分析力学.

周五 9:50, 四教4306. 平时20% + 期末80%. 3学分.

联系方式: 刘思齐, liusq@tsinghua.edu.cn. 18610811647. 荷二203.
仲原, zhongy17@mails.tsinghua.edu.cn. 13120193669. 55号作业箱

教材: 1. 朗道《力学》, 2. 阿诺尔德《经典力学的数学方法》.
参考: 1. Goldstein《Classical Mechanics》. 2. Warner GTM94.

§1. Galileo时空.

在Newton力学中, 时间是一个绝对的量. 在空间任何一点处都可谈论"当前时刻"这个概念, 所以如果将时空视为一个几何对象 M, 则存在一个映射 $t: M \to T$. 其中 T 是所有"时刻"构成的几何对象.

时间是一维的. 所以 T 是一个一维的几何对象, ~~(a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$~~. 它还是连通的, 且没有起点, 终点, 而且也不会循环. 根据这几个特点, 它只能是 $\mathbb{R}$, 或者说同胚于 $\mathbb{R}$ 的一个一维流形.

但 T 与 $\mathbb{R}$ 有一些本质的区别. $\mathbb{R}$ 是域, 所以有一个特别的元素 0. T 中任何一点都与其它点平等, 没有特别的点. 所以在 T 中任取一点的标注, 我们没法谈论它对应的时刻. 因为没有参考点. 我们只能取两点, 谈论它们之间的时段的大小. (要把时段对应为一个实数还应定义好时间单位, 即规定某两个特定事件之间的时段为1秒或1天或1年等. 因为后面会集中讨论单位制的问题, 所以这里先假设已定义好时间单位).

类似的现象在数学和物理学中的很多场景中都会发生. 比如在讨论引力势能或静电势能时, 必须先规定一个势能零点, 这个规定是任意的. 规定好了之后, 两个点之间的势能差才能定义, 而这个差不依赖于零点的选取. 再比如线性空间中并没有canonical的基, 全体基构成的集合与 $GL(n,\mathbb{R})$ 一一对应, 但是其中并没有一个特定的基对应 $GL(n,\mathbb{R})$ 的单位元. 任给两组基之后可谈论它们之间的变换, 这是 $GL(n,\mathbb{R})$ 中的一个元素.

这类问题的共同点是在问题中总会出现一个群, 然后我们关心的则是去掉群中单位元的特殊性后剩下的结构.

定义：① 设 G 是一个群，X 是非空集合，称 X 是一个（右）G-空间，如果存在映射 $\mu: X\times G \to X$ 满足 $\mu(x, e) = x$，$\mu(x, gh) = \mu(\mu(x, g), h)$。

② 设 X 是 G-空间，称 μ 是可迁的，如果对 $\forall x, y\in X$ $\exists g\in G$ 使 $y=\mu(x, g)$。此时称 X 为一个 G-齐性空间。

③ 设 X 是 G-空间，对于 $x\in X$，定义 $G_x=\{g\in G \mid \mu(x, g)=x\}$，称为 x 的稳定化子群。

④ 设 X 是 G-齐性空间，若对 $\forall x\in X$，$G_x=\{e\}$，则称 X 是 G-主齐性空间（principal homogeneous space）或 G-torsor。

引理 ① X 是 G-torsor $\iff$ 对 $\forall x, y\in X$，$\exists!\, g\in G$ s.t. $y=\mu(x, g)$。

② 若 X 是 G-torsor，设 $x_0\in X$，定义映射 $\varphi: G\to X$，$g\mapsto \mu(x_0, g)$，则 φ 是双射。（φ 可称为 X 上的坐标系）

定义：设 X 是 G-torsor，定义映射 $X\times X\to G$，$(x, y)\mapsto \underbrace{g\in G}_{x\backslash y := \text{ 或 } y-x :=}$ 使 $y=\mu(x, g)$。

$\underbrace{x\backslash y}_{\text{或 } y-x}$ 称为 y 除以 x 的商或 y 减去 x 的差。

例：① 前面谈论的时间，势能都是 $\mathbb{R}$-torsor，这是只用到 $\mathbb{R}$ 的加法群结构。

② 线性空间 V 的全体基构成一个 $GL(V)$-torsor。

为了讨论空间的本质，下面我们来考虑 $\mathbb{R}^n$-torsor，这里 $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{n\text{个}}$ 是实值 n 元组构成的线性空间，此处我们将它视为一个 Abel 群，于是可以讨论其 torsor。设 S 是一个 $\mathbb{R}^n$-torsor，则对 $\forall P, Q\in S$ $\exists v\in\mathbb{R}^n$ 使得 $Q-P=v$，我们想说 v 就是从 P 到 Q 的向量。注意 $\mathbb{R}^n$ 上还有一个标准内积，于是对 $v\in\mathbb{R}^n$，可以谈论 $\|v\|=\sqrt{\langle v, v\rangle}$。于是我们能够定义 P 与 Q 之间的距离 $\rho(P, Q) := \|v\|$，于是 S 成为一个距离空间。更一般地，我们可以将出发点改为 n 维欧氏空间 E^n，即配备了内积的 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间，则任一 E^n-torsor 也是距离空间。因为 E^n 总是同构于 $\mathbb{R}^n$，所以上述特殊构造与一般构造之间并没有本质区别。

命题：设 S_1, S_2 是两个 $\mathbb{R}^n$-torsor，若 $\varphi: S_1\to S_2$ 是等距双射，则在 S_1, S_2 中任取坐标系后，有 $\varphi(x) = Px + x_0$，其中 $P\in O(\mathbb{R}^n)$，$x_0\in\mathbb{R}^n$。

证明：在建立坐标系 $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} S_1$，$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} S_2$ 之后，S_1, S_2 与 $\mathbb{R}^n$ 作为距离空间没有任何区别. 所以我们只需考虑 $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的情形.

① 第一步证明对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$，$\varphi(\frac{1}{2}(x+y)) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(y))$. 根据欧氏距离的性质，点 $z = \frac{1}{2}(x+y)$ 可以唯一地由条件 $\rho(z,x) = \rho(z,y) = \frac{1}{2}\rho(x,y)$ 决定. 而因为 φ 是等距，所以 $\rho(\varphi(z), \varphi(x)) = \rho(\varphi(z), \varphi(y)) = \frac{1}{2}\rho(\varphi(x), \varphi(y))$. 所以 $\varphi(z)$ 是 $\varphi(x), \varphi(y)$ 的中点.

② 第二步证明对 $\forall t \in [0,1]$，$\varphi((1-t)x + ty) = (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$. 反复应用①可知，这个性质对所有 $t = \frac{k}{2^n}$ $0 \le k \le n$, $k \in \mathbb{N}$ 成立. 因为等距映射必连续，以及 $\{\frac{k}{2^n}\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密，所以这个性质对一切 $t \in [0,1]$ 成立.

③ 设 $\psi(v) = \varphi(v) - \varphi(0)$，则 $\psi((1-t)x + ty) = (1-t)\psi(x) + t\psi(y)$. 且 $\psi(0) = 0$. 取 $x = 0$ 可得 $\psi(ty) = t\psi(y)$. 取 $(1-t)x = \alpha$, $ty = \beta$ 可得 $\psi(\alpha+\beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$，所以 ψ 是线性映射，即 $\exists P \in GL(\mathbb{R}^n)$ 使 $\psi(v) = Pv$. 于是 $\varphi(v) = Pv + v_0$. 其中 $v_0 = \varphi(0)$. 再由 φ 保距可知 $P \in O(\mathbb{R}^n)$. □

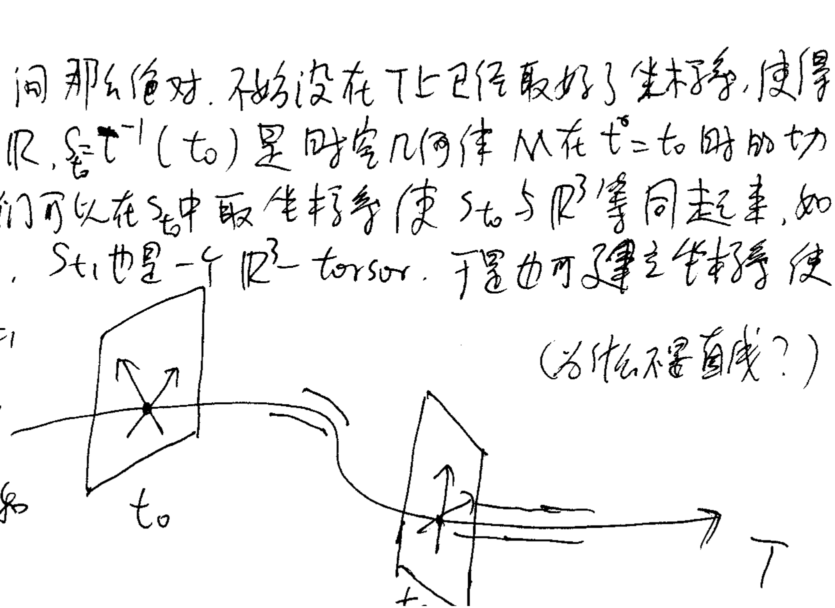
注：如果在 E^n 上取定一个定向（定向实际是 $\mathbb{Z}_2$-torsor）则在 S 上可诱导一个定向，若要求上述等距保定向，则可知 $P \in SO(\mathbb{R}^n)$. ◇

注：上述证明中实际不需要 φ 是满的，但用到欧氏距离的严格凸性. 若将问题改成赋范空间之间的等距，要求 φ 满，结论仍然成立，此结果称为 Mazur-Ulam 定理.

作业之一：叙述并证明 Mazur-Ulam 定理.

接下来我们讨论空间. 空间并不像时间那么绝对. 不妨设在 T 上已经取好了坐标系，使得我们可以将 T 等同于 $\mathbb{R}$. 对于 $t_0 \in \mathbb{R}$，$S_{t_0} = \tau^{-1}(t_0)$ 是时空几何体 M 在 $t = t_0$ 时的切片，它应该是一个 $\mathbb{R}^3$-torsor. 于是我们可以在 S_{t_0} 中取坐标系使 S_{t_0} 与 $\mathbb{R}^3$ 等同起来. 如果我们换一个 $t_1 \in \mathbb{R}$，则类似地，S_{t_1} 也是一个 $\mathbb{R}^3$-torsor. 于是也可建立坐标系使 S_{t_1} 与 $\mathbb{R}^3$ 等同. 但问题是 S_{t_0} 与 S_{t_1} 是没有关系的. 用物理的语言来说，在 t_0 时刻的坐标原点和坐标轴不能保证一定是 t_1 时刻的坐标原点和坐标轴.

（为什么不是直线？）

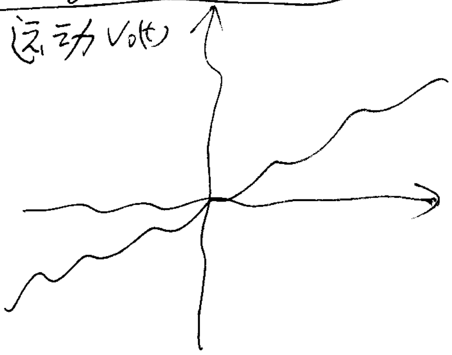


给定参考系后，粒子的运动 $f: T\to M$，使 $f(t)\in S_t$ 就可通过 $\varphi_t^{-1}: S_t\to S_{fix}$ 变成一个 $\tilde f: T\to S_{fix}$ 的映射，进而通过 S_{fix} 上的坐标系变成 $\tilde f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 的映射。

我们不妨设有一个固定的 $\mathbb{R}^n$-torsor S_{fix}，及其上的坐标系 $\mathbb{R}^n$，因为 $\mathbb{R}^n$-torsor 都是等距的，所以对 $\forall t\in T$，S_t 是 $\pi^{-1}(t)$ 都与 S_{fix} 差一个 $\mathbb{R}^n$-torsor 之间的等距。在 S_t 上取好坐标系之后可知存在映射 $\varphi_t: S_{fix}\to S_t$ 使得 φ_t 在坐标系下的形式为 $\varphi_t(x) = P(t)x + x_0(t)$，其中 $x_0(t)$ 就是 S_t 中坐标原点随 t 的运动规律，P_t 则描述坐标轴随 t 的旋转。这样的一个 $\{\varphi_t\}$ 或 $\{S_t\}$ 就叫一个参考系。

如果对 $x_0(t)$ 与 $P(t)$ 不加限制，经典力学中的运动方程就太奇怪了，会出现一些与坐标系的运动有关的项（在考虑某些问题时这种项是必要的，如地转偏向力）。下面我们要借助力学现象来确定一种特殊的参考系，即惯性系。

根据 Newton 第一定律，不受力的质点（或称自由粒子）将做匀速直线运动，事实上这个定律是关于参考系的取法的。~~试想如果我们在 S_{fix} 中取这样的坐标系 $\tilde x = x+\frac{1}{2}\sin x$，$\tilde y = y-\frac{1}{2}\sin y$，$\tilde z = z$~~ 试想如果坐标原点的运动 $x_0(t)$ 取如下形式 $x_0(t) = (t-\frac{1}{2}\sin t, 0, 0)$，那么自由粒子的轨迹不可能是直线。



定义：使 Newton 第一定律成立的参考系叫惯性系。

命题：设 $\{S_t\}$ $\{S_t'\}$ 是两个惯性系，$\varphi_t: S_t\to S_t'$ 是保定向的等距，则在坐标系下，有 $\varphi_t(x) = Px + x_0(t)$，其中 $P\in O(\mathbb{R}^3)$，$x_0(t)$ 是 t 的线性函数。

证明：一个自由粒子在坐标系下可写为 $f: t\mapsto x(t)$，其中 $x(t)$ 是线性函数，即 $x''=0$。若 $\{S_t'\}$ 也是惯性系，则 $(\varphi_t(x))''=0$，其中 $\varphi_t(x) = P(t)x + x_0(t)$，展开后可得 $P''(t)x(t)+2P'(t)x'(t)+\cancel{P(t)x''(t)}+x_0''(t)=0$，它对任意线性函数 $x(t)$ 成立。

所以只能有 $P'(t)=0$，$x_0''(t)=0$，于是 P 与 t 无关，$x_0(t)$ 线性。 □

注：时空自然地有定向，我们若假设所有变换均保定向，则 T 上允许的变换只能是 $t\mapsto t-t_0$，它与上述命题中给出的变换可合写为

应为O_3.
见P_{10}的例子.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} P & \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \qquad P \in \cancel{SO_3}$$

称为Galileo变换群.

这种变换称为Galileo变换, 所有Galileo变换构成一个10维的Lie群.

与之前线性空间基的例子一样. Galileo时空中的惯性系全体构成一个Galileo变换群的torsor. 即并没有一个特定的惯性系能充当"单位元"这个角色, 但是任给两个惯性系之后, 它们之间的变换一定是群中的一个元素.

§2. 变分原理.

假设我们已经在Galileo时空M中取好了一个惯性系. 于是可将M等同于$\mathbb{R}^4=\{(x,y,z,t)\}$. 一个粒子的运动就可以用一个函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$来表示.

此外将空间限制为3维是没有必要的. 因为若考虑$\mathbb{R}^3$中的n个粒子的运动, 可将它们的坐标排在一起$(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n)$这可视为$\mathbb{R}^{3n}$中的一个"粒子"的运动. 另一方面, 若这些粒子还满足一些约束条件$f_1(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n)=0,\cdots,f_m(\cdots)=0$. 则它们可能的位置会构成$\mathbb{R}^{3n}$中一个$\mathbb{R}^{3n-m}$维的子流形(如果没有奇点的话). 所以在比较一般的理论中, 可将M替换为一个一般的流形. 用微分几何的术语讲, M是一个$\mathbb{R}$-torsor T上的(中的$S_t=\tau^{-1}(t)$)纤维丛. 一个粒子或质点的运动则是这个丛的一个截面.

我们先考虑$\tau^{-1}(t)$仍是$\mathbb{R}^n$-torsor的情形. 这个n叫系统的自由度. 习惯上$\mathbb{R}^n$中的坐标记为$(q^1,\cdots,q^n)$, 称为系统的广义坐标. 一个粒子的运动则记为$q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $t\mapsto(q^1(t),\cdots,q^n(t))$. 而导数$\dot{q}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ $t\mapsto(\dot{q}^1(t),\cdots,\dot{q}^n(t))$则称为广义速度.

根据Newton第二定律 $m\ddot{q}^\alpha(t)=F^\alpha(q,\dot{q},t)$ $(i=1\cdots n)$ 若F是已知的. 则这是一个关于$q^1\cdots q^n$这n个函数的常微分方程. 在一定条件下. 初始值

$\dot q(t_0)$ 与 $q(t_0)$ 可唯一地决定它的解 $q(t)$. 理论上说所有力学问题都可以通过这种方法解出来. 但在实际应用中, 比较复杂的系统的受力分析是很麻烦的事. 而且直接写出上述方程的话也不利于求解. 所以人们发展了很多等价的形式. 我们下面介绍的变分原理就是其中一种.

注: 下面所介绍的变分原理并不是最通用的形式, 即有些问题不能用这种形式给出(如摩擦问题). 因为我们的目标是为理论物理和数学服务. 所以一些来源于工程的复杂的内容就略掉了.

Hamilton 变分原理: 对很多力学问题来说, 存在一个函数 $L:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}$, $(q,\dot q,t)\mapsto L(q,\dot q,t)$, 使得系统问题的解 $q(t)$ 是如下泛函 $S[q]=\int_{t_0}^{t}L(q(t),\dot q(t),t)\,dt$ 的驻点 ($q(t_0)=q_0$, $q(t_1)=q_1$). L 称为这个问题的 Lagrangian 或拉氏量. S 称为作用量泛函.

我们先用数学语言把上述原理弄清楚一些. 设 $q:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ 是一个连续可微的映射, 即 $q\in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. 于是 $\dot q\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$. L 是另一个 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上的连续函数. 于是 $S[q]=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot q,t)\,dt$ 对于 $q\in C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ 都是存在的. 所以它给出了一个映射 $S: C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$. 接下来的问题是, 什么是这样一个映射的驻点?

在 $C^1([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ 上赋以一个范数 $\|q\|=\max\limits_{t\in[t_0,t_1]}\|q(t)\|_{\mathbb{R}^n}$. 在 $\mathbb{R}$ 上赋以标准范数. 则 S 是从一个赋范空间到另一个赋范空间的映射.

定义: 设 E, F 是两个赋范空间, $U\subseteq E$, $S: U\to F$, $q\mapsto S(q)$ 是一个映射. 对于 $q_0\in U$ 若存在有界线性算子 $A:E\to F$, 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|S(q_0+h)-S(q_0)-Ah\|}{\|h\|}=0,$$

则称 S 在 q_0 处可导. 导数为 A. 记为 $DS(q_0)=A$.

注: 根据定义, DS 是从 U 到 $\mathrm{Hom}(E,F)$ 的映射. 还可定义二阶导数
$D^2S: U\to \mathrm{Hom}(E,\mathrm{Hom}(E,F))$ 等, 或写为
$D^2S: U\times E\times E\to F$.

引理：假设 L 具有足够好的光滑性，则 $S[q]=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot q,t)\,dt$ 可导，其导数 A（在 q 处的）为
$$A(h)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)\right)h^\alpha\,dt+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}h^\alpha\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

推论：若某力学问题符合 Hamilton 变分原理，则 $q(t)$ 满足微分方程 $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)=0$（对 $1,\dots,n$）

证明：因为 q 要保持端点不动，所以 $h(t_0)=h(t_1)=0$，于是 $A=0$
$$\Longleftrightarrow \forall h.\ \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)\right)h^\alpha\,dt=0.\ 于是\ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)=0.$$ □.

方程 $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)=0$ 也记为 $\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}=0$，它称为 Euler-Lagrange 方程.

上述讨论可推广到非常一般的情形．设 $q\in C^m([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$，$L:\mathbb{R}^{(m+1)n+1}\to\mathbb{R}$，
$(q,q',\dots,q^{(m)},t)\mapsto L(q,q',\dots,q^{(m)},t)$．$S[q]=\int_{t_0}^{t_1}L(q,q',\dots,q^{(m)},t)\,dt$.
则 S 的导数可写为
$$A(h)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot q^i}+\dots+(-1)^m\left(\frac{d}{dt}\right)^m\left(\frac{\partial L}{\partial q^{i,(m)}}\right)\right)h^i\,dt+(\cdots)$$
其中 $(\cdots)$ 为边界项．若假设 $q,q',\dots,q^{(m-1)}$ 在 t_0 与 t_1 处都不动，则 q 是 S 的驻点当且仅当它满足方程
$$\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\left(\frac{d}{dt}\right)^l\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha,(m)}}=0\quad\left(它也可写为\ \sum_{l\geq 0}(\cdots)\ 因为当\ l>m\ 时，\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha,(l)}}=0\right)$$
这个方程是更一般的 L 对应的 Euler-Lagrange 方程．$\frac{\delta L}{\delta q^i}$ 称为 L 关于 q^i 的变分导数.

~~定理：E-L 方程在坐标变换 $u^\alpha\mapsto q^\alpha=q^\alpha(u)$ 下具有如下变换公式：~~

定理：E-L 方程不依赖于坐标系 $(q^1\dots q^n)$ 的选取.

证明：设 $(q^1\dots q^n)$ 是一组坐标，$(u^1\dots u^n)$ 是另一组．我们将证明如下变分导数
$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}=\frac{\partial q^\beta}{\partial u^\alpha}\frac{\delta L}{\delta q^\beta}\qquad 记\ \frac{d}{dt}=\partial.\quad \partial^k q^\alpha(t)=q^{\alpha,k}(t),\quad \partial^k u^\alpha(t)=u^{\alpha,k}(t).$$
由定义 $\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}=\sum_{l\geq 0}(-\partial)^l\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha,l}}$．$\frac{\delta L}{\delta q^\beta}=\sum_{k\geq 0}(-\partial)^k\frac{\partial L}{\partial q^{\beta,k}}$.

作业二

由链式法则,有 $\frac{\partial L}{\partial u^{\alpha,l}} = \sum_{k\ge 0} \frac{\partial q^{\beta,k}}{\partial u^{\alpha,l}} \frac{\partial L}{\partial q^{\beta,k}}$. 其中

$\frac{\partial q^{\beta,k}}{\partial u^{\alpha,l}} = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha,l}}\left(\partial^k(q^\beta)\right)$. 根据公式 $\boxed{\frac{\partial}{\partial u^{\alpha,l}}\cdot\partial^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\partial^{k-j}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha,l-j}}}$, $\partial^k \frac{\partial}{\partial u^{\alpha,l}}$

$$=\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\partial^{k-j}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha,l-j}}\right)(q^\beta) = \binom{k}{l}\partial^{k-l}\frac{\partial q^\beta}{\partial u^\alpha}$$ 于是

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = \sum_{k,l\ge 0}(-\partial)^l\left(\frac{\partial q^{\beta,k}}{\partial u^{\alpha,l}}\frac{\partial L}{\partial q^{\beta,k}}\right) = \sum_{k,l\ge 0}(-1)^l\partial^l\left(\binom{k}{l}\underline{\partial^{k-l}\left(\frac{\partial q^\beta}{\partial u^\alpha}\right)}\cdot\underline{\frac{\partial L}{\partial q^{\beta,k}}}\right)$$

$$=\sum_{k,l\ge 0}(-1)^l\binom{k}{l}\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\partial^{k-j}\left(\frac{\partial q^\beta}{\partial u^\alpha}\right)\cdot\partial^j\frac{\partial L}{\partial q^{\beta,k}}$$

too easy

$$=\sum_{k,j\ge 0}\left[\sum_{l=j}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\binom{l}{j}\right]\partial^{k-j}\left(\frac{\partial q^\beta}{\partial u^\alpha}\right)\cdot\partial^j\left(\frac{\partial L}{\partial q^{\beta,k}}\right)$$

~~作业三~~

$$=\sum_{k\ge 0}(-1)^k\boxed{\frac{\partial q^\beta}{\partial u^\alpha}}\partial^k\frac{\partial L}{\partial q^{\beta,k}} = \frac{\partial q^\beta}{\partial u^\alpha}\frac{\delta L}{\delta q^\beta}.$$ (根据恒等式 $\sum_{l=j}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}\binom{l}{j} = (-1)^k\delta_j^k$)

□

定理:对 $\forall q$ $\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = 0$, $\alpha = 1\cdots n \iff \exists K = K(q, q', \cdots, q^{(m-1)}, t)$,使 $L = \partial K$.

证明:⇒ 对 m 进行归纳. 当 $m=0$ 时, $L = L(q,t)$. $\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \Rightarrow L = L(t)$

上部 只台

取 $K = \int L(t)dt$ 即可. 假设当 $m-1$ 时定理已证明, 考虑 $L = L(q,\cdots,q^{(m)},t)$.

则 $\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = \sum_{l=0}^{m}(-1)^l\partial^l\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha,l}}$ 中所含的 q^α 的最高阶导数为 $2m$ 阶. 且有

$$\frac{\partial}{\partial q^{\beta,2m}}\frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = \sum_{l=0}^{m}(-1)^l\frac{\partial}{\partial q^{\beta,2m}}\partial^l\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha,l}} = \sum_{l=0}^{m}(-1)^l\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\partial^{l-j}\frac{\partial^2 L}{\partial u^{\beta,2m-j}\partial u^{\alpha,l}}$$

因为 L 只依赖到 $q^{\alpha,m}$, 所以只有 $j=l=m$ 的项会剩下来. 即

$\frac{\partial}{\partial q^{\beta,2m}}\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}=(-1)^m\frac{\partial^2 L}{\partial q^{\alpha,m}\partial q^{\beta,m}}$　$\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}=0$ 意味着 $\frac{\partial^2 L}{\partial q^{\alpha,m}\partial q^{\beta,m}}=0$. 即

L 只能线性地依赖 $q^{\alpha,m}$. 设 $L=\sum L_\alpha(q,q',\cdots,q^{(m-1)},t)\,q^{\alpha,m}+L_0(q,\cdots,q^{(m-1)},t)$

考虑

$$\frac{\partial}{\partial q^{\beta,2m-1}}\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\partial^{l-j}\frac{\partial^2 L}{\partial q^{\beta,2m-1-j}\partial q^{\alpha,l}}$$

它只能有 $j=l=m$, $j=l=m-1$ 和 $l=m,\ j=m-1$ 三项.

$$=(-1)^m\left[\frac{\partial^2 L}{\partial q^{\beta,m-1}\partial q^{\alpha,m}}+\cancel{m\partial\frac{\partial^2 L}{\partial q^{\beta,m}\partial q^{\alpha,m}}}\right]+(-1)^{m-1}\frac{\partial^2 L}{\partial q^{\beta,m}\partial q^{\alpha,m-1}}$$

$$=(-1)^m\left[\frac{\partial L_\alpha}{\partial q^{\beta,m-1}}-\frac{\partial L_\beta}{\partial q^{\alpha,m-1}}\right]=0.$$

这意味着存在一个函数 $K_0=K_0(q,\cdots,q^{(m-1)},t)$ 使 $\frac{\partial K_0}{\partial q^{\alpha,m-1}}=L_\alpha$.

再取 $L_1=L-\partial K_0=L_0(q,\cdots,q^{(m-1)},t)-\frac{\partial K_0}{\partial t}(q,\cdots,q^{(m-1)},t)$. 因为 $\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}=0$, $\frac{\delta}{\delta q^\alpha}(\partial K_0)=0$, 所以有 $\frac{\delta L_1}{\delta q^\alpha}=0$. 由 $m-1$ 时的结论, 存在 $K_1(q,\cdots,q^{(m-2)},t)$ 使 $L_1=\partial K_1$. 于是

$L=L_1+\partial K_0=\partial(K_0+K_1)$. $\Rightarrow$ 部分证完.

当 $l-1<0$ 时为零

$\Leftarrow$ 部分: $$\frac{\delta}{\delta q^\alpha}\partial=\sum_{l\geq 0}(-1)^l\partial^l\frac{\partial}{\partial q^{\alpha,l}}\partial=\sum_{l\geq 0}(-1)^l\partial^l\left(\frac{\partial}{\partial q^{\alpha,l-1}}+\partial\frac{\partial}{\partial q^{\alpha,l}}\right)$$

$$=\sum_{l\geq 0}(-1)^{l+1}\partial^{l+1}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha,l}}+\sum_{l\geq 0}(-1)^l\partial^{l+1}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha,l}}=0.$$

□

上述定理说明, 若一个力学问题的解可由变分原理描述, 则它的拉氏量不是唯一的. 若 L 是拉氏量, 则任意 $L+\partial K$ 也是一个允许的拉氏量, 它们给出的 E-L 方程是一样的. 我们以后经常会谈到拉氏量在某某变换下不变这种性质, 它的意思是变换后的 $\tilde{L}$ 与之前的 L 相差一个 ∂K, 而不是指 $\tilde{L}=L$.

例1: ① Galileo 时空中的自由粒子. 在某惯性系下取 $L=\frac{m}{2}\sum_{\alpha=1}(\dot{q}^\alpha)^2$.

则 $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}=m\dot{q}^\alpha$, E-L $\Rightarrow m\ddot{q}^\alpha=0$. 于是 $q^\alpha(t)=q_0^\alpha+v^\alpha t$.

即匀速直线运动. 若换成另一个惯性系 $q^\alpha = A^\alpha(u) + B^\alpha t + C$.
其中 A^α 是一个正交变换. 则 $\dot{q}^\alpha = A^\alpha(\dot{u}) + B^\alpha$ 于是

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^T \cdot \dot{q} = \frac{1}{2} m (A\dot{u} + B)^T (A\dot{u}+B) = \frac{1}{2} m \dot{u}^T\dot{u} + 2(B^T A\dot{u}) + B^T B$$

$$= L(u, \dot{u}, t) + \partial(2B^T A u + B^T B t)$$ 所以在新惯性系中仍可取

$L = \frac{1}{2} m \sum_{\alpha=1}^{n} (\dot{u}^\alpha)^2$. 给出的方程是一样的.

~~定理: 若 $L(q,\dot{q},t)$ 在 Galileo 变换下不变, 则必存在 $m \in \mathbb{R}$, 使~~
~~$L = \frac{1}{2} m \sum_{\alpha=1}^{n} (\dot{q}^\alpha)^2$.~~

~~证明: ① 考虑 $q^\alpha \mapsto q^\alpha + q_0^\alpha$. $t \mapsto t + t_0$. 此时 $\dot{q}^\alpha$ 不变.~~

~~$L(q+q_0, \dot{q}, t+t_0) - L(q, \dot{q}, t) = \partial K = \frac{\partial K}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial K}{\partial t}$. (*)~~

~~对式右两边取 $\frac{\partial^2}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}$, 记 $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = L_{\alpha\beta}$, 则有~~

~~$L_{\alpha\beta}(q+q_0, \dot{q}, t+t_0) = L_{\alpha\beta}(q, \dot{q}, t)$. 即 $L_{\alpha\beta}$ 不依赖于 q 与 t. $L_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta}(\dot{q})$.~~

~~记 $L_1^{(\dot{q})} = \frac{1}{2}\int d\dot{q}^\alpha \int d\dot{q}^\beta (L_{\alpha\beta})$. 则 $\frac{\partial^2 L_1}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = L_{\alpha\beta}$. 记 $L_2 = L - L_1$.~~

~~则 $\frac{\partial^2 L_2}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = 0$. 即 L_2 关于 $\dot{q}^\alpha$ 线性. 记 $L_2 = L_\alpha^{(q,t)}\dot{q}^\alpha + L_0(q,t)$. 代入(*)得~~

~~$L_\alpha(q+q_0, t+t_0) - L_\alpha(q,t) = \frac{\partial K}{\partial q^\alpha}$. $L_0(q+q_0, t+t_0) - L_0(q,t) = \frac{\partial K}{\partial t}$.~~

错的. 例如取 $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - q$. 则

$$L(q+vt+q_0, \dot{q}+v, t+t_0) = \frac{1}{2}(\dot{q}+v)^2 - q - vt - q_0$$

$$= L(q, \dot{q}, t) + v\dot{q} + \frac{1}{2}v^2 - vt - q_0 = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}\left(vq + \frac{1}{2}v^2 t - \frac{v}{2}t^2 - q_0 t\right)$$

其解为 $\frac{\delta L}{\delta q} = -1 + \ddot{q} = 0 \Rightarrow q = \frac{t^2}{2} + at + b$. 抛物线的确在 Galileo 变换下不变.

需要加空间反演对称性才能排除掉这种情况，即在 Galileo 变换中允许 $O(\mathbb{R}^n)$ 而不只是 $SO(\mathbb{R}^n)$.

定理：若 $L(q, \dot q, t)$ 在 Galileo 变换下不变，则 $\exists m\in\mathbb{R}$ 使 $L=\frac{1}{2}m\dot q^2$.

证明：先考虑 $(q, \dot q, t)\mapsto(q+vt+q_0, \dot q+v, t+t_0)$，不变意味着 $\exists K_1$ 使

$$L(q+vt+q_0, \dot q+v, t+t_0)-L(q, \dot q, t)=\frac{dK_1}{dt}=\frac{\partial K_1}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha+\frac{\partial K_1}{\partial t} \qquad (*1)$$

注意右边关于 $\dot q^\alpha$ 是线性的，对左右两边作用 $\frac{\partial^2}{\partial\dot q^\alpha\partial\dot q^\beta}$ 得（记 $\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q^\alpha\partial\dot q^\beta}=L_{\alpha\beta}(q, \dot q, t)$）

$L_{\alpha\beta}(q+vt+q_0, \dot q+v, t+t_0)-L_{\alpha\beta}(q, \dot q, t)=0$，这意味着 $L_{\alpha\beta}$ 是与 $q, \dot q, t$ 都无关的常数。

所以取 $L_1=\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta$，$L_2=L-L_1$，则 L_2 关于 $\dot q^\alpha$ 是线性的，记

$L_2=A_\alpha(q, t)\dot q^\alpha+B(q, t)$，则 $L=\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta+A_\alpha(q, t)\dot q^\alpha+B(q, t)$. $(*2)$

取 $v=0$ 的特殊情形，则 $(*1)$ 变为

$$A_\alpha(q+q_0, t+t_0)-A_\alpha(q, t)=\frac{\partial K_1}{\partial q^\alpha}, \quad B(q+q_0, t+t_0)-B(q, t)=\frac{\partial K_1}{\partial t}.$$

利用 $\frac{\partial^2 K}{\partial q^\alpha\partial q^\beta}=\frac{\partial^2 K}{\partial q^\beta\partial q^\alpha}$，$\frac{\partial^2 K}{\partial q^\alpha\partial t}=\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial q^\alpha}$ 可得 $\frac{\partial A_\alpha}{\partial q^\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial q^\alpha}=C_{\alpha\beta}$ 是常数，$\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial q^\alpha}=D_\alpha$ 是常数。

现在考虑反演对称性，若将某 q^α 变为 $-q^\alpha$，则 $\dot q^\alpha$ 变为 $-\dot q^\alpha$，此时 L 不变意味着 $L(\cdots -q^\alpha\cdots -\dot q^\alpha\cdots)-L(\cdots q^\alpha\cdots \dot q^\alpha\cdots)=\partial K_2$，重新取

$$\tilde L=\frac{1}{2}\left[L(\cdots -q^\alpha\cdots -\dot q^\alpha\cdots)+L(\cdots q^\alpha\cdots \dot q^\alpha\cdots)\right]=L(q, \dot q, t)-\frac{1}{2}\partial K_2$$

则 $\tilde L$ 与 L 等价，且 $\tilde L$ 关于 q^α 是偶的。

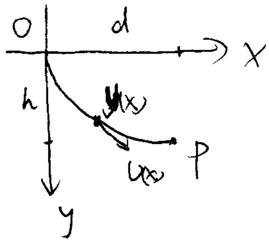
在 $(*2)$ 中取 $q^\alpha\mapsto -q^\alpha$，则可知 A_α 关于此变换是奇函数（且 $A_\beta(\beta\neq\alpha)$ 是偶函数），于是对于 $\beta\neq\alpha$，$\frac{\partial A_\alpha}{\partial q^\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial q^\alpha}$ 也是奇的，所以 $C_{\alpha\beta}=0$，同理 $D_\alpha=0$，于是存在 K_3 使

$A_\alpha\dot q^\alpha+B=\partial K_3$，所以 $L=\frac{1}{2}L_{\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta$，最后取正交变换 $q\mapsto A(q)$，

则 $L(A(q))=\frac{1}{2}\dot q^T(A^TLA)\dot q$，若 $L(A(q))$ 等价于 $L(q)$，则只有 $A^TLA=L$，即 $LA=AL$（利用 $AA^T=I$）。

由线性代数知识可知 $L=mI$，定理证完。 □

② 最速降线问题.



问题：从O点到P点做什么样的滑梯可以使得用时最短?

答案：按如图方式建立坐标系. 则 $ds = v(x)\,dt$. $ds = \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$.

$mg\,y(x) = \frac{1}{2} m\,v(x)^2$, 于是有 $dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$, $T = \int_0^d \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$

这是 $y(x)$ 的一个泛函. 其中 $y(x)$ 应满足 $y(0)=0$. $y(d)=h$. 由之前的推导.应有

$\frac{\delta T}{\delta y} = 0$. 即 $1+y'^2+2yy''=0$. 两边乘以 y' 得

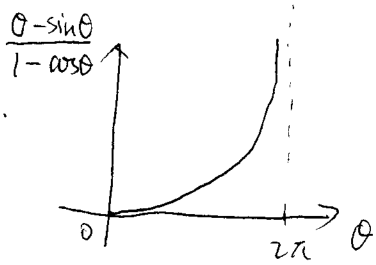
$$0 = y' + y'^3 + 2yy'y'' = \left(y(1+y'^2)\right)', \quad \text{所以 } y(1+y'^2) = C$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C}{y} - 1} \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{C-y}}\,dy = dx$, ~~引入坐标变换~~ 换元 $y = \frac{C}{2}(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow C\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = dx \Rightarrow x = \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta) + x_0$. 代入初始条件 $y(0)=0$ ($y=0 \Rightarrow \theta=0$. $\Rightarrow x=x_0$) 可得 $x_0=0$, 代入最终条件 $y(d)=h$. $y=h \Rightarrow h = \frac{C}{2}(1-\cos\theta_0)$

$x=d \Rightarrow d = \frac{C}{2}(\theta_0 - \sin\theta_0)$. 应由这两个条件确定 C 与 θ_0. 但这是超越方程, 没法再解了. 若要数值求解

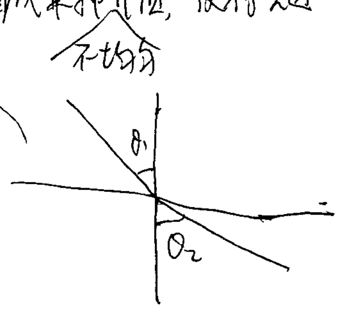
注意 $\frac{\theta_0 - \sin\theta_0}{1-\cos\theta_0} = \frac{h}{d}$ 左边的函数图像为



所以在 $[0,2\pi]$ 上有唯一解 θ_0. 最后 $C = 2h/(1-\cos\theta_0) = 2d/(\theta_0-\sin\theta_0)$.

若要求时间. $T = \int_0^d \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx = \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{C}{2g}}\,d\theta = \sqrt{\frac{C}{2g}}\,\theta_0$.

另一种解法(伯努力): $v = \sqrt{2gy}$. 把质点看成光子. 空间看成某种介质, 使得光速在高度为 y 的地方为 $\sqrt{2gy}$. 求光路. 由折射定律



$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$, 即 $\frac{\sin\theta}{\sqrt{y}}$ 为常数. 其中 θ 为切线与 y 轴的夹角. 于是 $\cot\theta = y' \Rightarrow 1+y'^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+y'^2}} = \tilde{C}$, 即 $y(1+y'^2) = C$. 之后的步骤就相同了.

参数方程 $x = a(t-\sin t)$ $y = a(1-\cos t)$ 给出的曲线叫摆线. 上述性质亦可由摆线的几何定义通过平面几何直接证出.

④

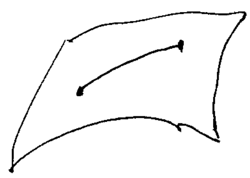
~~②~~ 测地线问题.

设 S 是 $\mathbb{R}^N$ 中的 n 维曲面 (or 子流形). 它的某个开集上有局部参数表示

$x^1 = x^1(q^1, \cdots, q^n), \cdots, x^N = x^N(q^1, \cdots, q^n)$.

S 上的一条曲线可由参数方程 $q^1 = q^1(t), \cdots, q^n = q^n(t)$ 决定.

于是这条曲线在 $\mathbb{R}^N$ 中的长度为



$$L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} \, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial x^i(q(t))}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^i(q(t))}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha(t) \dot{q}^\beta(t)} \, dt \qquad \text{记 } g_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta} \, dt$$

这是关于 $q(t)$ 的一个泛函, 所以似乎可通过变分法求解.

事实上, 这个问题的上述表达方式是不够的. 因为曲线的参数表达式不是唯一的. 其中可以包含任意函数参数的自由度. 这与 ODE 解空间的有限维性是矛盾的. 其原因在于, 上述泛函是所谓的退化泛函, 即其 E-L 方程是退化的, 或依赖的.

作业之三: 上述 L 满足 $\sum_{\alpha=1}^n \dot{q}^\alpha \frac{\delta L}{\delta q^\alpha} = 0$, 即其中一个可由其它推出.

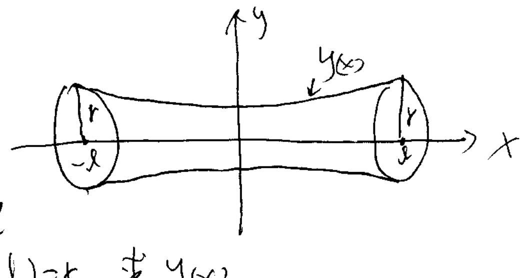
解决办法是, 我们可以要求 t 取为弧长参数, 这样就去掉了重新参数化的自由度. 此时 $ds = dt$. 于是 $g_{\alpha\beta}(q(s)) \dot{q}^\alpha(s) \dot{q}^\beta(s) = 1$. 求解这个方程即可得到 $q^\alpha(s)$

定义: 拉氏量 $L(q, \dot{q}, t)$ 称为 (Legendre) 非退化的, 如果

$$\mathrm{Hess}(L, \dot{q}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\right) \neq 0.$$

作业之四: 证明上述 L 是 Legendre 退化的. 即 $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}\right) = 0$.

③ 极小曲面问题.



假设在 $x = \pm l$ 处有两个半径为 r 的铁丝圈. 它们之间有一个肥皂泡. 根据表面张力的性质, 这个肥皂泡的面积应该最小. 设曲线由 $y(x)$ 给出. $y(\pm l) = r$, 求 $y(x)$.

⑤

曲面上的自由粒子：$\dot{x}^i = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{x}^i)^2 = \frac{m}{2} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$ →

$L = T$，（不妨取 $m=1$）$\frac{\delta L}{\delta q^\gamma} = \frac{\partial L}{\partial q^\gamma} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\gamma}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(g_{\alpha\gamma} \dot{q}^\alpha + g_{\gamma\beta} \dot{q}^\beta\right)$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + g_{\alpha\gamma} \ddot{q}^\alpha + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + g_{\gamma\beta} \ddot{q}^\beta\right] = 0$$

$$\Rightarrow g_{\gamma\beta} \ddot{q}^\beta + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right)}_{\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = 0. \quad (1)$$

$\Gamma_{\gamma,\alpha\beta}$ 第一类 Christoffel 符号

记 $(g_{\alpha\beta})^{-1} = (g^{\alpha\beta})$ 则有

$\cancel{\ddot{q}^\gamma + \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} \Gamma_{\alpha\beta,\sigma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}$

$$\ddot{q}^\gamma + \underbrace{\frac{1}{2} g^{\gamma\sigma}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\sigma}\right)}_{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = 0. \quad (2)$$

$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = g^{\gamma\sigma} \Gamma_{\sigma,\alpha\beta}$ 第二类 Christoffel 符号.

对 (1) 乘以 $\dot{q}^\gamma$ 并求和可得

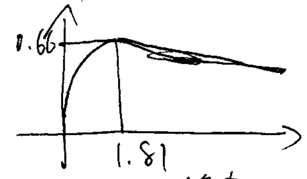
$$\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right)' = 0. \text{ 于是有 } g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = C.$$

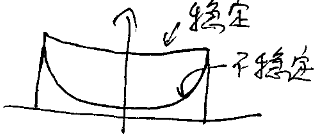
注意 $(g_{\alpha\beta})$ 是正定的，所以必有 $C > 0$，对 t 重新归一化可使 $C = 1$.
于是 曲面上自由粒子的方程与测地线方程是一样的.

$$S[y]=\int_{-l}^{l} 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad \frac{\delta S}{\delta y}=2\pi\left[\sqrt{1+y'^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\right]$$

$\Rightarrow 1+y'^2=yy''$ 它的偶函数解为 $y(x)=\frac{1}{c}\cosh(cx)$ 代入边界条件得 $cr=\cosh(cl)$. 不妨设 $r=1$. 因为 $\cosh(x)\geq 1$. 所以 $c\geq 1$. 此时

$l=\frac{1}{c}\operatorname{arccosh} c$. 这个函数图像如右图. 它意味着当 $l>0.66$ 时不存在解. 当 $l<0.66$ 时有两个解. 但是事实上这两个解中只有一个是稳定的. 不稳定的那个是 S 取极大值的驻点.





⑥ 带电粒子在电磁场中的运动

设真空中有电磁场 $E(x,y,z,t)$ 与 $B(x,y,z,t)$. 它们满足 Maxwell 方程

$\nabla\times E+\frac{\partial B}{\partial t}=0$, $\nabla\cdot B=0$. 后者意味着存在向量 $A(x,y,z,t)$, 使 $B=\nabla\times A$. 再代入前者得 $\nabla\times\left(E+\frac{\partial A}{\partial t}\right)=0$. 于是存在标量 $\varphi(x,y,z,t)$, 使 $E=-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\varphi$.

设有一个质量为 m, 电荷为 e 的带电粒子在这个场中运动. 则其拉氏量可取为 $L=\frac{1}{2}mv^2+e(A\cdot v-\varphi)$. 其中 $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$, $A=(A_x,A_y,A_z)$, $A\cdot v=A_x\dot{x}+A_y\dot{y}+A_z\dot{z}$

$$\frac{\delta L}{\delta x}=\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}+eA_x\right)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}=-e\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e\left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\dot{y}+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\dot{z}\right]-e\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$=e\left(E_x+(v\times B)_x\right)$$ $m\ddot{y}$ 与 $m\ddot{z}$ 类似. 最终结果可写为

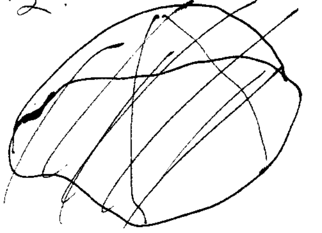
$$ma=e(E+v\times B)$$ 正是电场力与 Lorentz 力的公式.

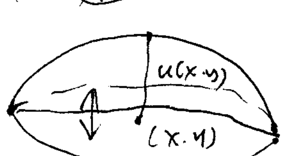
下面考虑这样的问题: A 与 φ 的选择不是唯一的. 设有另一组 A', φ', 使 $B=\nabla\times A'$, $E=-\frac{\partial A'}{\partial t}-\nabla\varphi'$. 则有 $\nabla\times(A'-A)=0$, $\frac{\partial(A'-A)}{\partial t}+\nabla(\varphi'-\varphi)=0$. 于是存在函数 f, 使 $A'=A+\nabla f$, $\varphi'=\varphi-\frac{\partial f}{\partial t}$. 记以 A', φ' 为电磁势的 L 为 L', 则有

$$L' = \frac{1}{2}mv^2 + e(A'\cdot v - \varphi') = \frac{1}{2}mv^2 + e\left((A+\nabla f)\cdot v - \left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + e(A\cdot v - \varphi) + \frac{d}{dt}(f) = L + \frac{d}{dt}(f).$$

所以不同的电磁势给出的拉氏量是等价的. 这个性质叫电磁场的规范不变性. 因为 L 与 L' 等价, 所以可知带电粒子的运动方程不变.





变分原理还可应用于连续介质力学或者场论. 此时 $q(t)$ 应换成 $q(x,t)$, 其中 $x\in D\subseteq\mathbb{R}^n$, D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域. 作用量泛函变为

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1}\int_D L(q, q', q'', \dots)\,dx\,dt.$$

其中 q' 即可以为 q 对 t 的偏导数, 又可以为对 $x=(x^1,\dots,x^n)$ 的偏导数. 在适当的边条件下, $S(q)$ 的驻点也在 $\frac{\delta S}{\delta q^\alpha}=0$ 处取到. 这里的变分导数 $\frac{\delta S}{\delta q^\alpha}$ 定义为

$$\frac{\delta S}{\delta q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_t}\right) - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_{x^\alpha}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}(\cdots) + \frac{d}{dt}\frac{d}{dx}(\cdots) + \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(\cdots) + \cdots$$

更简单的写法是, 将 t 视为 x^{n+1}. 于是 $D\times[t_0,t_1]$ 成为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的区域

$S(q) = \int_D L(q, q', q'', \dots)\,dx$. 引入多重指标记号 $s=(s_1,\dots,s_{n+1})$, $|s| = s_1+\dots+s_{n+1}$, $s_i\geq 0$, $s_i\in\mathbb{Z}$.

并记 $q^{\alpha,s} = \dfrac{\partial^{|s|} q^\alpha}{(\partial x^1)^{s_1}\cdots(\partial x^n)^{s_n}(\partial t)^{s_{n+1}}}$, $\left(\frac{d}{dx}\right)^s = \left(\frac{d}{dx_1}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{d}{dx_n}\right)^{s_n}\left(\frac{d}{dt}\right)^{s_{n+1}}$ ~~得EL方程变为~~

于是变分导数可写为

$$\frac{\delta S}{\delta q^\alpha} = \sum_s (-1)^{|s|}\left(\frac{d}{dx}\right)^s\left(\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha,s}}\right).$$

s 一维时具有相似的形式.

此时的EL方程 $\frac{\delta S}{\delta q^\alpha}=0$ 变成关于 $q(x,t)$ 的偏微分方程, 解法更复杂, 而且可能涉及更多分析上面的问题.

⑦ 膜振动问题. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 上的单连通区域 $u: D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 表示一个振动的膜在时刻 t 时 (x,y) 点的高度. $(x,y,t)\mapsto u(x,y,t)$ 易知膜的动能 $T=\int_D \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdy$. 势能由膜的弹性势能提供: $U=\int_D k\left(\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1\right)dxdy$

所以 $L=T-U=\int_D\left[\frac{\rho}{2}u_t^2-k\left(\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1\right)\right]dxdy$. $S[u]=\int_{t_0}^{t_1}L(u,\dot{u})dt$.

EL方程给出 $$-\rho u_{tt}+k\left[\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)_x+\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)_y\right]=0.$$

这个方程当然很难解. 但是如果我们只考虑小振幅情形, 设 $u=\varepsilon\cdot v$, 则有
$$-\rho v_{tt}+k(v_{xx}+v_{yy})+O(\varepsilon)=0.$$
取 $\varepsilon\to0$ 则得 2+1维波动方程. 当 D 比较好时有很好的解.

⑧ Schrödinger方程. 这个方程是量子力学的基本方程, 要解释它的话需要一大段关于量子力学基本原理的说明. 但是如果仅将波函数视为 $\mathbb{R}^4$ 中的复标量场的话, Schrödinger方程也可从变分原理中导出.

复标量场即 $\psi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{C}$. 我们把它的复共轭 $\bar{\psi}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{C}$ 看作独立的另一个场, 考虑如下拉氏量
$$L=\frac{i\hbar}{2}\left(\bar{\psi}\psi_t-\psi\bar{\psi}_t\right)-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi)\cdot(\nabla\bar{\psi})-V\bar{\psi}\psi.$$
其中 $V:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ 为系统的势能.

得到 $$\frac{\delta L}{\delta\psi}=-i\hbar\bar{\psi}_t+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\bar{\psi}-V\bar{\psi}=0.$$
$$\frac{\delta L}{\delta\bar{\psi}}=i\hbar\psi_t+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi-V\psi=0.$$
它们是互为复共轭的. $\frac{\delta L}{\delta\bar{\psi}}=0$ 即 Schrödinger方程, 它一般写为 $i\hbar\psi_t=H\psi$. 其中
$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V$$
称为系统的Hamilton算子. 它是我们前面所讲到的Hamilton量的量子化.

注: Schrödinger方程并不是上述泛函的极值点, 而是鞍点. 另外, 在量子力学中我们还要求 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^3)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x,y,z,t)|^2dxdydz=1$, $|\psi|^2=\bar{\psi}\psi$.

我们后面会仔细处理带约束的变分问题.

§3 守恒律

设拉氏量满足 Legendre 非退化条件，即矩阵

$(g_{\alpha\beta})=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}\right)$ 非退化. 将 Euler-Lagrange 方程 $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)=0$ 展开

得

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}\ddot q^\beta+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial q^\beta}\dot q^\beta+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0.$$

设 $(g_{\alpha\beta})^{-1}=(g^{\alpha\beta})$. 于是有 $\ddot q^\alpha=g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\beta}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\beta \partial t}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\beta \partial q^\gamma}\dot q^\gamma\right)$ (*)

这个方程配上适当的初始条件，再假设 L 有足够好的光滑性，在局部上只存在唯一解.

以后总假设非退化

定义：一个函数 $K=K(q,\dot q,\cdots,q^{(m)},t)$ 称为以 $L=L(q,\dot q,t)$ 为拉氏量的系统的守恒量，如果对方程(*)的任一解 $q^\alpha(t)$，有 $\frac{d}{dt}K(q(t),\dot q(t),\cdots,q^{(m)}(t),t)=0$.

因为总可将(*)代入 K 的表达式用来消去二阶及以上的导数，所以不妨设 $m=1$.

此时有 $$\frac{dK}{dt}=\frac{\partial K}{\partial t}+\frac{\partial K}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha+\frac{\partial K}{\partial \dot q^\alpha}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\beta}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\beta \partial t}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\beta \partial q^\gamma}\dot q^\gamma\right)=0.$$

这可视为 K 所满足的一阶线性 PDE，它的解即系统的守恒量. 不过这个 PDE 并没有什么用，因为要解这类方程，标准做法是利用特征线法化为 ODE 来解. 而这个 ODE 其实就是(*).

事实上，守恒量不是"解"出来的，而是"看"出来的. 只要知道系统的守恒量，就可以代回(*)消去一些未知函数，以达到对方程降阶的目的. 若能找到足够多的守恒量，则可完全解出方程，得到系统的解.

现在考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的质点系的运动. 设质点的坐标为 r_i $(i=1\cdots N)$，质量为 m_i. 于是自由运动的拉氏量为 $L_{free}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot r_i^2$.
$\quad r_i=(x_i,y_i,z_i)$.

自由粒子的运动太简单了. 现在考虑它们之间还存在某种相互作用, 相应的势能项为 $L_{int} = -U(r_1,\cdots,r_N)$. 于是系的拉氏量为

$$L = L_{free} + L_{int} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{r}_i)^2 - U(r_1,\cdots,r_N).$$

注意这个 L 不显含 t, 这是因为并没有依赖时间的外力. 于是时间轴~~起点的位置~~如何建立不影响运动方程. 同理, 空间坐标系的建立也应当不影响 L, 所以 U 应当满足

$$U(r_1+r_0,\cdots,r_N+r_0) = U(r_1,\cdots,r_N) \quad r_0\in\mathbb{R}^3 \quad (空间平移不变性)$$

$$U(Ar_1,\cdots,Ar_N) = U(r_1,\cdots,r_N) \quad A为正交矩阵(空间旋转不变性).$$

这个系统的EL方程可写为 $\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) = 0,\quad i=1\cdots N.$

这里的 $\frac{\partial L}{\partial r_i}$ 和 $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}$ 应理解为向量: $\frac{\partial L}{\partial r_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_i} \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} \\ \frac{\partial L}{\partial z_i} \end{pmatrix}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \end{pmatrix}$.

于是有 $m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$. 或写为 $\ddot{r}_i = -\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial r_i}$.

对空间平移不变性两边的 r_0 求导并取 $r_0=0$ 得 $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0$. 由EL方程可知

$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{r}_i = 0$. 即 $\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{r}_i\right)' = 0$ 这就是动量守恒定律.

作业: 设 $A\in SO(n)$, 求证: 存在一个反对称矩阵 B 使 $A=e^{B}$.
提示: 将 A 化为分块对角标准型, 然后考虑 $n=2$ 的情况.

将空间旋转不变性改写为 $U(e^{tB}r_1,\cdots,e^{tB}r_N) = U(r_1,\cdots,r_N)$, $B\in Mat(3,\mathbb{R})$, $B^T+B=0$.
两边对 t 求导并令 $t=0$ 得 $\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial U}{\partial r_i} B r_i = 0$. 这里关于 B 的线性条件, 3×3 反对称矩阵是一个线性空间, 它有基

$B_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$, $B_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 代入何可得 $\sum_{i=1}^{N} r_i\times\frac{\partial U}{\partial r_i}=0$.

于是有 $\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i\times \dot{r}_i\right)^{\cdot}=\sum_{i=1}^{N} m_i r_i\times\ddot{r}_i=\sum_{i=1}^{N} r_i\times\frac{\partial U}{\partial r_i}=0$. 这就是角动量守恒定律.

最后, 令 $E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{r}_i^2+U$, 则

$$\frac{dE}{dt}=\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{r}_i\ddot{r}_i+\sum\frac{\partial U}{\partial r_i}\dot{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\dot{r}_i\left(m_i\ddot{r}_i+\frac{\partial U}{\partial r_i}\right)=0.$$ 这是机械能守恒.

更一般地, 我们有如下定义和定理.

定义: ① 设 $L=L(q,\dot{q},t)$. 若有某一 q^α 使 $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0$. 则称 q^α 为 L 的一个循环坐标.

② 设 $P_\alpha=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}$, 称为 L 的<u>广义动量</u>. (不是一个好名字).

定理: 若 q^α 是 L 的循环坐标. 则 $\dot{P}_\alpha=0$. 证明: 显然.

动量守恒, 角动量守恒都可视为这一定理的推论.

定理: 设拉氏量 $L=L(q,q',\dots,q^{(m)})$. 则

$$E=\sum_{k=1}^{m} q^{\alpha,k}\sum_{l\geq 0}(-1)^l\partial^l\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha,k+l}}-L$$ 是守恒量. 称为系统的能量.

证明: 设 $P_{\alpha,k}=\sum_{l\geq0}(-1)^l\partial^l\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha,k+l}}$. 则 $P_{\alpha 0}=\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}$. $E=\sum_{k\geq1} q^{\alpha k}P_{\alpha k}-L$

根据定义显然有 $P_{\alpha,k-1}+\partial P_{\alpha k}=\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha,k-1}}$. 于是

$$E'=\sum_{k\geq1} q^{\alpha,k+1}P_{\alpha k}+\sum_{k\geq1} q^{\alpha k}\left(\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha k-1}}-P_{\alpha,k-1}\right)-\sum_{k\geq0} q^{\alpha k+1}\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha k}}=-q^{\alpha,1}\frac{\delta L}{\delta q^\alpha}=0.$$

□.

上述定理表明能量守恒是系统时间平移不变性的结果.

这种守恒律与对称性之间的关系是理论物理中的~~基本~~重要规律. 其一般形式为下面的 Noether 定理.

设 $L = L(q, \dot{q}, t) : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是充分光滑的函数.

$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$ 是 $q(t)$ 的泛函.

定义: ① 设 $\varphi : U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{R}$ 是微分同胚, 若它保持泛函 S 不变, 则称它为系统的对称.

$(q, t) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{t})$

即 $S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \tilde{L}(\tilde{q}(\tilde{t}), \dot{\tilde{q}}(\tilde{t}), \tilde{t})\, d\tilde{t}$, (*)

其中 $\tilde{L}$ 是与 L 等价的拉氏量. 即 $\tilde{L} = L + \partial K$.

② 若 φ_ε 是光滑依赖参数 ε 的系统的对称, 则称 $\{\varphi_\varepsilon\}$ 为一族单参数对称.

$\varepsilon \in (-\delta, \delta)$

对称的完整定义 (*) 非常复杂, 难于处理, 但是如果是一族单参数对称, 我们可以对 ε 求导, 之后对称的条件可以得到简化.

设 $\tilde{q}^\alpha_\varepsilon = q^\alpha + \varepsilon \eta^\alpha(q, t) + o(\varepsilon)$, $\tilde{t} = t + \varepsilon \xi(q, t) + o(\varepsilon)$. 则有

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1 + \varepsilon \dot{\xi} + o(\varepsilon), \quad \dot{\tilde{q}}^\alpha_\varepsilon = \frac{d\tilde{q}_\varepsilon}{d\tilde{t}_\varepsilon} = \frac{d\tilde{q}_\varepsilon}{dt} \Big/ \frac{d\tilde{t}_\varepsilon}{dt} = (\dot{q}^\alpha + \varepsilon \dot{\eta}^\alpha) / (1 + \varepsilon \dot{\xi}) + o(\varepsilon)$$

$$= \dot{q}^\alpha + \varepsilon(\dot{\eta}^\alpha - \dot{q}^\alpha \dot{\xi}) + o(\varepsilon).$$

$$\tilde{S} = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1} \tilde{L}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t})\, d\tilde{t}$$

$K = K(q, t)$

$\tilde{K}(\tilde{q}, \tilde{t}) = K(q, t) + \varepsilon\left(\frac{\partial K}{\partial q^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial K}{\partial t}\xi\right) + o(\varepsilon)$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[L\big(q^\alpha + \varepsilon\eta^\alpha, \dot{q}^\alpha + \varepsilon(\dot{\eta}^\alpha - \dot{q}^\alpha\dot{\xi}), t + \varepsilon\xi\big)(1 + \varepsilon\dot{\xi}) + \frac{d}{dt}\Big(K(q, t) + \varepsilon\Big(\frac{\partial K}{\partial q^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial K}{\partial t}\xi\Big)\Big)\Big]\, dt$$

$$= S + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}(\dot\eta^\alpha - \dot q^\alpha \dot\xi) + \frac{\partial L}{\partial t}\xi + L\dot\xi + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial K}{\partial t}\xi\right)\right) dt$$

所以只要

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi + \underline{\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\eta^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}(\dot\eta^\alpha - \dot q^\alpha\dot\xi) + \boxed{L\dot\xi} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial K}{\partial t}\xi\right) = 0 \quad \text{即可.} \quad (\text{N}2)$$

定理 (Noether) 记号同上, 则

$$I = (\eta^\alpha - \dot q^\alpha \xi)\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} + L\xi + \frac{\partial K}{\partial q^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial K}{\partial t}\xi \quad \text{是一个守恒量.}$$

证明:

$$\dot I = \underline{(\eta^\alpha - \dot q^\alpha\xi)\dot{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}}} - \cancel{\ddot q^\alpha \xi \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}} + (\dot\eta^\alpha - \dot q^\alpha\dot\xi)\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}$$
$$+ \boxed{L\dot\xi} + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\ddot q^\alpha}\right)\xi + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q^\alpha}\eta^\alpha + \frac{\partial K}{\partial t}\xi\right)$$

由 EL 方程及(N1)可知 $\dot I = 0$. □

注: Noether定理也有高阶版本, 不过形式比较复杂这里就省略了, 推导过程与上面类似, 感兴趣的同学可以自己推推看.

有了守恒量之后就可以对方程进行降阶和求解, 这里有一个非常有趣的定理叫做 Routh 定理或 Routh 约化, 也是我们学到的第一个约化型定理, 以后我们还会学习更多这种类型的定理. 有人说约化是力学中永恒的主题, 其意义可从 Routh 定理中领会

考虑一个拉氏量 $L(q,\dot q,t)$, $q=(q^1\cdots q^n)$, 设 $m<n$. 若 $q^{m+1},\cdots,q^n$ 都是循环坐标, 则由 EL 方程可知 $\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} = c_\alpha$, $\alpha = m+1,\cdots,n$. ← (R1)

现在假设 $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}\right)_{\alpha\beta=m+1,\cdots,n}$ 非退化, 则由反函数定理, 上式在局部上决定了

(R2)

$$\dot q^\alpha = \xi^\alpha(q^1\cdots q^m, \dot q^1,\cdots,\dot q^m, t; c_{m+1}\cdots c_n). \quad \alpha = m+1\cdots n.$$

现在定义一个新的拉氏量

$$\tilde{L}(q^1\cdots q^m, \dot{q}^1\cdots\dot{q}^m, t; c) = L(q^1\cdots q^m, \dot{q}^1\cdots\dot{q}^m, \xi^{m+1},\cdots,\xi^n, t; c) - c_\alpha \xi^\alpha. \quad (R3)$$

则有，对 $\beta = 1\cdots m$

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q^\beta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}^\beta}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^\beta} + \sum_{\alpha=m+1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial q^\beta} - c_\alpha\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial q^\beta}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\beta} + \sum_{\alpha=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\dot{q}^\beta} - c_\alpha\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\dot{q}^\beta}\right)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q^\beta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\beta}\right)$$

定理(Routh) 设 L 满足之前的条件(循环 R1，非退化 R_2) 则按(R3)定义的拉氏量的EL方程 + (R1) 等价于原L的EL方程。

与Routh定理平行的还有一个Whittaker定理。它可以利用能量守恒对系统进行降阶。不过这样得到的系统通常都比较不维看，我们在这里就不给出它的形式了。

例：① 根据定义，$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}$，若将L替换为等价的拉氏量，即 $\tilde{L} = L + \partial K$，则有

$\tilde{P}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\dot{q}^\alpha}(L+\partial K) = P_\alpha + \frac{\partial K}{\partial q^\alpha}$ 所以广义动量不是唯一的，它依赖于L的选取。例如，对电磁场中的带电粒子，

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial\dot{q}^\alpha}\left(\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) + e(A_1\dot{q}_1+A_2\dot{q}_2+A_3\dot{q}_3-\varphi)\right) = m\dot{q}^\alpha + eA_\alpha.$$

A_α 中则有规范不变性带来的自由度。若 $\dot{A}_\alpha = 0$，$\dot{\varphi} = 0$ 则系统能量守恒：

$$E = \dot{q}^\alpha P_\alpha - L = \dot{q}^\alpha(m\dot{q}^\alpha + eA_\alpha) - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^\alpha\dot{q}^\alpha + e(A_\alpha\dot{q}^\alpha - \varphi)\right) = \frac{1}{2}mv^2 + e\varphi.$$

若用 $A' = A + \nabla f$，$\varphi' = \varphi - \dot{f}$，则 $\dot{A}' = \dot{A} + \nabla\dot{f} = 0$，$\dot{\varphi}' = \dot{\varphi} - \ddot{f} = 0$，这样的f只能取 $f = at + b(x,y,z)$ 的形式，于是 $\varphi' = \varphi - a$，即势能只能相差一个零点选取带来的自由度，于是能量E中也只有一个常数自由度。

更一般地，我们有如下定理

定理：设 $L(q, q', \cdots, q^{(m)})$ 与 $\tilde{L}(q, q', \cdots, q^{(m)})$ 等价(即 $\tilde{L} = L + \partial K$)，则 $E(L)$ 与 $E(\tilde{L})$ 至多相差一个常数。

证明：只需证 若 $L=\partial K$，则 $E(L)=$ ~~常数~~ $E(L)=q^{\alpha,k}P_{\alpha,k}(L)-L$.

作业：$P_{\alpha,k}(\partial K)=\frac{\partial K}{\partial q^{\alpha,k-1}}+P_{\alpha,k}\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)$

于是 $E(\partial K)=q^{\alpha,k}\frac{\partial K}{\partial q^{\alpha,k-1}}-q^{\alpha,k}\frac{\partial K}{\partial q^{\alpha,k-1}}+P_{\alpha,k}\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)-\frac{\partial K}{\partial t}=\boxed{-\frac{\partial K}{\partial t}}+E\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)$ 另一方面 $\frac{dK}{dt}$ 应不显含 t，

即 $E\left(\frac{dK}{dt}\right)=0$. 于是 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)=0$，即 $\frac{\partial K}{\partial t}=$常数，所以 $E(\partial K)$ 为常数. □

这个定理解释了为什么能量总是取值在一维torsor中. 它也说明Hamilton力学相比Lagrange力学有一个优点，即H中无有太大的自由度.

② 一维运动

在这部分中我们考虑 $n=1$ 的系统，特别地我们不假设 $L=L(q,\dot q)$，即系统能量守恒.

A. 曲线上的自由粒子在重力场中的运动.

设有一条光滑曲线，由 $y=f(x)$ 的图像给出，把它想像成一个山坡，并且有一个质量为m的质点在它上面做自由运动.

由之前的某个例子可知系统的动能为

$$T=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2)=\frac{m}{2}(1+f'(x)^2)\dot x^2.$$ 势能显然为 $U=mgf(x)$. 于是

$$L=\frac{m}{2}(1+f'(x)^2)\dot x^2-mgf(x).$$ 这个问题看起来比较复杂，我们先对它做一个坐标变换，设 q 满足 $(1+f'(x)^2)\dot x^2=\dot q^2$，即 $\left(\frac{dq}{dx}\right)^2=1+f'(x)^2$，于是

$q(x)=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$，它就是曲线的弧长，我们可以取一个起点 $(x_0,f(x_0))$，然后适当规定正负号，则 $x\mapsto q(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的微分同胚，特别地，它有反函数 $x=x(q)$，于是 L 可写为（不妨取 $m=1$）

$$L=\frac{1}{2}\dot q^2-gf(x(q)).$$ 设 $U(q)=gf(x(q))$，则问题简化为 $L=\frac{1}{2}\dot q^2-U(q)$，其EL方程为 $\ddot q+U'(q)=0$.

我们下一节再仔细考虑这个例子.

现在我们来看函数 $U(q)$. 先求个导:

$$U'(q)=\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dq}=g f'(x(q))\cdot\frac{1}{\sqrt{1+f'(x(q))^2}}$$

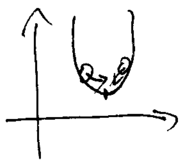
它可推出 $U'(q)=0 \Leftrightarrow f'(x(q))=0$. 即 f 的驻点即 U 的驻点.

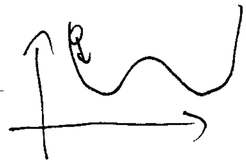
如果再求一个导, 则得

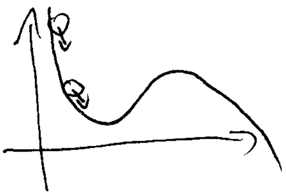
$$U''(q)=\frac{dU'(q)}{dx}\cdot\frac{dx}{dq}=g\frac{f''(x(q))}{(1+f'(x(q))^2)^2}$$

它说明 f 凸当且仅当 U 凸, 即 f 的形状与 U 的形状差不多.

在很多实际问题中我们面对的都是形如 $L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-U(q)$ 的拉氏量, 根据上面的分析, 当 U' 是有界函数时, 设 $|U'|\le M$. 则可由 $\frac{U'}{M}=f'/\sqrt{1+f'^2}$ 确定出某个函数 f, 其中 $\frac{dx}{dq}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}=\sqrt{1-\frac{U'^2}{M^2}}$, 于是问题等价于 f 上的滚动. 当做定性分析时这个过程都可以省去, 仅直观地认为是在 U 上的滚动即可. 例如

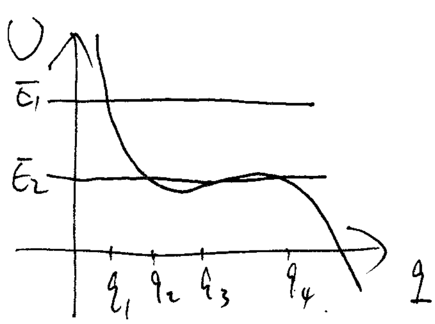
$U(x)=$  时, 可知系统有一个平衡点, 非平衡时在平衡点附近做周期运动.

$U(x)=$  时, 可知系统有两个平衡点, 低能时会停在一个附近, 能量较高时会在两个平衡点之间来回切换.

$U(x)=$  时. 可知系统在低能时有一个平衡位置, 高能时则没有稳态, 会一直掉到无穷远处去.

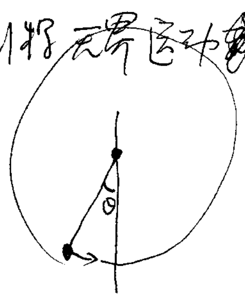
B. 势场中的自由粒子.

即 $L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-U(q)$. 因为 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$, 所以能量 $H=\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L=\frac{1}{2}\dot{q}^2+U(q)$ 守恒. 设 $H=E$. 于是 $\dot{q}^2=2(E-U(q))$. 左边 ≥ 0, 于是 $U(q)\le E$. 给定 E 之后可由此式确定 q 可能的范围.



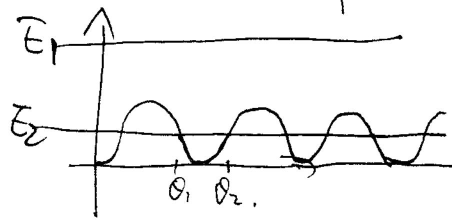
例如 E_1 时, $q\ge q_1$, E_2 时则有两种运动状态. 一种是 $q_2\le q\le q_3$, 一种是 $q\ge q_4$.

q取值范围有限的系统一般则有界运动，或束缚态，无限的则将~~无界运动~~。



注：~~非束缚态~~ 无界运动 未必会跑到无穷，例如单摆问题中

$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)$. 不妨设 $m=1$, $l=1$. 于是

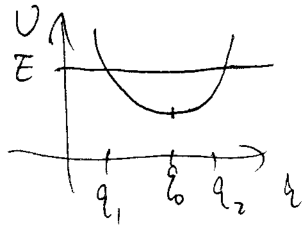


$$E=\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+g(1-\cos\theta)$$

对于E_2，θ会束缚在$[\theta_1,\theta_2]$上，尽管表面看起来还有很多别的态，但它们相差2π，所以其实只有一个。

对于E_1，这相当于高速转动的单摆，它的θ虽然无界，但实际上所代表的质点运动是有界的。

关于q的方程可分离变量 $\frac{dq}{\sqrt{2(E-U(q))}}=dt$，于是 $\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{2(E-U(q))}}=t-t_0$.
将积分积出再取反函数可得$q(t)$，但是这一般来说做不到，因为积分很难算出。



即使积分算不出来，我们也可得到其它的一些信息。
考虑一个平衡位置附近的束缚态，当 $q=q_1$ 或 q_2 时有
$\dot{q}^2=2(E-U(q))=0$，即 q_1,q_2 是质点转向的点，
于是马上可以知道这个周期运动的周期为

$$T(E)=2\int_{q_1}^{q_2}\frac{dq}{\sqrt{2(E-U(q))}}$$

现在考虑微振动，即 $E=U(q_0)+\varepsilon$. 注意 $U'(q_0)=0$.
所以在q_0附近有 $U(q)=U(q_0)+\frac{1}{2}U''(q_0)(q-q_0)^2+o(q-q_0)^2$.

于是 $q_{1,2}=q_0\pm\sqrt{\frac{2\varepsilon}{U''(q_0)}}+o(1)$ 设 $q=q_0+\sqrt{\frac{2\varepsilon}{U''(q_0)}}\,p$，则

$$T=\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{U''(q_0)}}\,dp}{\sqrt{\varepsilon-\frac{U''(q_0)}{2}(q-q_0)^2-o(q-q_0)^2}}=\frac{2}{\sqrt{U''(q_0)}}\int_{-1}^{1}\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}+o(\varepsilon)$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{U''(q_0)}}+o(\varepsilon).$$

即微振动的周期与能量无关，事实上它是简谐振动。

很多问题都可通过各种约化方法化为一维运动，所以上述关于一维运动的分析并不只是玩具模型，而是很有实际意义的。

③ 二体问题。

考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的两个质点，由之前的例子应有

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot r_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot r_2^2-U(r_1,r_2)$$

其中 U 满足 $U(r_1+r_0,r_2+r_0)=U(r_1,r_2)$，取 $r_0=-r_2$，则有 $U(r_1,r_2)=U(r_1-r_2,0)$。

另外，$U(Ar_1,Ar_2)=U(r_1,r_2)$，于是 $U(r_1,r_2)$ 仅依赖于 $|r_1-r_2|$，所以不妨写为

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot r_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot r_2^2-U(|r_1-r_2|)$$

由动量守恒，~~不妨选取质心~~ $m_1\dot r_1+m_2\dot r_2=0$，即 $(m_1r_1+m_2r_2)^{\cdot}=0$。

可知质心 $\frac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}$ 作匀速直线运动，重新选取质心为坐标原点，可得 $m_1r_1+m_2r_2=0$。

设 $r_1-r_2=r$，则可解得 $r_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}r$，$r_2=\frac{-m_1}{m_1+m_2}r$

代入 L 可得 $L=\frac{m}{2}\dot r^2-U(|r|)$，其中 $m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$，称为约化质量。

作业：为什么可以这样代入？请用Routh定理加以解释。

（提示：设 $s=\frac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}$，则 $(r_1,r_2)\to(s,r)$ 是一个线性变换。

$$L(s,r,\dot s,\dot r)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot s^2+\frac{1}{2}m\dot r^2-U(|r|)$$

于是 s 的三个分量成为循环坐标）

~~于是二体问题总可转化为一个中心力场的问题，用极坐标可得~~

$$\cancel{L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)-U(r)}$$

~~显然 θ 是循环坐标。~~

二体问题还满足角动量守恒，角动量 $\vec M$ 是向量，$\vec M$ 是常数意味着 r 总在垂直于 $\vec M$ 的平面内（因为 $r\times\vec M=0$），在此平面内建立极坐标系，则有

$$L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)-U(r)$$

θ 是循环坐标，其广义动量为 $M=|\vec M|=mr^2\dot\theta$，于是 $\dot\theta=\frac{M}{mr^2}$。根据Routh定理，

$$\tilde L(r,\dot r)=\frac{m}{2}\left(\dot r^2+r^2\left(\frac{M}{mr^2}\right)^2\right)-U(r)-M\cdot\frac{M}{mr^2}$$

$$=\frac{m}{2}\dot r^2-U(r)-\frac{M^2}{2mr^2}$$

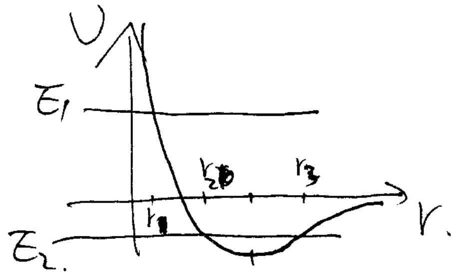
离心势

设 $U_{eff}(r)=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}$，为等效中心力场问题的有效势，于是原问题化为 $L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-U_{eff}(r)$，即一个一维运动。

由之前的分析，系统的运动形式主要由总机械能 E 与 $U_{eff}(r)$ 的关系决定。

A. Kepler 问题。

$U(r)=-\frac{\alpha}{r}$，$\quad U_{eff}(r)=-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}$。



当 $E=E_1>0$ 时，$r\geq r_1$ 所以是无界运动。
当 $E=E_2<0$ 时，$r_2\leq r\leq r_3$，是束缚态。

$r_{min}=\frac{M^2}{m\alpha}$。

$(U_{eff})_{min}=-\frac{m\alpha^2}{2M^2}$。

$E\geq (U_{eff})_{min}$

下面考虑具体的运动方程，由一维运动的一般性质，有

$$t-t_0=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{eff})}}=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2mr^2}\right)}}$$

若仅关心轨道形状，注意 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{M}{mr^2}$，所以有

$$\theta-\theta_0=\int_{r_0}^{r}\frac{M/(mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2mr^2}\right)}}dr=\int_{r_0}^{r}\frac{M/r^2\,dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}}$$

具体地，有（略去积分常数，写为不定积分的形式）

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2mr^2}\right)}}=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}$$

$$r^2-\frac{\alpha}{|E|}r+\frac{M^2}{2m|E|}=\left(r-\frac{\alpha}{2|E|}\right)^2-\underbrace{\left(\frac{\alpha^2}{4|E|^2}-\frac{M^2}{2m|E|}\right)}_{\geq 0}$$

$=(r-a)^2-a^2e^2$。

设 $a=\frac{\alpha}{2|E|}$，

$e=\sqrt{1-\frac{2|E|M^2}{m\alpha^2}}$

设 $r-a=-ae\cos\xi$，则有

$$t=\pm\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{a(1-e\cos\xi)\cancel{ae\sin\xi}\,d\xi}{\cancel{ae\sin\xi}}$$

$$=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)+t_0.$$ 再加上 $r=a(1-e\cos\xi)$

这给出 $r(t)$ 的参数表示法. 重新选 t 的起点可使 $t_0=0$，于是有

$$r(\xi)=a(1-e\cos\xi).\qquad t(\xi)=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\underbrace{\xi-e\sin\xi}).$$

Kepler方程. $E-e\sin E=M$.

另一方面，设 $\frac{1}{r}=u$

$$\theta=\int\frac{M/r^2\,dr}{\sqrt{2m(E+\frac{\alpha}{r})-\frac{M^2}{r^2}}}=-\int\frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{M^2}(E+\alpha u)-u^2}}=-\int\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{M^2}+\frac{m^2\alpha^2}{M^4}\right)-\left(u-\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2}}$$

$$=\arccos\frac{Mu-\frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}$$

若设 $p=\frac{M^2}{m\alpha}$，则有 $\frac{p}{r}=1+e\cos\theta$

或 $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$. 当 $E<0$ 时 $0<e<1$. 所以

轨道为椭圆.

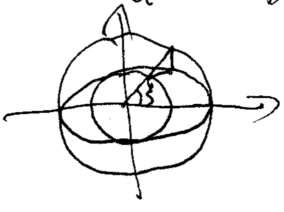
最后，利用 $p=a(1-e^2)$ 可得

$$x=r\cos\theta=a(\cos\xi-e),\qquad y=r\sin\theta=\underbrace{a\sqrt{1-e^2}}_{b}\sin\xi.$$

ξ 从 0 到 2π 正好给出椭圆的一圈. 用直角坐标则为 $\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

ξ 称为偏近点角. 由 $t(\xi)$ 易知 $T=2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}$

$$=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}.$$



作业：对于$E>0$的情况，解出$r(\xi)$、$t(\xi)$、$x(\xi)$、$y(\xi)$，$\xi\in\mathbb{R}$.

B. 谐振子.

$$U(r)=\frac{k}{2}r^2. \quad U_{eff}(r)=\frac{k}{2}r^2+\frac{M^2}{2mr^2}.$$

按Case A 类似的做法计算相应的积分可得$r(t)$、$\theta(t)$等. 但此Case有更简单的做法. 将L化回直角坐标得

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{k}{2}(x^2+y^2). \quad 于是 \quad m\ddot{x}+kx=0. \quad m\ddot{y}+ky=0.$$

所以通解为 $x=a\cos(\omega t+\alpha)$，$y=b\sin(\omega t+\beta)$ 其中$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. α β 为积分常数. 这仍是一个椭圆.

C. Schwarzschild 黑洞.

设有一个大质量天体，质量为M_0. 由于广义相对论效应，它附近的时空会发生畸变. 具体的物理不提，最后的数学问题为如下拉氏量：

$$L=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right)c^2\dot{t}^2-\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_0}{r}}-r^2\dot{\theta}^2\right].$$

其中$(\dot{\ })$表示对~~时空间隔~~固有时τ求导. $r_0=2GM_0/c^2$为Schwarzschild半径. 这个L显然有两个循环坐标t与θ以及能量积分. 记

$$\mathcal{E}=\left(1-\frac{r_0}{r}\right)c^2\dot{t}, \quad M=r^2\dot{\theta}. \quad \left(1-\frac{r_0}{r}\right)c^2\dot{t}^2-\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_0}{r}}-r^2\dot{\theta}^2=c^2$$

这个必须为c^2或0. 这里假设$m=1$.

则有 $$\dot{r}^2=\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}-\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)$$

若取$\mathcal{E}=c^2+E$，则有（c^2为静能）.

$$\dot{r}^2=2\left(E+\frac{GM_0}{r}-\frac{M^2}{2r^2}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{E^2}{2}+\frac{GM_0M^2}{r^3}\right)\right)$$

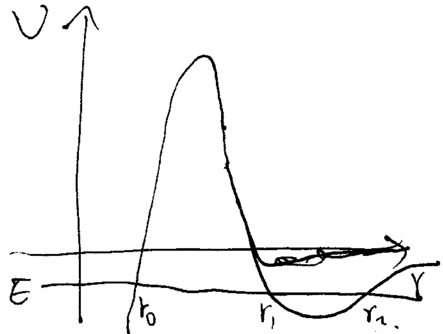
当$c\to\infty$时，它回到Kepler问题.

当c有限时，不妨取$c=1$，则有 $$\dot{r}^2=\underset{}{\overset{2E}{(\mathcal{E}^2-1)}}+\frac{r_0}{r}-\frac{M^2}{r^2}+\frac{r_0M^2}{r^3}$$

或写为 $\frac{1}{2}\dot{r}^2+U_{eff}(r)=E$. 其中 $E=\frac{1}{2}(\epsilon^2-1)$.

$$U_{eff}(r)=\frac{1}{2}\left(-\frac{r_0}{r}+\frac{M^2}{r^2}-\frac{r_0M^2}{r^3}\right)=-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2r^2}-\frac{\gamma}{r^3}.$$

它的第一项仍为Newton引力, 第二项为离心势, 第三项则为广义相对论修正.



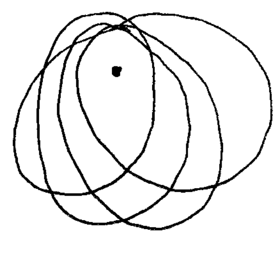
注意 γ 是个小量. 所以当 r 较大时 $U_{eff}(r)$ 与 Kepler 的 $U_{eff}(r)$ 接近, 但当 r 靠近0时, 则会一下掉下去. 这意味着在相对论里面的质点会直接掉下去, 不存在束缚态.

对于一个 $E<0$, 解方程 $E=U_{eff}(r)$ 可得三个根. 其中 r_0 是靠近0的坠落态, 不必理会. r_1, r_2 则是束缚态的极小极大值. 它们都是 γ 的函数 且当 $\gamma\to 0$ 时, $r_1\to a(1-e)$, $r_2=a(1+e)$.

下面考虑这样的修正对轨道的影响. 本来对任何势能 U 有

$$\theta=\int\frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2(E-U(r))-\frac{M^2}{r^2}}}.$$

行星旋转一周后的角度变化为



$$\Delta\theta=2\int_{r_1}^{r_2}\frac{M/r^2\,dr}{\sqrt{2(E-U(r))-\frac{M^2}{r^2}}}\qquad(*)$$

例如, 在Kepler情形 $U(r)=-\frac{\alpha}{r}$. $r_1=a(1-e)$. $r_2=a(1+e)$, 代入上述积分可得 $\Delta\theta=2\pi$. 即轨道是封闭的.

在 Schwarzschild 情形 $U(r)=-\frac{\alpha}{r}-\frac{\gamma}{r^3}$. 因 γ 是小量, 代入 $(*)$ 式 则 $\Delta\theta$ 是 γ 的函数. 且当 $\gamma\to 0$ 时 $\Delta\theta\to 2\pi$. 记 $\Delta\theta=2\pi+\underbrace{(\delta\theta)}_{\gamma\text{的线性项}}+O(\gamma^2)$

现在的问题是 $\delta\theta$ 是什么?

$$\Delta\theta=\int_{r_1(\gamma)}^{r_2(\gamma)}\frac{2M/r^2\,dr}{\sqrt{2\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{M^2}{2r^2}+\frac{\gamma}{r^3}\right)}}$$

记被积函数为 $f(r)$. 则有

$$\delta\theta=\frac{d}{d\gamma}(\Delta\theta)\Big|_{\gamma=0}=\frac{dr_2}{d\gamma}\cdot f(r_2)\Big|_{\gamma=0}-\frac{dr_1}{d\gamma}f(r_1)\Big|_{\gamma=0}+\int_{r_1(0)}^{r_2(0)}\left(\frac{df}{d\gamma}\Big|_{\gamma=0}\right)dr.$$

γ 不过这三项在 $\gamma=0$ 时都是奇异的. 需要加在一起才能抵消掉奇性. 所以我们换一种算法.

注意 $$\Delta\theta=-2\frac{\partial}{\partial M}\left(\int_{r_1}^{r_2}\underbrace{\sqrt{2\left(E+\frac{\alpha}{r}+\frac{\gamma}{r^3}-\frac{M^2}{2r^2}\right)}}_{g(r)}\,dr\right)$$

里面的积分没有奇性 所以可以像上面一样进行分析.

$$\frac{\delta\theta}{\gamma}=-2\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{dr_2}{d\gamma}\underbrace{g(r_2)}_{0}-\frac{dr_1}{d\gamma}\underbrace{g(r_1)}_{0}+\int_{r_1(0)}^{r_2(0)}\frac{dg}{d\gamma}\Big|_{\gamma=0}dr\right)$$

$$=-2\frac{\partial}{\partial M}\left(\int_{r_1}^{r_2}\frac{\frac{1}{r^3}dr}{\sqrt{2(E-U_{eff}(r))}}\right).$$

注意 $$d\theta=\frac{M/r^2\,dr}{\sqrt{2(E-U_{eff}(r))}}.$$

$$=-2\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{1}{M}\int_0^{\pi}\frac{1}{r}d\theta\right)$$

利用 $\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\theta}{p}$.

$$=-2\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{1}{M}\int_0^{\pi}\frac{1+e\cos\theta}{p}d\theta\right)=-2\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\pi}{Mp}\right).$$

$p=\frac{M^2}{\alpha}$.

$$=(-2)\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\alpha\pi}{M^3}\right)=\frac{6\alpha\pi}{M^4}.$$

于是 $$\delta\theta=\frac{6\alpha\pi}{M^4}\gamma.$$

代入具体的数值可得水星近日点的进动.

下面我们给出一种更加"物理"的分析方法. 因为e总是很小, 我们可以认为轨道近似地为圆形, 只看r的一维运动问题的话, 就是在r_0附近的微振动. 我们之前已经得出微振动的周期, 由此可以得出其"角速度":

$\omega_r = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{U''_{eff}(r_0)}$. 另一方面, 由角动量守恒, $r^2\dot\theta = M$, 所以角度的真正角速度为

$\omega_\theta = \frac{M}{r_0^2}$. 对于Kepler问题, $U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2r^2}$. $r_0 = \frac{M^2}{\alpha}$

$U''_{eff}(r_0) = \frac{\alpha^4}{M^6}$, 于是有 $\omega_r = \omega_\theta = \frac{\alpha^2}{M^3}$.

这意味着r从r_{max}到r_{min}再回来所花的时间与θ从0到2π所花的时间是一样的. 所以形成一个封闭的轨道.

另一方面, 对于Schwarzschild问题, $U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r^3}$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{M^2 + \sqrt{M^4 - 12\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{M^2}{\alpha} - \frac{3\gamma}{M^2} + o(\gamma).$$ 于是

$$\left.\begin{aligned} \omega_\theta &= \frac{M}{r_0^2} = \frac{\alpha^2}{M^3}\left(1 + \frac{6\alpha\gamma}{M^4} + o(\gamma)\right) \\ \omega_r &= \sqrt{U''_{eff}(r_0)} = \frac{\alpha^2}{M^3}\left(1 + \frac{3\alpha\gamma}{M^4} + o(\gamma)\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\omega_\theta}{\omega_r} = 1 + \frac{3\alpha\gamma}{M^4} + o(\gamma)$$

这说明r完成一个周期的振动时, θ比2π多转了 $2\pi\cdot\left(\frac{3\alpha\gamma}{M^4}\right) + o(\gamma)$.

即 $\delta\theta = \frac{6\pi\alpha\gamma}{M^4}$. 这与前面的计算结果一致.

作业: 对于 $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^n}$, 利用上面的分析方法求出

$$\delta\theta = n(n-1)\pi\frac{\alpha^{n-2}}{M^{2n-2}}\gamma.$$

§4. Hamilton力学（或称正则方程）

考虑一个拉氏量 $L=L(q,\dot q,t)$。它的广义动量定义为 $p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}$，若L是非退化的，即 $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta}\right)\neq 0$，则 $\det\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot q^\beta}\right)\neq 0$ (*)。注意 p_α 是 $q,\dot q$ 和 t 的函数。若 (*) 成立，由隐函数定理，我们可将 $\dot q^\alpha$ 表示成 q,p 和 t 的函数。

定义：条件同前，定义 $H(p,q,t)=p_\alpha\cdot\dot q^\alpha(p,q,t)-L(q,\dot q(p,q,t),t)$，称为L对应的Hamilton量（Hamiltonian）。

定理：关于 $q(t)$ 的EL方程等价于关于 $p(t),q(t)$ 的如下方程

$$\dot q^\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\qquad \dot p_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha},\qquad \alpha=1,\cdots,n. \qquad (*)$$

证明：由H的定义可知

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot q^\alpha+\cancel{p_\beta\frac{\partial \dot q^\beta}{\partial p_\alpha}}-\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\beta}\frac{\partial \dot q^\beta}{\partial p_\alpha}}$$，所以 $\dot q^\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$。另一方面

$$\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}=\cancel{p_\beta\frac{\partial \dot q^\beta}{\partial q^\alpha}}-\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}+\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q^\beta}\frac{\partial \dot q^\beta}{\partial q^\alpha}}\right)=-\frac{d}{dt}(p_\alpha)$$ 即 $\dot p_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$。□

(*)称为L对应的Hamilton正则方程，简称正则方程（canonical equation）。

正则方程的好处是，它是一个一阶方程，比EL那种二阶方程要易于处理。另外它依赖哈氏量H，这个函数是不随L中的全微分部分变化的，因此在用起来比L方便。

根据正则方程

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot p_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\right)+\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

若 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$，则 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$，于是 $\frac{dH}{dt}=0$。这再次说明了H是系统的一个守恒量。

另外，若 $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}=0$，则 $\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}=0$，于是 $\dot p_\alpha=0$。这再次说明循环坐标的动量守恒的（定律）。

一般地，对于 p, q, t 的函数 f，有

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

定义：$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}$. 称为 f 与 g 的 Poisson 括号.

则有 $\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$. 所以 f 是守恒量 $\Leftrightarrow \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

定理（Poisson）. 若 f, g 是两个守恒量，则 $\{f, g\}$ 也是守恒量.

证明：$\{H, \{f, g\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\}$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\{f, g\} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\{f, g\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad \left(\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_\beta}\frac{\partial g}{\partial q^\beta} - \frac{\partial f}{\partial q^\beta}\frac{\partial g}{\partial p_\beta}\right)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\frac{\partial g}{\partial q^\beta} + \frac{\partial f}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}\frac{\partial g}{\partial p_\beta} - \frac{\partial f}{\partial q^\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\right)$$

$$- \frac{\partial H}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\frac{\partial g}{\partial q^\beta} + \frac{\partial f}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial p_\alpha \partial q^\beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_\alpha \partial q^\beta}\frac{\partial g}{\partial p_\beta} - \frac{\partial f}{\partial q^\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p_\beta}\frac{\partial g}{\partial q^\beta} + \frac{\partial f}{\partial p_\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q^\beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^\beta}\frac{\partial g}{\partial p_\beta} - \frac{\partial f}{\partial q^\beta}\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial p_\beta}\right)$$

$$= \cdots = \left\{\{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \qquad \square$$

作业：

① 对 $\forall f, g, h$, $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$. （$\{f, g\} + \{g, f\} = 0$）

② $\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$.

③ $\{f \cdot g, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$.

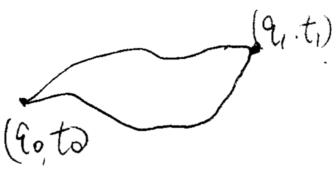
① $\{q_\alpha, q_\beta\}=0$, $\{p^\alpha, q_\beta\}=\delta^\alpha_\beta$, $\{p^\alpha, p^\beta\}=0$.

例② $\mathbb{R}^3$中的 若某系统具有角动量守恒, $M=r\times p$ 写成分量形式即 $M=(M_x, M_y, M_z)$, 其中 $M_x = yP_z - zP_y$, $M_y = zP_x - xP_z$, $M_z = xP_y - yP_x$. 则有 $\{M_x, M_y\}=-M_z$, $\{M_y, M_z\}=-M_x$, $\{M_z, M_x\}=-M_y$.

定义: 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{R}$ 线性空间. 若有双线性运算 $\{\cdot,\cdot\}:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 满足
i) $\{f,g\}+\{g,f\}=0$. ii) $\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0$.
则称 $(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\})$ 是一个Lie代数.

由Poisson定理, 一个系统的守恒量的全体构成一个Lie代数. 由Poisson定理, 可通过已知的守恒量生成"新"的守恒量. 但有时得到的可能只是0或者已知的东西. 更有效的求解方法是 Hamilton-Jacobi 方法. 为此我们要做些准备工作.

对于 $q_0\in D$, $t_0\in\mathbb{R}$, 定义 $S_{q_0,t_0}: D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $S_{q_0,t_0}(q_1,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}L(q(t),\dot q(t),t)\,dt$. 其中 $q(t)$ 是满足 $q(t_0)=q_0$, $q(t_1)=q_1$ 以及L的EL方程的解. $S_{q_0,t_0}(q_1,t_1)$ 称为拉氏量L的作用量函数. 注意它并不一定总存在. 并且即使存在, 也可能不是良好定义的. 为解决这个问题, 我们可要求L是非退化的. 于是 EL方程可改写为 $\ddot q^\alpha=(\cdots)$, 它在局部上总是有解的. 当(q_1,t_1)充分靠近(q_0,t_0)时, 可以说明解也是唯一的, 此时 S_{q_0,t_0} 在(q_0,t_0)附近是良好定义的.



引理: 将 $S_{q_0,t_0}(q,t)$ 简记为 $S(q,t)$. 则有 (改动q_0,t_0只会增加一个常数, 所以不影响引理的结论).

$$\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}=P_\alpha,\qquad \frac{\partial S}{\partial t}=-H.$$

证明: 考虑 $S(q+h,t)-S(q,t)$. 设以q,t为终点的EL的解为$q(t)$, 以$(q+h,t)$为终点的EL的解为$q(t)+\delta q(t)$, 于是当$h\to 0$时,

$$S(q+h,t)-S(q,t)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)\delta q^\alpha(t)\,dt+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\delta q^\alpha\Big|_{t_0}^{t_1}+o(1)$$

因为 $q(t)$ 满足 EL 方程，所以此时第一项为零。对于第二项，$\delta q^\alpha(t_0)=0$，

$\delta q^\alpha(t_1) = q^\alpha + h^\alpha - q^\alpha = h^\alpha$，所以有 $\frac{\partial S}{\partial q^\alpha} = p_\alpha$。

要证第二个等式，设 $q(t)$ 是 EL 的一个解，则 $S(q(t),t)$ 对不同的 t 给出的是同一条 $q(t)$ 上的积分只是终点不同，于是

$$\frac{dS}{dt}(q(t),t) = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} L(q(t),\dot q(t),t)\,dt = L(q(t),\dot q(t),t).$$ 另一方面，由链式法则

$$\frac{dS}{dt}(q(t),t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\cdot \dot q^\alpha = \frac{\partial S}{\partial t} + p_\alpha \dot q^\alpha$$ 所以 $\frac{\partial S}{\partial t} = L - p_\alpha \dot q^\alpha = -H$。 □

定理：作用量函数 $S(q,t)$ 满足如下 Hamilton-Jacobi 方程：

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0.$$ 证明：显然。 □

HJ 方程是非线性偏微分方程，它看起来要比原始的 Hamilton 方程复杂，但是在很多问题中，我们可以直接"看出"HJ 方程的解，由此便可反过来解出 Hamilton 方程。HJ 方法事实上是求解 Hamilton 方程的最有效的方法。为了给出这个方法我们还需要继续做些准备。

A. 相空间变分原理

(p,q) 所在的空间叫相空间 $\underbrace{}_{\text{记为 } \mathbb{R}^{2n}}$，$H$ 是相空间与时间直积 $\underbrace{}_{\text{记为 } \mathbb{R}^{2n+1}}$ 上的函数。

对于 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上的函数 $H(p,q,t)$，可定义泛函

$$S[p,q] = \int_{(q_0,t_0)}^{(q_1,t_1)} p_\alpha dq^\alpha - H\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (p_\alpha \dot q^\alpha - H)\,dt.$$ κ $q(t_0)=q_0$, $q(t_1)=q_1$.

对 p, q 分别做变分 $p\mapsto p+\delta p$, $q\mapsto q+\delta q$ 得

$p\,d\delta q = d(p\delta q) - dp\,\delta q$

$$\delta S = \int_{(q_0,t_0)}^{(q_1,t_1)} \left[\delta p\,dq + \underline{p\,d\delta q} - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{\partial H}{\partial q}\delta q\right)dt\right]$$

$$= \int_{(q_0,t_0)}^{(q_1,t_1)} \left[\delta p\left(\dot q - \frac{\partial H}{\partial p}\right)dt - \delta q\left(\dot p + \frac{\partial H}{\partial q}\right)dt\right] + p\delta q\Big|_{(q_0,t_0)}^{(q_1,t_1)}$$ $\underbrace{}_{0}$

所以Hamilton方程为 $\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$, $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$ 正好为Hamilton正则方程.

B. 正则变换.

定义: 对含时相空间可微坐标变换 $Q^\alpha=Q^\alpha(p,q,t)$, $P_\alpha=P_\alpha(p,q,t)$. 若存在新的Hamilton量 $\tilde{H}$, 使得新坐标下的正则方程 $\dot{Q}=\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}$, $\dot{P}=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}$ 与原正则方程等价. 则称这是一个正则变换. (等价是什么意义下的? 见下一定理的证明. 等讲了辛几何后可对这个等价有一个更好的定义)

若 $\left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial p_\beta}\right)$ 非退化, 则可用 q, Q, t 来表示 p. 同理, 若 $\frac{\partial P}{\partial p}$, $\frac{\partial Q}{\partial q}$, $\frac{\partial P}{\partial q}$ 非退化, 则可用 (q,P,t), (Q,p,t), (P,p,t) 充当含时相空间的新坐标. 这四种情况对应四类正则变换.

定理: 设 $(P,Q,\tilde{H})$ 给出一个正则变换, 且 $\frac{\partial Q}{\partial p}$ 非退化. 则存在函数 $F(q,Q,t)$, 使 $p_\alpha(q,Q,t)=\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}$, $P_\alpha=-\frac{\partial F}{\partial Q^\alpha}$, $\tilde{H}=H+\frac{\partial F}{\partial t}$. (实际上这才是正则变换的真正定义).

证明. 只需证 $p_\alpha dq^\alpha-P_\alpha dQ^\alpha+(\tilde{H}-H)dt$ 是恰当的.

考虑两组坐标下的作用量泛函:

$$S[p,q]=\int_{(q_0,t_0)}^{(q_1,t_1)} p_\alpha dq^\alpha-H dt,\qquad \tilde{S}[P,Q]=\int_{(Q_0,t_0)}^{(Q_1,t_1)} P_\alpha dQ^\alpha-\tilde{H} dt$$

重新选取 q, Q 为坐标, 并考虑它们的差

$$(S-\tilde{S})[q,Q]=\int_{(q_0,Q_0,t_0)}^{(q_1,Q_1,t_1)} p_\alpha dq^\alpha-P_\alpha dQ^\alpha+(\tilde{H}-H)dt.$$

S与$\tilde{S}$应该是~~同一个~~等价的泛函, 所以上述差泛函应当不依赖于路径 $q(t)$, $Q(t)$ 的选取.

所以其内部的1-形式是恰当的. F即上述1-形式的变上限积分. $\square$

类似地，若 $\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)$ 非退化，则存在 $\Phi(q,P,t)$，使

$$P_\alpha(q,p,t)=\frac{\partial\Phi}{\partial q^\alpha},\quad Q^\alpha=\frac{\partial\Phi}{\partial p^\alpha},\quad \tilde{H}=H+\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

因为 $S-\tilde{S}=\int P_\alpha dq^\alpha-P_\alpha dQ^\alpha+(\tilde{H}-H)dt$

$$=\int P_\alpha dq^\alpha+Q^\alpha dP_\alpha+(\tilde{H}-H)dt-d(P_\alpha Q^\alpha)$$

取 $\Phi=F+P_\alpha Q^\alpha$ 即可。其它两种情况同理。

正则变换的用处在于，如果能找到某正则变换将 H 换成较简单的 $\tilde{H}$，则 $\tilde{H}$ 的正则方程就有可能解出。特别地，若能找到正则变换使 $\tilde{H}=0$，则 $\dot{P}=0$，$\dot{Q}=0$ 直接就做完了。这就是 Hamilton-Jacobi 方法。

C. H-J 方法

HJ方程是一个偏微分方程，一般来说非常复杂。例如，即使是 $L=\frac{1}{2}\dot{q}^2$，$H=\frac{1}{2}p^2$，相应的HJ方程也是 $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2=0$ 这种解不出来的方程。但是事实上我们不需要完全解出HJ方程，偏微分方程的通解应当包含任意函数的自由度（例如 $\partial_x f(x,y)=0$ 的解是 $f=g(y)$）。而我们只需要包含足够多任意常数自由度的解，这在很多时候就简单多了。例如前面自由~~例~~粒子这个例子，$S(q,t)=Cq-\frac{1}{2}C^2t+S_0$，$C$，$S_0$ 为任意常数，就是一个解。这种形式的解已经可以保证由下面的HJ方法可以得到原正则方程的解了。

因为HJ方程中只出现 $\frac{\partial S}{\partial q}$ 或 $\frac{\partial S}{\partial t}$，所以若 S 是解，则 $S+S_0$ 也是。这个 S_0 是没用的，所以以后将不再写出它来。

定义：若 $f(t;q^1\cdots q^n;A_1\cdots A_n)$ 是HJ方程的解，其中 $A_1\cdots A_n$ 为任意常数，且满足 $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha\partial A_\beta}\right)\neq 0$，则称 f 为一个HJ方程的全积分。

若有一个全积分 $f(t,q,A)$，我们将 A 视为正则变换的新动量，由之前的公式知旧动量、新坐标、新 Hamilton 量应为

$$P_\alpha = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \quad \cancel{\ } B^\alpha = \frac{\partial f}{\partial A_\alpha} \quad \widetilde{H} = H + \frac{\partial f}{\partial t}$$

因为 f 是 HJ 的解，所以 $\widetilde{H}=0$！注意 $\frac{\partial P_\alpha}{\partial A_\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial A_\beta}$ 非退化，所以这的确符合这类正则变换的存在条件。

因为 $\widetilde{H}=0$，所以新坐标，新动量都是守恒量，即 $\dot{A}_\alpha = 0$，$\dot{B}^\alpha = 0$。这些守恒量应当理解为旧坐标，旧动量的函数，即，首先从 $P_\alpha = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}$ 中解出 $A_\alpha = A_\alpha(p,q,t)$，然后再代入 $B^\alpha = \frac{\partial f}{\partial A_\alpha} = B^\alpha(p,q,t)$。有了这些守恒量，原始的正则方程就完全解出了，这就是 HJ 方法。

例 $H = \frac{1}{2}P^2$。$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0$。$f = Aq - \frac{1}{2}A^2 t$。$P = A$，$B = q - At$，$\widetilde{H}=0$
$\dot{A} = 0$，$\dot{B} = 0$，取 $A = v$，$B = q_0$，则 $q = q_0 + vt$，$P = v$，这就是自由粒子的正则方程的通解。

一般地，若已找到全积分 $f(t,q,A)$，直接写出 $B^\alpha = \frac{\partial f}{\partial A_\alpha}$ $(\alpha = 1 \ldots n)$，从中解出 $q^\alpha(t; A, B)$ 来，则这个 q 含有 2n 个任意常数，这就是正则方程的解。至于 P_α，可由 $P_\alpha = \frac{\partial f}{\partial q^\alpha}$ 得到，一般来说已经不需要它了。

有的时候暂时无法求出全积分，只能得到含有少于 n 个任意常数的解，例如常数 $A_1 \ldots A_k$ $(1 \le k < n)$，我们仍可用它们做新动量，只要再补一些旧动量使动量总数为 n 就可，然后进行正则变换，可使方程降阶。

特别地，若 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$，HJ 方程具有如下形式的解 $f = f_0(q,A) - Et$，其中 f_0 满足 $H(\frac{\partial f_0}{\partial q}, q) = E$，这个方程可叫稳定 HJ 方程，它的解叫做简约作用量。

另一种情况是，若 H 含有一个循环坐标，例如 q^n，即 HJ 方程为如下形式：

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^n}, q^1, \ldots, q^{n-1}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

设 $S = S'(q^1, \ldots, q^{n-1}, t) + A_n q^n$ 则有

$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q^{n-1}}, A_n, q^1, \ldots, q^{n-1}, t\right) + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0$$

它可视为自由度为 n-1 的一个 HJ 方程。

更一般的做法称为分离变量法．若HJ方程中某个 q^α，例如 q^n，它与相应的 $\frac{\partial S}{\partial q^n}$ 仅以一个固定的组合形式例如 $\varphi(q^n, \frac{\partial S}{\partial q^n})$ 出现在方程中，即HJ方程可写为

$$\Phi\left(t; q^1, \cdots, q^{n-1}; \frac{\partial S}{\partial q^1}, \cdots \frac{\partial S}{\partial q^{n-1}}; \varphi\left(q^n, \frac{\partial S}{\partial q^n}\right)\right) = 0$$

我们可取 $S(q, t) = S'(q^1, \cdots, q^{n-1}, t) + S_n(q_n)$，于是有

$$\Phi\left(t; q^1, \cdots, q^{n-1}, \frac{\partial S'}{\partial q^1}, \cdots \frac{\partial S'}{\partial q^{n-1}}; \varphi\left(q^n, \frac{\partial S_n}{\partial q^n}\right)\right) = 0.$$

在这个方程中，前面的变量不含 q^n，最后一个位置则不含 $t, q^1, \cdots, q^{n-1}$．它要想成为恒等式，则只有

$$\varphi\left(q^n, \frac{\partial S_n}{\partial q^n}\right) = A_n \quad \Phi\left(t, q^1, \cdots, q^{n-1}, \frac{\partial S'}{\partial q^1}, \cdots \frac{\partial S'}{\partial q^{n-1}}, A_n\right) = 0.$$

这就将HJ方程降了一阶．解出 $S_n = S_n(q, A_n)$ 与 $S'(t, q^1, \cdots, q^{n-1}; A_n)$ 合则可得 S．
这样的过程如果能一直进行下去，则最终的 S 可写为

$$S = \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha(q_\alpha; A_1, \cdots, A_n) - E(A_1, \cdots, A_n)t$$

这样的系统则叫做可以完全分离变量的．

例：~~Kepler问题~~ 中心力场问题．(in $\mathbb{R}^3$)

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(r) = \frac{m}{2}(\underbrace{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2}) - U(r)$$

作业：推导上述球坐标下的动能公式．

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) + U(r)$$

它有循环坐标 φ．还有能量积分．

设 $S(t, r, \theta, \varphi) = S_1(r) + S_2(\theta) + A_\varphi \cdot \varphi - Et$，则相应的HJ方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi^2\right) + U(r) = E.$$

后面段写为

$$\frac{1}{2m}\left(r^2\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2\right)-2mr^2(E-U(r))=-\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2+\frac{A_{\varphi 1}^2}{\sin^2\theta}\right)$$

左边只含 r，而右边只含 θ，所以左右两边都只能是常数，记

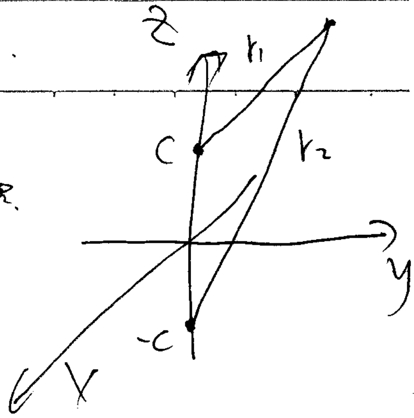
$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2+\frac{A_{\varphi}^2}{\sin^2\theta}=A_2.\ \text{则}\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+\frac{A_2}{2mr^2}=E-U(r).$$

这两个方程可直接积分得到 S_1 与 S_2，于是可得最终的 S。在这个 S 中，A_1、A_2 和 E 是要被选为新动量的任意常数。S_1、S_2 积分时的积分常数则只给出 S 上的一个加性常数，对结果没有帮助。

分离变量法能否成功关键在于坐标系。若在中心力场中选用直角坐标系，除非是^与势能^谐振子那种 $U(r)$ 可在直角坐标下分离变量的特殊情况，否则是无法用分离变量法求解的。

更一般地，若在某坐标系下 (q^1, q^2, q^3)，动能项呈有 $\frac{1}{2}\left(H_1(q)\dot{q}_1^2+H_2(q)\dot{q}_2^2+H_3(q)\dot{q}_3^2\right)$ 的形式，这样的坐标系叫正交曲线坐标系。若势能项呈有某种较好的形式使得它与 H_1、H_2、H_3 配合在一起可以分离变量，那么原问题就可通过 HJ ~~方程~~ 方法求解。在实际应用中，往往是根据势能部分寻找好的坐标系，然后再分离变量。常见的正交曲线坐标系有十几种，可参见王竹溪的《特殊函数概论》的附录。

HJ 方程的分离变量法与偏微分方程课程中的分离变量法有相通之处，特别是坐标系的选取上。在量子力学中要解 Schrödinger 方程，到那时可以发现，那里用的分离变量法与相应的经典力学中解 HJ 方程的分离变量法几乎是一样的。这个现象可以有一个光学的解释，经典力学对应几何光学，量子力学则对应波动光学。作用量函数对应光学中的"波前集"。从量子到经典的 WKB 近似可 ~~将作用量~~ 从量子的某些方程变成 HJ 方程。详情可参见 Arnold 的书与一些量子力学教材。



真实质量不等也没关系.

例② 固定双中心的引力场

设在 z 轴上 $z=c$ 和 $z=-c$ 处各有一个质点，质量都为M.
另一个质点在它们的引力作用下的拉氏量为

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+k\left(\frac{\cancel{M}}{r_1}+\frac{\cancel{M}}{r_2}\right).$$

(不妨取 $M=1$)

为解决这个问题，我们需要选取合适的坐标系.

首先，设 $\rho^2=x^2+y^2$，$\varphi=\arctan\frac{y}{x}$. 则 $r_1^2=\rho^2+(z-c)^2$，$r_2^2=\rho^2+(z+c)^2$.
若设 $\xi=r_1+r_2$，$\eta=r_2-r_1$，则有 $\rho=\frac{\sqrt{\xi^2-4c^2}\cdot\sqrt{4c^2-\eta^2}}{4c}$，$z=\frac{\xi\eta}{4c}$.
于是

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2=\dot{\xi}^2\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{4(\xi^2-4c^2)}\right)+\dot{\eta}^2\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{4(4c^2-\eta^2)}\right)+\frac{(\xi^2-4c^2)(4c^2-\eta^2)}{16c^2}\dot{\varphi}^2.$$

由此可得 $p_\xi=m\frac{\xi^2-\eta^2}{4(\xi^2-4c^2)}\dot{\xi}$. $p_\eta=m\frac{\xi^2-\eta^2}{4(4c^2-\eta^2)}\dot{\eta}$. $p_\varphi=m\frac{(\xi^2-4c^2)(4c^2-\eta^2)}{16c^2}\dot{\varphi}$.

(不妨设 $m=1$)

$$H=p_\xi\cdot\dot{\xi}+p_\eta\dot{\eta}+p_\varphi\dot{\varphi}-L=2\frac{\xi^2-4c^2}{\xi^2-\eta^2}p_\xi^2+2\frac{4c^2-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}p_\eta^2+\frac{8c^2}{(\xi^2-4c^2)(4c^2-\eta^2)}p_\varphi^2-\frac{4k\xi}{\xi^2-\eta^2}.$$

对于这个H，它显然有能量积分 $H=E$ 与角动量守恒 $p_\varphi=0$. 设
$S=-Et+p_\varphi\varphi+S_1(\xi)+S_2(\eta)$，则有 HJ 方程

$$2\frac{\xi^2-4c^2}{\xi^2-\eta^2}\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2+2\frac{4c^2-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2+\frac{8c^2p_\varphi^2}{(\xi^2-4c^2)(4c^2-\eta^2)}-\frac{4k\xi}{\xi^2-\eta^2}=E.$$

通分得

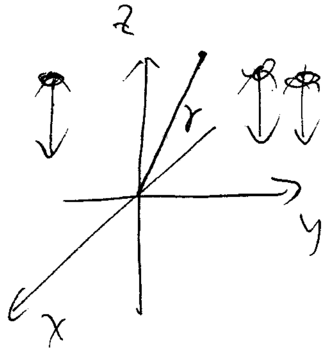
$$2(\xi^2-4c^2)(S_1')^2+2(4c^2-\eta^2)(S_2')^2+8c^2\left(\frac{1}{\xi^2-4c^2}+\frac{1}{4c^2-\eta^2}\right)p_\varphi^2-4k\xi=E(\xi^2-4c^2+4c^2-\eta^2)$$

分离变量得

$$2(\xi^2-4c^2)(S_1')^2+\frac{8c^2}{\xi^2-4c^2}p_\varphi^2-4k\xi-E(\xi^2-4c^2)=\beta.$$

$$2(4c^2-\eta^2)(S_2')^2+\frac{8c^2}{4c^2-\eta^2}p_\varphi^2+E(4c^2-\eta^2)=-\beta.$$

由此不难积出 $S_1(\xi)$ 和 $S_2(\eta)$. 这样得到的 S 中含有 E, P_φ 和 β 三个任意常数. 它就是该问题的全积分. 之后由 HJ 方法的一般做法可解得通解 $\xi(t;E,P_\varphi,\beta)$, $\eta(t;E,P_\varphi,\beta)$, $\varphi(t;E,P_\varphi,\beta)$. 因为 S_1,S_2 的积分都是椭圆积分, 所以这个解无法写成较简单的初等函数.



例③ 均匀电场 + 引力场.

$$L=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)+\frac{\alpha}{r}+\beta z. \quad (\text{不妨取 } m=1)$$

设 $\xi=\sqrt{\rho^2+z^2}+z$, $\eta=\sqrt{\rho^2+z^2}-z$, 则 $z=\frac{\xi-\eta}{2}$, $\rho=\sqrt{\xi\eta}$

$r=\frac{\xi+\eta}{2}$. 于是 $v^2=\dot\rho^2+\dot z^2+\rho^2\dot\varphi^2=\frac{1}{4}\left[\frac{\xi+\eta}{\xi}\dot\xi^2+\frac{\xi+\eta}{\eta}\dot\eta^2\right]+\xi\eta\dot\varphi^2$.

$P_\xi=\frac{\xi+\eta}{4\xi}\dot\xi$, $P_\eta=\frac{\xi+\eta}{4\eta}\dot\eta$, $H=\frac{2\xi}{\xi+\eta}P_\xi^2+\frac{2\eta}{\xi+\eta}P_\eta^2+\frac{P_\varphi^2}{2\xi\eta}-\frac{2\alpha}{\xi+\eta}-\frac{\xi-\eta}{2}\beta$.

设 $S=-Et+P_\varphi\varphi+S_1(\xi)+S_2(\eta)$ 得

$$\frac{2\xi}{\xi+\eta}(S_1')^2+\frac{2\eta}{\xi+\eta}(S_2')^2+\frac{P_\varphi^2}{2\xi\eta}-\frac{2\alpha}{\xi+\eta}-\frac{\xi-\eta}{2}\beta=E,\ \text{于是}$$

$$2\xi(S_1')^2+\frac{P_\varphi^2}{2\xi}-\alpha-\frac{\beta}{2}\xi^2-E\xi=B.$$

$$2\eta(S_2')^2+\frac{P_\varphi^2}{2\eta}-\alpha+\frac{\beta}{2}\eta^2-E\eta=-B.$$

由此可解得 $S_1(\xi)$ 和 $S_2(\eta)$, 进而得到 $S(\xi,\eta,\varphi,t;E,P_\varphi,B)$.

例④ Kerr 黑洞 (Kerr 1963) (Carter 1968).

设 $r_0>0$. $a\in\mathbb{R}$. $|a|<\frac{1}{2}r_0$.

$$L=\frac{1}{2}\Big[\Big(1-\frac{r_0 r}{r^2+a^2\cos^2\theta}\Big)\dot t^2-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-r_0r+a^2}\dot r^2-(r^2+a^2\cos^2\theta)\dot\theta^2$$

$$-\Big(r^2+a^2+\frac{a^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}r_0 r\sin^2\theta\Big)\sin^2\theta\,\dot\varphi^2+\frac{2r_0ra}{r^2+a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta\,\dot t\dot\varphi\Big].$$

$$P_t=\Big(1-\frac{r_0r}{r^2+a^2\cos^2\theta}\Big)\dot t+\frac{r_0ra}{r^2+a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta\,\dot\varphi,\quad P_r=-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-r_0r+a^2}\dot r$$

$$P_\theta=-(r^2+a^2\cos^2\theta)\dot\theta.\quad P_\varphi=-\Big(r^2+a^2+\frac{a^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}r_0r\sin^2\theta\Big)\sin^2\theta\,\dot\varphi+\frac{r_0ra}{r^2+a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta\,\dot t.$$

$$\Rightarrow \dot r=-\frac{r^2-r_0r+a^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}P_r.\quad \dot\theta=-\frac{P_\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta},$$

$$\dot t=P_t+\frac{r_0r(P_t(r^2+a^2)+aP_\varphi)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)(r^2-r_0r+a^2)}\qquad \dot\varphi=\frac{a^2P_\varphi+ar_0rP_t-\frac{P_\varphi}{\sin^2\theta}(r^2-r_0r+a^2)}{(r^2+a^2\cos^2\theta)(r^2-r_0r+a^2)}.$$

$\Rightarrow$ 设 $\Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta$. $\Delta=r^2-r_0r+a^2$.

$$H=\frac{1}{2}\Big[\Big(1+\frac{r_0r(a^2+r^2)}{\Sigma\Delta}\Big)P_t^2-\frac{\Delta}{\Sigma}P_r^2-\frac{P_\theta^2}{\Sigma}-\frac{\overset{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\overbrace{r^2-rr_0+a^2\cos^2\theta}}}{\Sigma\Delta}\frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta}+\frac{ar_0rP_tP_\varphi}{\Sigma\Delta}\Big].$$

设 $S=-\frac{\tau}{2}+P_tt+P_\varphi\varphi+S_1(r)+S_2(\theta)$, 则有

$$\Big(1+\frac{r_0r(a^2+r^2)}{\Sigma\Delta}\Big)P_t^2-\frac{\Delta}{\Sigma}(S_1')^2-\frac{1}{\Sigma}(S_2')^2-\frac{1}{\Sigma}\Big(\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{a^2}{\Delta}\Big)P_\varphi^2+\frac{ar_0r}{\Sigma\Delta}P_tP_\varphi=1\ \text{即}$$

$$\Big[\underline{\underline{r^2}}+\underset{\sim}{a^2\cos^2\theta}+\underline{\underline{\frac{r_0r(a^2+r^2)}{\Delta}}}\Big]P_t^2-\underline{\underline{\Delta(S_1')^2}}-\underset{\sim}{(S_2')^2}-\Big(\underset{\sim}{\frac{1}{\sin^2\theta}}-\underline{\underline{\frac{a^2}{\Delta}}}\Big)P_\varphi^2+\underline{\underline{\frac{ar_0r}{\Delta}P_tP_\varphi}}=(\underline{\underline{r^2}}+\underset{\sim}{a^2\cos^2\theta})$$

=: r部分. ～: θ部分.

则如可以分离变量. 由此可得 Kerr 黑洞附近粒子的运动轨迹.

例 5 椭球上的测地线.

椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$ 上两点间的最短线.

由前的一般讨论, 只需考虑 $L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$, 其中 $x(q_1,q_2)$, $y(q_1,q_2)$, $z(q_1,q_2)$ 是椭球面的适当的参数化.

这个问题最初由 Jacobi 解决, 这也是 HJ 方法的起源. 其关键在于利用椭球坐标: 椭球坐标的定义是如下方程 $\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1$ 的三个根. 记之为 λ, μ, ν. 并假设 $-\lambda<c^2<-\mu<b^2<-\nu<a^2$. 则有如下关系

$$x=\pm\sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}},\quad z=\pm\sqrt{\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}}$$

上述椭球即 $\lambda=0$ 时的坐标曲面.

通过直接的计算可得

$$L=\frac{1}{8}\left[\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\dot{\lambda}^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}+\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)\dot{\mu}^2}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}+\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)\dot{\nu}^2}{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}\right]$$

因为 $\lambda=0$, 所以第一项没有, 于是

$$P_\mu=\frac{1}{4}\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)\dot{\mu}}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)},\quad P_\nu=\frac{1}{4}\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)\dot{\nu}}{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}$$

$$H=2\left[\frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}P_\mu^2+\frac{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}P_\nu^2\right]$$

于是 HJ 方程为 $S=-Et+S_1(\mu)+S_2(\nu)$

$$2\left[\underbrace{\frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{\mu-\lambda}(S_1'(\mu))^2}-\underline{\frac{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}{\nu-\lambda}(S_2'(\nu))^2}\right]=E(\mu-\nu)$$

可分离变量. 最终的解可由椭圆函数给出.

§5. 微分流形初步 (略)

§5.1 流形, 光滑映射. 正则值定理, 例.

§5.2 切空间, 切丛, 切映射.

§5.3 余切空间, 余切丛, 微分形式.

§5.4 黎曼流形, 辛流形, 复流形.

§5.5 李群与李代数.

§6. 辛约化

§6.1 矩映射 (动量映射 moment map. momentum map).

设 (M, ω) 是一个辛流形. G 是一个 Lie 群. G 在 M 上有一个光滑作用, 记为 $\varphi: G\times M\to M$, $(g, x)\mapsto gx$, 于是对 $\forall g\in G$, $\varphi_g: M\to M$, $x\mapsto gx$ 是 M 的一个微分同胚, ~~于是~~ 于是 φ 也可以视为 G 到 $Diff(M)$ 的李群同态 (但 $Diff$ 是无限~~维~~维"李群", 所以之前的有限维李群的结论不能直接套用. 下面只是一个形式的说明, 后面将给出严格的处理), 由 Lie 的基本定理 (第一结构), 存在从 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 $Diff(M)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{X}(M)$ 的同态 $d\varphi$, 下面来具体看一下它的定义.

设 $\xi\in\mathfrak{g}$, 它的指数映射 $t\mapsto \exp(t\xi)$ 给出 G 的一个一维子群. ~~把~~ 把它作用在 M 上, 得到一族 M 的微分同胚 $\varphi_t: M\to M$, $x\mapsto \exp(t\xi)(x)$. 对固定的 x_0, 它则给出通过 x_0 的曲线 $\gamma: \mathbb{R}\to M$, $t\mapsto \exp(t\xi)(x_0)$, 对它求导, 再取 $t=0$ 得到 $T_{x_0}M$ 中的一个切向量 $\xi_{x_0} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(t\xi)(x_0)$. 令 x_0 跑遍 M, 则得切向量场 ξ. 它完全是由最初的 $\xi\in\mathfrak{g}$ 确定的. 所以我们得到一个映射 $d\varphi: \mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$.

作业: 证明 $d\varphi$ 是 Lie 代数同态. 即 $d\varphi([\xi_1, \xi_2]) = [d\varphi(\xi_1), d\varphi(\xi_2)]$.

下面考虑辛结构.

~~定义: 若对 $\forall g\in G$, 有 $\varphi_g^*\omega=\omega$, 则称 G 作用 φ 是辛的.~~

定义：① 设 $f: M\to M$ 是微分同胚，若 $f^*\omega=\omega$，则称 f 是辛微分同胚。
② 若对 $\forall g\in G$，ℓ_g 都是辛微分同胚，则称 G 作用 φ 是辛作用。

辛微分同胚构成 $\mathrm{Diff}(M)$ 的一个子群，记为 $\mathrm{Symp}(M)$。记 $\mathrm{Vol}=\frac{1}{n!}\omega^n$ $(n=\frac{\dim M}{2})$，则 Vol 是 M 上的体积形式。若 $f^*\omega=\omega$，则 $f^*\mathrm{Vol}=\mathrm{Vol}$，所以辛微分同胚保体积形式。记 $\mathrm{VDiff}(M)$ 为 M 上的保体积微分同胚群，则有：

$$\mathrm{Symp}(M)\subsetneq \mathrm{VDiff}(M)\subsetneq \mathrm{Diff}(M).$$

第二个 $\neq$ 是显然，但第一个 $\neq$ 却困难得多。辛微分同胚比保体积微分同胚要"硬"一些，由此延伸出来的数学分支叫辛拓扑。其中有 Non-squeezing 定理，Arnold 猜想等重要的结果。

~~设 f 是一个辛微分同胚，能否设 f 由一个向量场生成~~ 设 ξ 是 M 上的向量场，则由它定义的 ODE 的解定义了 M 上的一个单参数微分同胚群，为 $f_t: M\to M$，$x_0\mapsto x(t)$，$(\dot x(t)=\xi,\ x(0)=x_0)$。若 $f_t^*\omega=\omega$，两边对 t 求导得 $L_\xi\omega=0$，即 $(i_\xi d+d i_\xi)\omega=0$。注意 ω 是辛的，所以 $d\omega=0$，所以 $d(i_\xi\omega)=0$。若 $H^1(M)=0$，则存在 $H\in C^\infty(M)$，使 $i_\xi\omega=dH$，即这个 ξ 是一个 Hamilton 向量场（所以 $H^1(M)$ 是无穷小辛微分同胚中 Hamilton 向量场的障碍）。

定义：设 $\varphi: G\times M\to M$ 是一个辛作用，$d\varphi: \mathfrak{g}\to \mathfrak{X}(M)$ 是相应的 Lie 代数同态。若对 $\forall \xi\in\mathfrak{g}$，$d\varphi(\xi)$ 都是 Hamilton 的，则称 φ 是 Hamilton 辛作用。

换言之，对 $\forall\xi\in\mathfrak{g}$，$\exists H_\xi\in C^\infty(M)$，使 $i_{d\varphi(\xi)}\omega=dH_\xi$。
所以我们得到一个映射 $\psi:\mathfrak{g}\to C^\infty(M)$，$\xi\mapsto H_\xi$，
使得 $d\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ 分解为 ψ 与 $H\mapsto\xi_H$ 的复合。
$i_{d\varphi(\xi)}\omega=d\psi(\xi)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "d\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathfrak{X}(M) \\
& C^\infty(M) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}\qquad H\mapsto \xi_H$$

注意上述 ψ 不是唯一的，因为 Hamilton 函数的选取可以相差一个任意常数。因此，若 ψ_0 是任一 $\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ 的函数，则 $\tilde\psi=\psi+\psi_0$ 也满足上述条件，若满足下页的条件就好 ~~下面我们要在满足条件的 ψ 中找一个最好的来~~

~~所以我们考虑如下映射 ψ: $M \to \mathfrak{g}^*$, $x \mapsto \mu(x)(\xi) = \psi(\xi)(x)$.~~
注意 $d\varphi$ 和 $H \mapsto \xi_H$ 都是线性映射. 所以 上述 ψ 必须满足

$$\psi(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) = \lambda_1\psi(\xi_1) + \lambda_2\psi(\xi_2) + C$$

其中 C 是个依赖 $\xi_1, \xi_2, \lambda_1, \lambda_2$ 的常数.(可选 $\mathfrak{g}$ 的基, 先对基定义 ψ, 然后线性延拓)

除此以外, 设 $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$. 注意 $d\varphi$ 和 $H \mapsto \xi_H$ 都是 Lie 代数同态(可能差个正负号, 所以有 $d(\{\psi(\xi_1), \psi(\xi_2)\}) = d(\psi([\xi_1, \xi_2]))$. 即

$$\cancel{\{\psi(\xi_1), \psi(\xi_2)\}} \quad \psi([\xi_1, \xi_2]) = \{\psi(\xi_1), \psi(\xi_2)\} + C.$$

① 定义: 设 $\varphi: G \times M \to M$ 是 Hamilton 辛作用. 若存在 Lie 代数同态 $\psi: \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, 使得对 $\forall \xi \in \mathfrak{g}$, $i_{d\varphi(\xi)}\omega = d\psi(\xi)$, 则称 φ 是齐次 Hamilton 辛作用. (此名词较少见, 一般的书不起名, 直接给下面的定义了.
moment map)

② 设 φ 是齐次 Hamilton 辛作用, ψ 是相应的映射, 则可定义

$$\mu: M \to \mathfrak{g}^* \quad x \mapsto \mu(x) \quad \text{其中} \langle \mu(x), \xi \rangle = \psi(\xi)(x)$$

称为 φ 对应的 moment map (ψ 也叫 comoment map).

为进一步研究 moment map 的性质, 我们回顾一些 Lie 群中的结果.
设 G 是 Lie 群. 则对 $\forall g \in G$. 可定义 $A_g: G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$. 则 A_g 是 Lie 群同态. 由 Lie 的第一结构定理知它自然诱导了 Lie 代数同态 $dA_g: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. 让 g 跑遍 G, 则得 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的一个作用 $G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$
记为 Ad. 相应的 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 的同构记为 Ad_g.
称为伴随表示

(G, V)
有了群表示后可在其对偶空间上定义对偶表示 $G \times V^* \to V^*$, $(g, f) \mapsto gf$. 满足

$gf(v) = f(g^{-1}v)$. (取逆是为使 $(g_1g_2)f = g_1(g_2 f)$).
Ad 的对偶表示记为 Ad^*. 称为余伴随表示

定理：设G是连通Lie群，$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ 是辛Hamilton辛作用对应的moment map，则μ是等变的，即对$\forall g \in G$，

$$\mu \circ l_g = Ad_g^* \circ \mu.$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "l_g"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "Ad_g^*"] \\ M \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{g}^* \end{tikzcd}$$

证明略.

（另一种等价的定义是从μ出发. 设$\varphi: G \times M \to M$是一个辛作用. $d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$，若映射$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$满足

① 记$\mu^\xi: M \to \mathbb{R}$，$x_0 \mapsto \mu(x_0)(\xi)$. 则对$\forall \xi \in \mathfrak{g}$，$\mu^\xi$是$d\varphi(\xi)$的Hamilton，即$d\mu^\xi = i_{d\varphi(\xi)}\omega$.

② μ是等变的

则称μ是φ的一个moment map. 有了μ之后可定义$\psi: \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$，满足$\psi(\xi)(x) = \mu(x)(\xi)$. 则可验证$\psi$是Lie代数同态）

定理：若$H^1(\mathfrak{g})=0$，$H^2(\mathfrak{g})=0$，则任一Hamilton的G作用存在唯一的moment map.

例：① $M=T^*\mathbb{R}^n$　$\omega=\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.　$G=\mathbb{R}^n$　$\varphi: G \times M \to M$，$(q_0,(q,p)) \mapsto (q+q_0, p)$

$d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$，$\xi=(\xi^i) \mapsto \xi^i \frac{\partial}{\partial q_i} \rightsquigarrow \begin{cases} \dot{q}=\xi^i \\ \dot{p}=0 \end{cases} \rightsquigarrow H_\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i p_i$.

$\psi: \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$，$\xi \mapsto \langle \xi, p\rangle$，$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$，$(q,p) \mapsto p$. 所以$\mu$叫动量映射.

② $M=T^*\mathbb{R}^3$　$\omega=\sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i$　$G=SO(3)$，$\varphi: G \times M \to M$，$(Q,(q,p)) \mapsto (Qq, Qp)$.

记$Q=\exp(tA)$，$A \in \mathfrak{g} = so(3)$，则$d\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$，$A \mapsto (Aq, Ap)$. 这个向量场的Hamilton量为$H_A = \frac{1}{2}\langle p, Aq\rangle$，此即$\psi(A)$. 于是$\mu: M \to \mathfrak{g}^*$，$(q,p) \mapsto \mu(q,p)$.

其中$\mu(q,p)(A) = \langle p, Aq\rangle$. 记$A = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$，则$x, y, z$为$\mathfrak{g}^*$中的基.

$\mu(q,p)(A) = (p_2q_3 - p_3q_2)x + (p_3q_1 - p_1q_3)y + (p_1q_2 - p_2q_1)z$. 所以$\mu$关于$\mathfrak{g}^*$中基的坐标正好就是$\mathbb{R}^3$中的角动量. 所以$\mu$也叫动量矩，角动量矩映射.

③ $M=T^*\mathbb{R}^n$，$G=\mathbb{R}$为一Hamilton向量场的微分同胚，则μ即为Hamilton量.

§6.2. 辛约化

设 (M,ω) 是辛流形，G 是一个 Lie 群，在 (M,ω) 上有辛作用，且存在矩射 $\mu: M\to \mathfrak{g}^*$。根据上一节末尾的例子，设 $e_1,\cdots e_n$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 的基，~~...~~

$\mu(x)=\sum_{i=1}^{n} J_i(x)e_i$。则 $J_1,\cdots,J_n$ 应该是类似角动量的守恒量。

力学上的常见的问题是，若已知一些守恒量 $J_1,\cdots J_n$，我们可将它们限制在某一水平集 $M_c=\{J_1=c_1,\cdots J_n=c_n\}$ 上，然后进一步求解原方程。~~...~~ Routh 定理指出，若这些 J 都是循环坐标，则新系统仍可作为 Lagrange 的（或等价地 Hamilton 的）。下面的辛约化即上述情况的推广。

定理（Marsden-Weinstein-Meyer）（此处只简单假设 $G_c=G$，或干脆取 $c=0$，否则在余伴随轨道上，M_r 可能只是 Poisson 的。）(M,ω,G,μ) 同前。设 $c\in\mathfrak{g}^*$ 是 μ 的正则值，G_c 是 c 关于余伴随作用的迷向子群（$G_c=\{g\in G\mid Ad_g^* c=c\}$）

~~...~~ $M_c=\mu^{-1}(c)$，于是 G_c 可作用在 M_c 上。若这个作用是自由地（freely）正常的（proper），则 $M_r=M_c/G_c$ 是一个光滑流形。记 $i: M_c\to M$，$\pi: M_c\to M_r$。

则存在唯一的辛形式 $\omega_r\in\Omega^2(M_r)$，使得 $\pi^*\omega_r=i^*\omega$。

定义：(M_r,ω_r) 称为 (M,ω) 关于 (G,μ,c) 的 MWM 约化/或商，一般简记为 $M//G$。

若 M 上有一个 Hamilton 向量场 X，其 Hamilton 量为 H，且 H 是 G 不变的，则 H 限制在 M_c 上也是 G_c 不变的，因此它定义了 M_r 上的一个光滑函数 H_r。类似地，X 是 G 不变的，可以证明 μ 是 X 的守恒量，于是 X 与 M_c 相切，且也是 G_c 不变的，所以也定义了 M_r 上的向量场，它的 Hamilton 量就是 H_r。这就是 Hamilton 系统的辛约化。（另一种看法或证明是考虑 X 生成的单参数群 R，然后对 $G\times R$ 套用 MWM 约化）。

之前的各种~~...~~求解，约化，Noether 定理，Routh 定理等都是上述辛约化的特例。