数学分析（3）：第 10 次作业

刘思齐

固定一个 $\varepsilon > 0$，一个连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 叫做 ε-慢速下降的，如果存在 $A > 0$ 使得

$$|f(x)| < \frac{A}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}.$$

所有这样的函数构成的集合记为 M_ε。求证：

1. M_ε 是一个线性空间。

2. 若 $f(x) \in M_\varepsilon$，则对于 $\forall h \in \mathbb{R}$，$f(x-h) \in M_\varepsilon$。

3. 若 $f(x) \in M_\varepsilon$，则对于 $\forall \delta \in \mathbb{R}$，$f(\delta x) \in M_\varepsilon$。

4. 若 $f \in M_\varepsilon$，则 f 绝对可积（于是 $\hat{f}$ 存在）。

5. 若 $f \in M_\varepsilon$、$\hat{f} \in M_\varepsilon$，则存在 $B > 0$，使得

   $$|f(x+h) - f(x)| \leq B\,|h|^\varepsilon.$$

   （即 ε-Hölder 连续。）

6. 若 $f \in M_\varepsilon$、$\hat{f} \in M_\varepsilon$，则对 $\forall x \in \mathbb{R}$，

   $$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \mathrm{d}\xi.$$

   （即 Fourier 反演公式处处成立。）

7. 若 $f, g \in M_\varepsilon$，则 $f * g \in M_\varepsilon$。

8. 对于 $f \in M_\varepsilon$，定义

   $$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x}.$$

   若 $f \in M_\varepsilon$、$\hat{f} \in M_\varepsilon$，求证：$\|f\| = \|\hat{f}\|$。