R(I)$ 中的相等是几乎处处相等（或者把 $R(I)$ 重新定义为它模去几乎处处相等这个等价关系之后剩下的商空间），那么 $\|\cdot\|_p$ 就是一个范数，于是 $(R(I), \|\cdot\|_p)$ 构成一个赋范空间，记为 $R^p(I)$。

特别地，若 $I = [-\pi, \pi]$，我们记

$$R(S^1) = \{f \in R(I) \mid f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

类似地，也可定义 $R^p(S^1)$。

1. 存在一个函数列 $\{f_n\}$，满足 $f_n \in R^p(I)$，$f_n \to f$（在 $\|\cdot\|_p$ 的意义下），但 $f$ 是 $I$ 上的无界函数。

2. 存在一个函数列 $\{f_n\}$，满足 $f_n \in R^p(I)$，$f_n \to f$（在 $\|\cdot\|_p$ 的意义下），且 $f_n$ 一致有界（于是 $f$ 也有界），但 $f$ 不是 $I$ 上的 Riemann 可积函数。

3. 设 $f \in R(S^1)$，$c_n \in \mathbb{C}$ 是它的 Fourier 系数。如果 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$，求证：$f$ 的 Fourier 级数一致收敛，且其和函数与 $f$ 几乎处处相等。