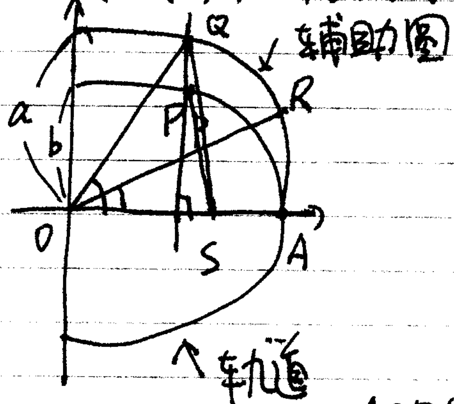
Kepler 问题

§1. Kepler 方程

Kepler 三定律：

(1) 行星运动轨道是椭圆，太阳位于其焦点。

(2) 向径相同时间内扫过的面积相同。(3) 略。(见后文)



- S：太阳
- P：行星
- A：近日点
- Q：P在辅助圆上的投影
- R：辅助圆上一点，使扇形 AOR 的面积等于不完整扇形 ASQ 的面积

- $E=\angle AOQ$. - $M=\angle AOR$

由投影关系 $S_{ASP}=\frac{b}{a}S_{ASQ}=\frac{b}{a}S_{AOR}=\frac{ab}{2}M$.

由 K(2)，$M=\alpha t$. 另一方面，$S_{ASQ}=S_{AOQ}-S_{SOQ}$，于是

$$\frac{a^2}{2}M=\frac{a^2}{2}E-\frac{a^2}{2}e\sin E \Rightarrow M=E-e\sin E.$$

这就是 Kepler 方程。有了 E 之后，P 的坐标为 $(a\cos E, b\sin E)$。在实际应用中，由 t 定出 M，然后解 K 方程得 E，最后得 P 的位置。

这里主要的困难是如何解 K 方程。在实际问题中，$0<e<1$，并且比较接近 0，所以可以认为解可以展开为 e 的级数，即 $E(M)=E_0(M)+eE_1(M)+e^2E_2(M)+\cdots$

代入 K 方程并比较 e^k 的系数可得：

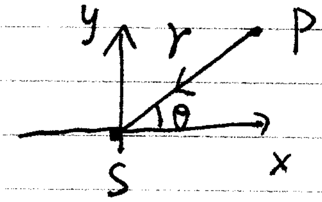
$E_0 = M$, $E_1 = \sin M$, $E_2 = \sin M \cos M$,

$E_3 = (\cos^2 M - \sin^2 M)\sin M$.

$E_4 = \sin M \cos^3 M - \frac{5}{3}\sin^3 M \cos M$, $\cdots$

Q: $E_k(M)$ 有通式吗? 见 §3.

2. Newton 定律



以太阳为原点建立直角坐标系,由牛2与引力定律可得

$$\ddot{x} = -\frac{k}{r^3}x, \quad \ddot{y} = -\frac{k}{r^3}y. \quad k = GM_s.$$

换成极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 则

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}.$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\sin\theta\dot{\theta} - r\sin\theta\ddot{\theta} - r\cos\theta\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}\cos\theta$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\cos\theta\dot{\theta} + r\cos\theta\ddot{\theta} - r\sin\theta\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}\sin\theta.$$

$$\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}. \qquad (*1)$$

$$\ddot{y}\cos\theta - \ddot{x}\sin\theta \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \Rightarrow (r^2\dot{\theta})^{\cdot} = 0. \qquad (*2)$$

$$(*1)\cdot\dot{r} + (*2)\,r\dot{\theta} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}\right)^{\cdot} = 0.$$

记 $L = r^2\dot{\theta}$, $E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}$, 分别是系统的角动量与能量. 特别地,

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\cdot\left(\frac{L}{r^2}\right)^2\right) - \frac{k}{r} = \overbrace{\frac{1}{2}\dot{r}^2}^{\text{动能}} + \underbrace{\frac{L^2}{2r^2}}_{\text{离心势}} - \underbrace{\frac{k}{r}}_{\text{引力势}}. \qquad (*3)$$

Plan:

由(*3)解 $r(t)$，再由 L 定义得 $\theta(t)$.

将(*3)改写为

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2E + \frac{2k}{r} - \frac{L^2}{r^2} \quad (*4)$$

右边应 ≥ 0. 对于给定的 E, L，这一条件决定了 r 的范围.

Case 1. 若 $E<0$，则由(*4)右边 $=0$ 可解得两个根 $0<r_1<r_2$，它们分别是近日点与远日点。因为轨道有界，所以叫束缚态.

Case 2. 若 $E>0$，则(*4)右边 $=0$ 只有一个正根 r_{min}，r 的取值范围是 $r>r_{min}$，此时轨道无界，可叫游离态.

我们只考虑束缚态。首先解得（设 $E'=-E>0$）

$$r_1 = \frac{k-\sqrt{k^2-2E'L^2}}{2E'}, \quad r_2 = \frac{k+\sqrt{k^2-2E'L^2}}{2E'}.$$

它们应该满足 $r_1 = a(1-e)$，$r_2 = a(1+e)$，由此可得

$$a = \frac{k}{2E'}, \quad e = \sqrt{1-\frac{2E'L^2}{k^2}}. \quad (k^2 \geq 2E'L^2).$$

由(*4)可得

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{-2E' + \frac{2k}{r} - \frac{L^2}{r^2}}} \Leftrightarrow L\,dt = \frac{dr}{\sqrt{-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)}}$$

设 $r = a(1-e\cos\xi)$，对上式右边换元得

$$\frac{L}{ab}dt = (1-e\cos\xi)d\xi \Rightarrow \frac{L}{ab}(t-t_0) = \xi - e\sin\xi$$

这就是 K 方程. 接下来考虑角度 θ.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -L^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right), \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = L$$

消去 ~~L~~ 得 与 dt

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = -\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right).$$ 设 $u=\frac{1}{r}$. 则有

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -(u-\frac{1}{r_1})(u-\frac{1}{r_2})$$ 于是 (注意 $u(0)=\frac{1}{r_1}$

$$\theta = \int_{\frac{1}{r_1}}^{\frac{1}{r}} \frac{du}{\sqrt{-(u-\frac{1}{r_1})(u-\frac{1}{r_2})}} = \cdots = \arcsin\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)} - \frac{\pi}{2}.$$

或写为 $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$. 所以是椭圆.

利用 $r=a(1-e\cos\xi)$ 可得 $\cos\theta = \frac{\cos\xi - e}{1-e\cos\xi}$,

于是 $x=a(\cos\xi-e)$. $y=b\sin\xi$. 利用半角公式亦可将 θ 与 ξ 的关系写为 $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\xi}{2}$.

最后一个问题是周期

$$T = 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{-L^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)}} = 2\int_0^{\pi}\frac{ab}{L}(1-e\cos\xi)d\xi$$

$$= \frac{2\pi}{L}ab. \quad \left(a=\frac{k}{2E'}.\ b=a\sqrt{1-e^2}=\frac{L}{\sqrt{2E'}}\right)$$

$$= \frac{\pi k}{E'\sqrt{2E'}} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2}=\frac{k}{4\pi^2}.$$ 这是 K(3).

§3 Lagrange 反演公式.

回到K方程 $M=E-e\sin E$. $E(M)=\sum_{k=0}^{\infty} e^k E_k(M)$.

$E_0=M$. $E_1=\sin M$. $E_2=\sin M\cos M,\cdots,$

Lagrange 发现: $E_k(M)=\frac{1}{k!}\left(\sin^k M\right)^{(k-1)}$, $k\geq 1$.

由此导出Lagrange反演公式.

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一光滑函数. 考虑隐函数方程

$F(x,y,z)=x+yf(z)-z=0$, $F_z=yf'(z)-1$.

只要 $|f'(z)|\leq M$. $|y|<\frac{1}{M}$, 则 $F_z\neq 0$, 于是存在隐函数

$z=z(x,y)$. 且 $z_x=\frac{1}{1-yf'(z)}$, $z_y=\frac{f(z)}{1-yf'(z)}$.

引理: 对任一光滑函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\partial_y^k\big(g(z(x,y))\big)=\partial_x^{k-1}\big(g'(z(x,y))f(z(x,y))^k z_x(x,y)\big). \quad (k\geq 1)$$

证明: $k=1$时

$\partial_y(g(z))=g'z_y=g'\cdot f\cdot z_x=\partial_x^0(g'\cdot f\cdot z_x)$ ✓.

设k时成立考虑$k+1$的情形

$$\begin{aligned}\partial_y^{k+1}(g(z))&=\partial_y\partial_x^{k-1}\big(\underbrace{g'(z)f(z)^k z_x}\big)\\&=\partial_x^{k-1}\Big(\partial_z\big(g'(z)f(z)^k\big)\cdot f z_x\cdot z_x+g'(z)f(z)^k(fz_x)_x\Big)\\&=\partial_x^{k}\big(g'(z)f(z)^{k+1}z_x\big)\end{aligned}$$

□

推论 $\partial_y^k\big(g(z(x,y))\big)\big|_{y=0}=\partial_x^{k-1}\big(g'(x)f(x)^k\big)$. $(k\geq 1)$

$$\Rightarrow g(z(x,y))\sim g(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\partial_x^{k-1}\big(g'(x)f(x)^k\big).$$

接下来 Lagrange 注意到

$E_1 = \sin M$. $E_2 = \frac{1}{2}\sin 2M$, $E_3 = \frac{1}{8}(-\sin M + 3\sin 3M)$,

$E_4 = \frac{1}{6}(-\sin 2M + 2\sin 4M)$, $E_5 = \frac{1}{384}(2(1) - 81(3) + 125(5))$, ...

所以应该有 $E = M + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(e)\sin(nM)$. $(*F)$

Q: $b_n(e)$ 是什么?

§4. Bessel 函数.

由 $(*F)$ 与 $M = E - e\sin E$, 有

$e\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(e)\sin(nM)$. Bessel 独立地发现了 Fourier 级数, 他断言

$$b_n(e) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e\sin E \cdot \sin(nM)\,dM$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-e\sin E\,\frac{\cos nM}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nM\,\underbrace{e\cos E\,E'(M)}\,dM\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nM\,(E'(M)-1)\,dM = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} E'(M)\cos nM\,dM.$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos n(E - e\sin E)\,dE$$

若定义 $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$, 则

$b_n(e) = \frac{2}{n}J_n(ne)$. $J_n(x)$ 满足如下 ODE:

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

它的解可由幂级数法解出:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$ 它们给出

$$b_1(e)=e-\frac{1}{8}e^3+\frac{1}{192}e^5-\cdots,\quad b_2(e)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{6}+\cdots,\ \cdots$$

与Lagrange的初步结果一致.

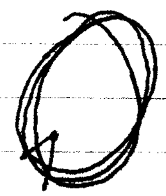
§5. 微扰问题

天体力学问题中,由于其它星体的影响,引力势并不是精确的 $U=-k/r$,而是可能带有一定的扰动:

$$U(r)=-\frac{k}{r}+\varepsilon U_1(r,\theta,t).$$ 相应的轨道则是Kepler轨道的微小形变

在本节中我们考虑最简单的情形 $U_1=U_1(r)$. 由守恒律,我们仍有 $r^2\dot\theta=L$, $\frac{1}{2}\dot r^2=E+\frac{k}{r}-\varepsilon U_1-\frac{L^2}{2r^2}$,于是有

$$d\theta=\frac{(L/r^2)\,dr}{\sqrt{2\left(E+\frac{k}{r}-\varepsilon U_1(r)\right)-\frac{L^2}{r^2}}}$$



当 $\varepsilon=0$ 时,应有

$$2\pi=2\int_{r_1}^{r_2}\frac{L/r^2\,dr}{\sqrt{2\left(E+\frac{k}{r}\right)-\frac{L^2}{r^2}}}.$$ 记

$$\Phi(\varepsilon)=2\int_{r_1(\varepsilon)}^{r_2(\varepsilon)}\frac{L/r^2\,dr}{\sqrt{2\left(E+\frac{k}{r}-\varepsilon U_1(r)\right)-\frac{L^2}{r^2}}}=2\pi+\varepsilon\Phi_1+\cdots$$

我们的目标是求出 Φ_1,或 $\left.\frac{d\Phi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.

将 Φ 的被积函数记为 $f(\varepsilon)$, Φ 是关于参数 ε 的含参积分,所以应有

$$\frac{1}{2}\frac{d\Phi}{d\varepsilon}=\frac{dr_2}{d\varepsilon}f(r_2)-\frac{dr_1}{d\varepsilon}f(r_1)+\int_{r_1(\varepsilon)}^{r_2(\varepsilon)}\frac{df}{d\varepsilon}\,dr.$$

但是注意到 r_1, r_2 实际上是 $f(r)$ 的分母的零点，所以上面的前两项都是无法计算的，第三项其实也是发散的。所以我们需用其它方法处理这个问题。

设 $g(r) = \sqrt{2(E+\frac{k}{r}+\varepsilon U_1(r))-\frac{L^2}{r^2}}$，则有

$$\frac{\partial}{\partial L}\left[\int_{r_1(\varepsilon)}^{r_2(\varepsilon)} g(r)\,dr\right] = \underbrace{\frac{\partial r_2}{\partial L}\,g(r_2)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial r_1}{\partial L}\,g(r_1)}_{=0} + \int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial g}{\partial L}\,dr.$$

$$= \int_{r_1}^{r_2}\frac{-\frac{L}{r^2}\,dr}{\sqrt{2(E+\frac{k}{r}+\varepsilon U_1(r))-\frac{L^2}{r^2}}} = -\int_{r_1}^{r_2} f(r)\,dr.$$

所以有

$$\Phi(\varepsilon) = -2\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_1}^{r_2} g(r)\,dr$$，于是有

$$\left.\frac{d\Phi_1}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -2\frac{\partial}{\partial L}\left[\left.\frac{dr_2}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g(r_2) - \left.\frac{dr_1}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g(r_1) + \int_{r_1}^{r_2}\left.\frac{dg(r)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} dr\right]$$

$$= +2\frac{\partial}{\partial L}\left[\int_{r_1}^{r_2}\frac{U_1(r)\,dr}{\sqrt{2(E+\frac{k}{r})-\frac{L^2}{r^2}}}\right]$$

利用 $r = P/(1+e\cos\theta)$，或 $\frac{dr}{\sqrt{2(E+\frac{k}{r})-\frac{L^2}{r^2}}} = \frac{r^2}{L}d\theta$

$$= +2\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\int_0^{\pi} r^2 U_1(r)\,d\theta\right).$$

这就是径向微扰下的进动角公式。

例如 $U_1=\frac{\alpha}{r^3}$，则 $\quad r=\frac{L^2/k}{1+e\cos\theta}$

$$\Phi_1=+2\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{L}\int_0^{\pi}\frac{\alpha}{r}\,d\theta\right)=+2\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\pi\alpha k}{L^3}\right)=\frac{6\pi\alpha k}{L^4}.$$

更一般地，记 $U_1^{(l)}=\frac{1}{r^l}$，则有

$$\Phi_1^{(2)}=-\frac{2\pi\alpha}{L^2}.\quad \Phi_1^{(3)}=-\frac{6\pi k\alpha}{L^4}.\quad \Phi_1^{(4)}=-\frac{(15k^2+6EL^2)}{L^6}\pi\alpha$$

$$\Phi_1^{(5)}=-\frac{\pi\alpha}{L^8}(35k^3+30EL^2),\quad \Phi_1^{(6)}=\cdots$$

一般的表达式较复杂。在实际应用中，因为 e 比较小，所以可以只考虑 $e\approx 0$ 的情况，注意 $e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{k^2}}$，所以即取 $E=-\frac{k^2}{2L^2}$，此时有通式：

$$\Phi_1^{(l)}=-l(l-1)\pi\frac{k^{l-2}}{L^{2l-2}}.$$ 此式有另一种推导方法。

原始的 Kepler 问题可视为径向的振动和角向的转动的复合。在圆轨道时，$r=r_0$，r_0 为 $U_{eff}'(r)=0$ 的解。

$$U_{eff}=-\frac{k}{r}+\frac{L^2}{2r^2}.\quad U_{eff}'=\frac{k}{r^2}-\frac{L^2}{r^3}\Rightarrow r_0=\frac{L^2}{k}.\quad E_0=U_{eff}(r_0).$$

当 $e\approx 0$ 时，径向为 r_0 附近的微振动。设 $E=E_0+\delta$.

$$\frac{1}{2}\dot r^2=E-U_{eff}(r)=(E_0+\delta)-\left(E_0+\frac{1}{2}U_{eff}''(r_0)(r-r_0)^2+O(r-r_0)^3\right)$$

扔掉 O 项，可得微振动的周期

$$T=2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{2(E-U_{eff}(r))}}=2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{2\delta-U_{eff}''(r_0)(r-r_0)^2}}$$

设 $U_{eff}''(r_0)=a$，则 $r_{1,2}=r_0\pm\sqrt{\frac{2\delta}{a}}$，于是

$$u=\frac{a}{\sqrt{2\delta}}(r-r_0)$$

$$T=2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{2\delta-a(r-r_0)^2}}=\frac{2}{\sqrt{a}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a}}=\frac{2\pi}{\sqrt{U_{eff}''(r_0)}}.$$

注意它与δ无关.

在时间T内转过的总角度为

$$\Phi=T\cdot\dot\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{U_{eff}''(r_0)}}\cdot\frac{L}{r_0^2}.$$ 在Kepler情形

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{-2\frac{k}{r_0^3}+3\frac{L^2}{r_0^4}}}\cdot\frac{L}{r_0^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{-2\frac{k^4}{L^6}+3\frac{k^4}{L^6}}}\cdot\frac{L}{\left(\frac{L^2}{k}\right)^2}=2\pi$$

或者说径向振动频率与角向频率两者相等.

若势能为 $U_{eff}(r)=-\frac{k}{r}+\frac{L^2}{2r^2}+\frac{\varepsilon}{r^\delta}=U_0(r)+\varepsilon U_1(r)$. 则圆轨道的半径变为 $r(\varepsilon)=r_0+\varepsilon r_1$. 其中 $r_1=-U_1'(r_0)/U_0''(r_0)$. 于是

$$\Phi=\frac{2\pi}{\sqrt{U_0''(r_0+\varepsilon r_1)+\varepsilon U_1''(r_0+\varepsilon r_1)}}\frac{L}{(r_0+\varepsilon r_1)^2}+O(\varepsilon)$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{U_0''(r_0)\left(1+\varepsilon\frac{U_0'''(r_0)r_1+U_1''(r_0)}{U_0''(r_0)}\right)}}\frac{L}{r_0^2}\frac{1}{\left(1+\frac{r_1}{r_0}\varepsilon\right)^2}+O(\varepsilon)$$

$$=2\pi\left(1+\frac{\varepsilon}{2U_0''}\left(U_0'''\left(+\frac{U_1'}{U_0''}\right)-U_1''\right)+\frac{2\varepsilon}{r_0}\left(+\frac{U_1'}{U_0''}\right)\right)+O(\varepsilon)$$

$$=2\pi+\varepsilon\left(\frac{U_0'''U_1'}{(U_0'')^2}-\frac{U_1''}{U_0''}+\frac{4U_1'}{r_0U_0''}\right)\pi+O(\varepsilon)$$

将u_0与u_1的具体形式代入可得

$$\Phi_1=-l(l-1)\frac{k^{l-2}}{L^{2l-2}}\pi_1$$ 与之前的结果一致.

最后.如果不关心具体的常数.只想知道数量级还可用量纲分析法.考虑 $E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{k}{r}+\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{\varepsilon}{r^l}$. 则有

$[L]=$千克米^{2}秒$^{-1}$. $[k]=$千克米^{3}秒$^{-2}$. $[\varepsilon]=$千克·米$^{l+2}$秒$^{-2}$.

Φ_1必然为如下形式:$\Phi_1=c\,L^a k^b m^c\varepsilon$ c为常数. 于是有

$a+b+c+1=0$. $2a+3b+(l+2)=0$. $-a-2b-2=0$ ($[\Phi_1]=1$).

$\Rightarrow a=2-2l$. $b=l-2$. $c=l-1$ 所以有

$$\Phi_1=C\cdot\frac{k^{l-2}m^{l-1}}{L^{2l-2}}.$$ 与上述分析一致.

§6 史瓦西黑洞.

广义相对论的基本思想可以用两句话概括:1.物质告诉时空如何弯曲. 2.时空告诉物质如何运动. 前者即Einstein的引力场方程,后者则是Rieman几何中的测地线方程. 我们本节中看一下后者是如何求解的.

先看一个简单的例子. $x^i=x^i(t)$ 是空间R^n中的一条曲线. 则它的长度可通过如下定积分计算: $L=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\dot{x}^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}dt$. 当没有任何约束条件时,可知直线最短. 即$x^i=x^i_0+a^i t$.

若限制曲线必须取在某曲面上. 设曲面的参数方程为$x^i(q)$. $q=(q^1,\cdots,q^n)$. 则曲线可由$q^i=q^i(t)$给出.此时

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial q^\beta}\right)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta\right)^{\frac{1}{2}}dt.$$

若记 $g_{\alpha\beta}(q)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial q^\beta}$，则有

$L=\int_{t_0}^{t_1}\left(g_{\alpha\beta}(q)\dot q^\alpha\dot q^\beta\right)^{\frac12}dt$ (※1) 所以曲线长度完全由函数 $g_{\alpha\beta}$ 决定.

注意曲线的参数有一个任意函数的自由度 $t\mapsto\tilde t(t)$，所以我们可假设参数取为弧长参数，即要求 $g_{\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta=1$. (※2)

于是测地线问题就变成在约束条件(※2)下求函数 $q^i(t)$ 使(※1)取极小值.

引理 条件变分问题(※1)(※2)的解由如下ODE给出

$$\frac{d}{dt}\left(g_{\alpha\beta}\dot q^\beta\right)=\frac12\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\dot q^\beta\dot q^\gamma \quad (※3)\ (\text{Ref: Zorich?})$$

定义 $P_\alpha=g_{\alpha\beta}\dot q^\beta$　$g^{\alpha\beta}=(g_{\alpha\beta})^{-1}$. $H=\frac12 g^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta$.

则(※3)可改写为 $\dot P_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$. $\dot q^\alpha=\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}$ 这称为Hamilton正则方程.

定理：设函数 $f(q^1,\cdots,q^n,A_1,\cdots,A_n)$ 满足 $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha\partial A_\beta}\right)\neq0$. 定义变换 $(P,q)\mapsto(A,B)$ 满足

$$P_\alpha=\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}.\ B^\alpha=\frac{\partial f}{\partial A_\alpha}$$

记 $\hat H(A,B)=H(P(A,B),q(A,B))$，则Hamilton正则方程

$\dot P_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$. $\dot q^\alpha=\frac{\partial H}{\partial P_\alpha}$ 等价于 $\dot A_\alpha=-\frac{\partial\hat H}{\partial B^\alpha}$. $\dot B^\alpha=\frac{\partial\hat H}{\partial A_\alpha}$.

证明：只证 $n=1$ 的情形，一般情形留作练习. 省去指标：

$p=f_q$, $B=f_A\Rightarrow dp=f_{qq}dq+f_{qA}dA$. $dB=f_{qA}dq+f_{AA}dA$.

$$\Rightarrow A_p=q_B=\frac{1}{f_{qA}}.\quad A_q=-p_B=-\frac{f_{qq}}{f_{qA}}.$$

$$B_p=-q_A=\frac{f_{AA}}{f_{qA}}.\quad B_q=p_A=f_{qA}-\frac{f_{qq}f_{AA}}{f_{qA}}.$$

于是有

$$\dot{A} = A_q \dot{q} + A_p \dot{p} = -p_B H_p - q_B H_q = -\tilde{H}_B.$$

$$\dot{B} = B_q \dot{q} + B_p \dot{p} = p_A H_p + (-q_A)(-H_q) = \tilde{H}_A. \qquad \square.$$

特别地，如果能找到函数 $f(q,A)$，使

$\tilde{H} = H(\frac{\partial f}{\partial q}, q) = C_0$ 则 $\dot{A}_\alpha = 0$，$\dot{B}^\alpha = 0$. 把方程完全解出.

定义：① 方程 $H(\frac{\partial f}{\partial q}, q) = C_0$ 称为 Hamilton-Jacobi 方程

② 若有 $f(q^1, \cdots, q^n, A_1, \cdots, A_n)$ 满足 HJ 方程，$A_1 \cdots A_n$ 为任意常数，

且 $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^\alpha \partial A_\beta}\right) \neq 0$，则称 f 为HJ方程的一个全积分.

对于测地线问题，HJ方程为 $\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(q) \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \frac{\partial f}{\partial q^\beta} = 0$，

当年Jacobi 就是研究椭球上的测地线时提出的HJ方法.

在广义相对论中，引力场方程的解给出时空度规 $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dq^\alpha dq^\beta$，

（$g_{\alpha\beta}$ 符号差为2），然后 $g_{\alpha\beta}$ 的测地线给出粒子轨迹. 测地线的参数 τ 叫固有时. 它满足 $g_{\alpha\beta}\left(\frac{dq^\alpha}{d\tau}\right)\left(\frac{dq^\beta}{d\tau}\right) = \begin{cases} C^2, & \text{静质量非零的粒子} \\ 0, & \text{------为------} \end{cases}$

右边的常数就是HJ右边的 C_0.

例 史瓦西黑洞的度规为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (r_0 \text{待定})$$

$$p_t = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)c^2 \dot{t}, \quad p_r = \frac{\dot{r}}{1 - \frac{r_0}{r}}, \quad p_\theta = -r^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = -r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{p_t^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)c^2} - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)p_r^2 - \frac{1}{r^2}p_\theta^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right]. \qquad m_0 \neq 0 \text{的粒子}$$

$$\text{HJ:} \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)c^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 = C^2$$

这种方程通常通过分离变量法求解，设

$f(t,r,\theta,\varphi)=\mathcal{E}t-L\varphi+R(r)+\Theta(\theta)$，代入HJ得

$$\frac{\mathcal{E}^2}{(1-\frac{r_0}{r})c^2}-(1-\frac{r_0}{r})R'^2-\frac{1}{r^2}\Theta'^2-\frac{L^2}{r^2\sin^2\theta}=c^2$$

$$\Rightarrow r^2\left[\frac{\mathcal{E}^2}{(1-\frac{r_0}{r})c^2}-(1-\frac{r_0}{r})R'^2-c^2\right]=\Theta'^2+\frac{L^2}{\sin^2\theta}=A.$$

接下来代入 $P_\alpha=\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}$，即 $P_t=\mathcal{E}$．$P_r=R'$．$P_\theta=\Theta'$．$P_\varphi=-L$．

得 $(1-\frac{r_0}{r})c^2\dot{t}=\mathcal{E}$．$r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}=L$　$r^4\dot{\theta}^2+\frac{L^2}{\sin^2\theta}=A$.

$$\dot{r}^2=\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}-(1-\frac{r_0}{r})(c^2+\frac{A}{r^2}).$$ 由对称性可取 $\theta\equiv\frac{\pi}{2}$．考虑 $r(\varphi)$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}-(1-\frac{r_0}{r})(c^2+\frac{L^2}{r^2})\right)\Big/\left(\frac{L}{r^2}\right)^2$$ 于是有

$$\varphi=\int\frac{\frac{L}{r^2}\,dr}{\sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}-(1-\frac{r_0}{r})(c^2+\frac{L^2}{r^2})}}$$

最后取 $E=\frac{\mathcal{E}^2-c^4}{2c^2}$．

$r_0=\frac{2GM}{c^2}$．$GM=k$.

$$=\int\frac{L/r^2\,dr}{\sqrt{\underbrace{2E+\frac{2k}{r}-\frac{L^2}{r^2}}_{\text{经典Kepler}}+\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{2kL^2}{r^3}}_{\text{GR修正}}}}$$

利用前面的微扰技术可求出考虑GR效应下的椭圆轨道进动角.

§7 氢原子量子态.

在量子力学中，粒子的运动状态由一个 $\psi\in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ 描述．ψ 随时间的演化由Schrödinger方程给出：

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi.$$ 其中 H是V上的一个 Hermite算子．来自经典力学中的 Hamilton量.

在氢原子问题中，H与t无关，问题转化为求H的特征值和特征向量，即$H\psi=E\psi$，此处的H具体为

$$H=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2-\frac{ge^2}{r},$$

$\hbar$为普朗克常数，$\mu=\frac{m_e m_p}{m_e+m_p}$，$e$为电量，$g$为库仑常数。

记 $\frac{\mu E}{\hbar^2}=a$，$\frac{\mu g e^2}{\hbar^2}=b$，则要解方程 $\left(\frac{1}{2}\nabla^2+\frac{b}{r}+\lambda\right)\psi=0$。

（未完待续）