数学分析（3）：第 8 次习题课

刘思齐

1. 若连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 在 $[-M,M]$ 以外为零、且其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 是绝对可积的，则 Fourier 反演公式的直观解释可按下述方式严格地证出。

   i) 对任意的 $L>M$，可将 f 在 $[-L,L]$ 上的部分延拓为整个实轴上的周期为 $2L$ 的周期函数。求证：在 $[-L,L]$ 上有
   $$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\,e^{\pi\,i\,\frac{n}{L}x},\quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,e^{-\pi\,i\,\frac{n}{L}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2L}\hat{f}\left(\frac{n}{2L}\right).$$

   ii) 若函数 F 连续且绝对可积，则
   $$\int_{\mathbb{R}}F(\xi)\mathrm{d}\xi=\lim_{K\to+\infty}\frac{1}{K}\sum_{n\in\mathbb{Z}}F(\frac{n}{K}).$$

   iii) 由 i)、ii) 即可证明
   $$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)\,e^{2\,\pi\,i\,\xi\,x}\mathrm{d}\xi.$$

2. 固定一个 $\varepsilon>0$，一个连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 叫做 ε-慢速下降的，如果存在 $A>0$ 使得
   $$|f(x)|<\frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}}.$$
   所有这样的函数构成的集合记为 M_ε。求证：

   i) M_ε 是一个线性空间。

   ii) 若 $f(x)\in M_\varepsilon$，则对于 $\forall h\in\mathbb{R}$，$f(x-h)\in M_\varepsilon$。

   iii) 若 $f(x)\in M_\varepsilon$，则对于 $\forall\delta\in\mathbb{R}$，$f(\delta x)\in M_\varepsilon$。

   iv) 若 $f\in M_\varepsilon$，则 f 绝对可积（于是 $\hat{f}$ 存在）。

   v) 若 $f\in M_\varepsilon$、$\hat{f}\in M_\varepsilon$，则存在 $B>0$，使得
   $$|f(x+h)-f(x)|\le B\,|h|^{\varepsilon}.$$
   （即 ε-Hölder 连续。）

   vi) 若 $f,g\in M_\varepsilon$，则 $f*g\in M_\varepsilon$。

3. i) 若 f 是 ε-慢速下降的，则

$$\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\hat{f}(\xi)\,e^{2\,\pi\,i\,\xi\,x}\mathrm{d}\xi=\left(f*\mathcal{F}_R\right)(x),$$

其中 $\mathcal{F}_R$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Fejér 核：

$$\mathcal{F}_R(y)=\begin{cases} R\left(\frac{\sin\pi\,y\,R}{\pi\,y\,R}\right)^2, & y\neq 0;\\ \\ R, & y=0.\end{cases}$$

ii) 求证：当 $R\to+\infty$ 时，$f*\mathcal{F}_R$ 一致收敛到 f。

4. 在本题中，我们取 Fourier 变换和反变换为：

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i\,\xi\,x}\mathrm{d}x,$$
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{i\,\xi\,x}\mathrm{d}\xi.$$

i) 求证：$h_0(x)=e^{-x^2/2}$ 的 Fourier 变换等于它自己。

ii) 定义函数空间

$$V=\{p(x)h_0(x)\mid p\in\mathbb{C}[x]\},$$

则 V 是 Schwartz 空间 $\mathcal{S}$ 的子空间，并且是如下运算的不变子空间：

$$\begin{aligned} I:V\to V,&\quad f(x)\mapsto f(x),\\ X:V\to V,&\quad f(x)\mapsto x\,f(x),\\ D:V\to V,&\quad f(x)\mapsto f'(x),\\ F:V\to V,&\quad f(x)\mapsto \hat{f}(x).\end{aligned}$$

它们还满足如下关系：

$$D\,X-X\,D=I,\quad F\,D=i\,X\,F,\quad F\,X=i\,D\,F.$$

iii) 定义算子

$$A=D+X,\quad A^\dagger=-D+X,$$

若 $f\in V$ 满足 $F(f)=\lambda f$，则

$$F(A(f))=i\,\lambda\,A(f),\quad F(A^\dagger(f))=-i\,\lambda\,A^\dagger(f).$$

iv) F 在 V 上的全部特征向量由 $h_n=\left(A^\dagger\right)^n(h_0)$ 给出，其特征值为 $(-i)^n$。