数学分析（3）：第 7 次习题课

刘思齐

1. 设 f 是 $[0, 2\pi]$ 上的实值单调函数，将其延拓为以 2π 为周期的函数，设 c_n 是它的 Fourier 系数，求证：存在常数 $C > 0$，使得对任意的 $n \in \mathbb{Z}$，

$$|n\, c_n| \le C.$$

2. 求证：若发散级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 是 Cesàro 可和的，则它也是 Abel 可和的。

3. 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数，求证：

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\,|\cos \lambda x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\,|\sin \lambda x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4.（Gibbs 现象）设

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}, \quad S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x).$$

i) 求 $S(x)$、$S(0+)$、$S(0-)$。

ii) 设

$$A_N = \max_{x\in(0,\pi)} \left(S_N(x) - S(x)\right),$$

求证：

$$\lim_{N\to\infty} A_N = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2}.$$

（注: 此例说明, 不论取多少项 Fourier 级数, 间断点附近的误差是恒定的。）

5. 设 $\gamma = 1 + \sqrt{2}$，$x_n = \langle \gamma^n \rangle$，求证：$\{x_n\}$ 不是等分布的。