Date:
Place:

Reminders

时间：1-6. 3-3

地点：六教 6A411

一. 一般参考

1. Knapp. 2. Varadarajan (GTM102). 3. Serre (LNM1500). 4. Bourbaki. 1-3 4-6 7-8

二. Lie的结构定理.

1. Warner (GTM94. 无第三章, 第三可见Knapp或Va)
2. Serre (证明与常见的不同, 适用于一般域).

三. Lie代数

1. Humphreys (GTM9). 2. Jacobson (注重一般域).

四 紧Lie群.

1. Bröcker & Dieck (GTM98)
2. Sepanski (GTM235).

五 补遗

1. Hall (GTM222, 矩阵群)
2. Onishchik & Vinberg 《Lie groups and algebraic groups》.
3. Folland 《A course in Abstract Harmonic Analysis》.

Date:
Place:

Reminders

# 李群与李代数.

by 刘思齐

参考书:

一. 一般参考:

1. Knapp, 《Lie groups: beyond an introduction》
2. Varadarajan 《Lie groups. Lie algebras and their representation》, GTM 102.

二. 李理论 (李群 vs. 李代数)

3. Warner, 《Fundations of differential manifold and Lie groups》 GTM 94

三. 李代数

4. Humphreys, GTM 9.
5. Jacobson, 《Lie algebra》.
6. Serre, 《Lie algebra and Lie groups》 《Complex semisimple Lie algebra》.
7. Bourbaki 《Lie groups and Lie algebras》 1-3, 4-6, 7-8.

四 紧李群

8. 《Representation of Compact Lie Groups》 GTM98

Date:

Place:

Reminders

1873年 →

1920s →

Date:

Place:

Reminders

## §0 概论.

李群与李代数是 Sophus Lie 在研究微分方程解的对称性时引入的. 其动机应该是受了代数方程的Galois理论的影响. 微分方程的对称性是连续的, 这种对称与代数方程的离散对称很不一样. 特别是线性化结构—李代数—的出现, 将李理论变为一门独特的学科.

要注意在Lie的年代, 还没有流形的严格定义(这一定义是Weyl首次引入的). 在Lie的定义中, 所谓连续变换群都是由某个微分方程"定义"的. 用现代观点来说, 微分方程的解构成个流形. Lie研究的就是这个流形的微分同胚群.

例1: $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$. 这个线性方程的解构成 $\mathbb{C}^n$. 其上的非退化线性变换给出了解的变换群一个.

例2: $y''+3y'y+y^3=0$.

其通解为 $y(x)=\dfrac{a_1+2a_2x}{a_0+a_1x+a_2x^2}$.

Date:
Place:
Reminders

其中 $(a_0,a_1,a_2)\neq(0,0,0)$。若 $(a_0',a_1',a_2')=\lambda(a_0,a_1,a_2)$，则 $(a_0',a_1',a_2')$ 与 $(a_0,a_1,a_2)$ 给出了同样的解，所以所有解构成一个 $\mathbb{C}^3-\{0\}/\sim\ \cong \mathbb{CP}^2$。这个方程的变换群就比较复杂了。

在Lie的观点中，$y', y'', \cdots$ 是被视为独立的变量，于是微分方程可转化为代数方程。接下来，基于~~微~~分析力学中的一般观点，微方程的连续变换可通过保持相应的代数方程的无穷小变换加以研究。我们从这里可以理解Lie是如何想出Lie群与Lie代数的思想的。

除了引入Lie群与Lie代数的概念以外，Lie还证明了三条结构定理，揭示了Lie群与Lie代数之间的联系。为了理解这些定理，我们首先介绍它们的现代定义。

定义1：一个Lie群 $G$ 是一个光滑流形带有一个群结构，满足

$\cdot : G\times G\to G,\ (x,y)\mapsto x\cdot y$

$(\ )^{-1} : G\to G,\ x\mapsto x^{-1}$

都是光滑映射。

定义2：一个Lie代数 $\mathfrak{g}$ 是一个 $k$-线性空间，配以一个

$k$：域，$\mathrm{char}\, k\neq 2$。

Date:
Place:
Reminders

Lie群与它们之间的同~~态~~态构成一个范畴 LG. →

Lie代数与它们之间的同态构成一个范畴 LA.

Lie的第一结构定理：存在一个函子 $L: LG \to LA$. →

推论：若 $G_1 \cong G_2$，则 $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$.

Lie的第二结构定理：设 SCLG 是单连通李群构成的 LG 的子范畴，则 $L: SCLG \to LA$ 是完全忠实的 (fully faithful)

推论：若 $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$，则 $G_1 \cong G_2$ (前提：$G_1, G_2$ 本身单连通).

Lie的第三结构定理：$L: SCLG \to LA$ 是本质满的 (essential surjective).

推论：SCLG 与 LA 是等价的范畴.

Date:
Place:
Reminders

双线性映射：$[\,,\,]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，满足

i) $[v,w]+[w,v]=0$, $\forall v,w\in\mathfrak{g}$.

ii) $[[u,v],w]+[[v,w],u]+[[w,u],v]=0$, $\forall u,v,w\in\mathfrak{g}$.

对于Lie群、Lie代数都可定义同态、单射、满射、同构等概念.

Lie的第一结构定理：对每个Lie群 $G$ 可定义一个Lie代数 $\mathfrak{g}$，满足 i) 若有同态 $G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$，则有同态 $\mathfrak{g}_1 \xrightarrow{d\varphi} \mathfrak{g}_2$.

ii) 若有 $G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2$，$G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3$，$G_1 \xrightarrow{\varphi_3} G_3$ 满足 $\varphi_3=\varphi_2\circ\varphi_1$，则有 $d\varphi_3=(d\varphi_2)\circ(d\varphi_1)$.

Lie的第二结构定理：设 $G_1, G_2$ 是两个单连通Lie群，其Lie代数为 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$，则对任意同态 $\varphi: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$，存在同态 (唯一的) $\Phi: G_1 \to G_2$ 使得 $d\Phi=\varphi$.

Lie的第三结构定理：对任意 $\mathbb{R}$ 上的Lie代数 $\mathfrak{g}$，存在一个单连通Lie群 $G$ 以 $\mathfrak{g}$ 为其Lie代数.

(注意，Lie的原始版本都是局部的Lie群，而不是整体的单连通Lie群，这里是现代版本，其证明是由Cartan给出的(1930)).

利用Levi分解可证明Ado定理：每个（R或C上的）Lie代数都是矩阵Lie代数。（特征p版本为Iwasawa定理，见Jacobson）。对Lie群，此结论不对，存在Lie群不是矩阵群。

先考虑复的情况是因为C代数封闭，因此会有比较整齐的结果

Date:
Place:
Reminders

根据Lie的结构定理，对Lie群的分类可归结为Lie群的覆叠关系和Lie代数的分类。Lie代数是纯代数对象，其研究相对来说较容易。而Lie群的覆叠关系则更简单，特别是具有比较好性质（如半单、紧致等）的Lie群。

Lie代数的分类是Lie理论中最美妙的部分。首先，类似群论与环结构，Lie代数也有根(radical)，幂零根(nilpotent radical)，幂零Lie代数，可解Lie代数，半单Lie代数等概念。这里最好结果是Levi分解定理。

Levi分解定理：设$\mathfrak{g}$是R或C上的Lie代数，则存在一个半单子代数$\mathfrak{s}$（叫做Levi子代数）满足$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$，$\mathfrak{r}$是$\mathfrak{g}$的根。

（目前数学上没什么意义）

幂零、可解对象及半直积的分类是不可完成的任务。所以接下来的问题是，是否能给出半单李代数的分类？这个问题的答案是Lie理论中最重要的结果。

定理（Weyl, Killing, Cartan等等）

有了分类定理，下一个问题是复半单Lie代数的表示。~~其利用最高权方法~~ 首先，设 $\mathfrak{g}$ 是一个复半单Lie代数，那么 $\mathfrak{g}$ 的所有表示可分解为不可约表示的直和。其次，$\mathfrak{g}$ 的每个有限维不可约表示都和某种组合对象（支配整权）一一对应。这样就得到了所有 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示的分类。

~~定义（Lie群的表示）设 $G$ 是Lie群，$V$ 是一个线性空间，若有 $G\times V\to V$，$(g,v)\mapsto g(v)$，满足 i) $ev=v$，ii) $g_1(g_2v)=(g_1g_2)v$，则称~~

定义（Lie群的表示）设 $G$ 是一个Lie群。$G$ 的一个表示是指一个线性空间 $V$，配上一个Lie群同态 $\pi: G\to GL(V)$，即对 $\forall g\in G$，$\pi(g)$ 是 $V$ 上的可逆线性变换，且 $\pi(e)=id_V$，$\pi(g_1)\pi(g_2)=\pi(g_1g_2)$。

定义（Lie代数的表示）设 $\mathfrak{g}$ 是一个Lie代数。$\mathfrak{g}$ 的一个表示是指一个线性空间 $V$，配一个Lie代数同态 $\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$，即对 $\forall X\in\mathfrak{g}$，$\pi(X)$ 是 $V$ 上的线性变换且有
$[\pi(X_1),\pi(X_2)]=\pi([X_1,X_2])$.



i) 任何复半单Lie代数可分解为复单Lie代数的直和。

ii) 复单Lie代数按同构关系可分为以下九类。

经典型：$A_n(n\ge1)$、$B_n(n\ge2)$、$C_n(n\ge3)$、$D_n(n\ge4)$。

例外型：$E_6$、$E_7$、$E_8$、$F_4$、$G_2$。

有了复半单Lie代数的分类之后，通过考虑它的实形式，即可得到实半单Lie代数的分类。进一步地，可得到实半单Lie群的分类。

~~从上过程本质上是代数的，与之平行的还有一套分析的办法，这就是Weyl的紧群理论。首先，实半单Lie群G如果有有限的中心，那么G存在一个极大紧子群K，K的结构很清楚。紧Lie群总能分解为中心部分和半单部分的直积，于是紧Lie群的很多问题可归结为半单紧的情况。半单的紧Lie群也存在一些分类~~

从上过程本质上是代数，与之平行的还有一套分析的方法，这就是Weyl的紧Lie群理论。紧Lie群上存在一个在群乘法下不变的体积形式，利用这个形式，Weyl发明了一种平均化技术，可以将紧Lie群也分为若干类，并且可以用泛函分

紧Lie群的表示一定可以配一个Hermit度量成为一个酉表示，即$(V, \langle , \rangle)$是一个Hilbert空间，$\pi(g)$是其上保内积的算子（酉算子），这叫Weyl酉化技术。利用酉化技术可以证明，紧Lie群的表示一定可以分解为不可约表示的直和，且每个不可约表示都是有限维的。这些不可约表示一样可以用最高权来描述。一般G的不可约表示的同构类构成的集合记为$\hat{G}$。

BCH = Baker - Campbell - Hausdorff.
PBW = Poincare - Birkhoff - Witt.
BWB = Borel - Weil - Bott



析甚至偏微分方程的方法给出紧Lie群表示的分类，这里最基本的一个定理是Peter-Weyl定理。

定理：设G是紧Lie群，则

$$L^2(G) \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} E_\pi^* \otimes E_\pi.$$

换句话说，G的所有不可约表示都包含在$L^2(G)$这个空间中。若进一步考虑$G \times G$在$L^2(G)$上的谐解，可得到上述直和分解。特别地，若取$G = S^1$，则上式即为Fourier级数的$L^2$收敛性定理。

如果顺利的话，本学期大概可讲完Lie代数部分，紧Lie群部分只能留给大家自己看了。

Lie理论中除了上述内容以外还包括非紧Lie群的表示、代数群理论、量子群、Kac-Moody代数、几何表示论等很多内容，以后如果有机会的话我们再进一步学习。

其它重要定理：BCH公式（Serre），PBW定理（Knapp），Harish-Chandra同构，Chevalley定理，Weyl特征公式，Haar测度的存在唯一性，BWB定理，...

存在 $d\in\mathbb{Z}, d\geq 0$,

定义1. 一个拓扑空间 $X$ 叫做局部欧氏的, 如果对 $\forall p\in X$, 存在 $p$ 的邻域 $U$, 及映射 $\varphi: U\to V$, 满足:

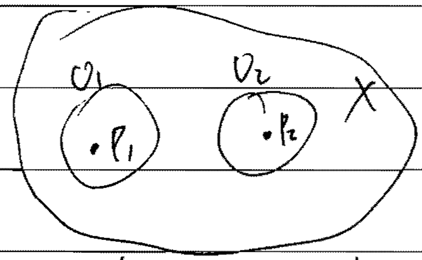
i) $\varphi$ 是同胚. ii) $V$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的连通开集.

等价说法: 每个点 $p$ 附近存在由连通开集组成的拓扑基. →

注: 局部欧氏未必局部道路连通.

局部可缩 ⇒ 局部单连通 ⇒ 半局部单连通. 这是存在泛覆叠空间的条件. →

Hausdorff:




→

第二可数: $X$ 有可数的拓扑基, 即存在 $X$ 的开集 $U_1, U_2, \cdots$, 满足对任意 $X$ 的开集 $V$, 存在 $\{1,2,\cdots\}$ 的子集 $I$, 使得 $V=\bigcup_{i\in I} U_i$.



# Ch 1. Lie群.

## §1.1. 拓扑流形

~~定义1. 一个局部欧氏空间是指一个拓扑空间 $X$, 满足存在一个非负整数 $d$, 使得对 $\forall p\in X$, 存在 $p$ 的一个邻域 $U$, 以及映射 $\varphi: U\to V\subseteq\mathbb{R}^d$ 满足 i) $\varphi$ 是同胚, ii) $V$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的连通开集.~~

局部欧氏空间具有如下性质:

① 局部紧: 每点都有紧的邻域.

② 局部连通: 对每个点 $p\in X$ 和它的邻域 $V\subseteq X$, 存在连通开集 $U$ 满足 $x\in U\subseteq V$.

③ 第一可数: 每个点附近有可数拓扑基. 即对 $\forall p\in X$, 存在 $U_1, U_2, \cdots$, 使得对 $p$ 的任意邻域 $V$, 存在 $U_i\subseteq V$.

④ 局部可缩: 每个点附近存在由可缩开集构成的拓扑基.

⑤ 局部可度量化: 每个点有一个可度量化的邻域.

定义2. 一个拓扑空间 $X$ 叫做拓扑流形, 如果它满足

i) $X$ 是局部欧氏的. ii) $X$ 是Hausdorff的. iii) $X$ 是第二可数的.

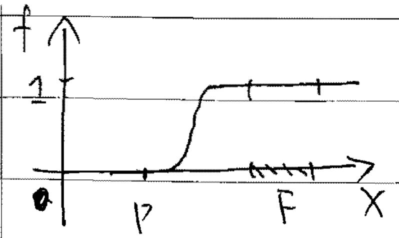
性质:

(或完全正规)

① 局部紧 + Hausdorff ⇒ $X$ 是 Tychonoff 的, 即

Date:
Place:

Reminders




仿紧+Hausdorff 推不出第二可数，除非X有可数多个连通分支。特别地，连通仿紧Hausdorff ⇒ 第二可数。

作业 ①：构造一个局部欧空间，满足$T_2$，不满足$C_2$。

②构造一个局部欧空间，满足$C_2$，不满足$T_2$。

Date:
Place:

Reminders

对任意$p\in X$，$F\subseteq X$，F闭，存在连续函数$f:X\to\mathbb{R}$，满足$f(p)=0$，$f|_F=1$。

② Hausdorff + 第二可数 ⇒ X是σ-紧的，即X可写为可数多个紧子空间的并。

③ 第二可数 ⇒ X可分（有可数稠密子集），X是Lindelöf的，即每个开覆盖有可数子覆盖。

④ Hausdorff + 第二可数 ⇒ X是仿紧的，即每个开覆盖有局部有限的开加细，即对X的任一开覆盖 $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$，$U_\alpha$开，存在另一个开覆盖 $X=\bigcup_{\beta\in B}V_\beta$ 以及映射 $i:B\to A$，满足对$\forall\beta\in B$，$V_\beta\subseteq U_{i(\beta)}$，且对任意$p\in X$，存在p的邻域W，满足$\{\beta\in B \mid V_\beta\cap W\neq\emptyset\}$是有限集。

⑤ Hausdorff + 仿紧 ⇒ 任一开覆盖存在单位分解。

• 单位分解：X的一个单位分解是指一组连续函数 $\varphi_i:X\to[0,1]$，$i\in I$，满足 i) $\{supp(\varphi_i) \mid i\in I\}$是局部有限的（类似仿紧性）。

ii) $\sum_{i\in I}\varphi_i(p)=1$，$\forall p\in X$。

• 开覆盖的单位分解：设 $X=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$ 是一个开覆盖，从属于它的一个单位分解是指$\{\varphi_i \mid i\in I\}$，满足对$\forall i\in I$，存在$\alpha\in A$使得$supp(\varphi_i)\subseteq U_\alpha$。

• 可以取$\varphi_i$使得每个$supp\,\varphi_i$是紧的。如果不需要紧，则又可使$I=A$，且$supp\,\varphi_i\subseteq U_i$，且$\varphi_i$中至多可数个不恒为零。

$D^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$ →

$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}=\partial D^2$.

区域不变性：设$U$是$\mathbb{R}^d$中开集，$f:U\to\mathbb{R}^d$ →
单且连续，则$V=f(U)$开，且$f$是$U$到$V$的同胚.



⑥ Hausdorff + 第二可数 + Tychonoff ⇒ $X$可度量化.

⑦ Hausdorff + 第二可数 ⇒ $X$只有~~有限~~可数个连通分支.

⑧ 可度量化 ⇒ $X$局部道路连通，即每点附近存在由道路连通的开集构成的拓扑基.

~~⑨ 可度量化 ⇒ $X$半局部单连通，即对$p\in X$，存在$p$的邻域$U$使得任意$U$中的圈可收缩到$p$，但这收缩过程可以跑出$U$，所以$U$不必单连通，这是加"半"字的原因~~

⑨ ~~若$X$连通~~ 局部道路连通 + 半局部单连通

⇒ 若$X$连通，则存在泛覆叠空间$\tilde{X}$，即存在$\tilde{X}$及映射$\pi:\tilde{X}\to X$满足

i) 对任意$p\in X$，存在$p$的开邻域$U$满足$\pi^{-1}(U)$是$\tilde{X}$中开集的不交并，且它们中的每一个都通过$\pi$同胚于$U$.

ii) $\tilde{X}$是单连通的，即$\tilde{X}$道路连通，且对任意连续映射$f:S^1\to\tilde{X}$，存在连续映射$F:D^2\to\tilde{X}$，满足$F|_{S^1}=f$.

⑩ 根据区域不变性，若$X$是$n$维流形，则它不可能同时也是$m$维流形($m\neq n$)。特别地，若$X_1$与$X_2$同胚，则它们的维数必然相等.

Date:
Place:
Reminders

$\mathcal{F}=$

设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是一个 $C^k$ 图册. 若图 $(V,\psi)$ 满足对任一 $\alpha\in A$, $(V,\psi)$ 到 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的转移函数都是 $C^k$ 的. → 则称 $(V,\psi)$ 与 $\mathcal{F}$ 相容; 若所有与 $\mathcal{F}$ 相容的图都是它的元素, 则称 $\mathcal{F}$ 是极大的.

Date:
Place:
Reminders

## §1.2 可微流形.

设 $X$ 是一个拓扑流形, 于是对任意 $p\in X$, 存在 $p$ 的邻域 $U$ 及映射 $\varphi: U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ 满足 i) $\varphi$ 是同胚, ii) $V$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中开.
$V$ 中的点总可用 $\mathbb{R}^d$ 中的坐标给出, 记为 $x=(x^1,\cdots,x^d)$, $x\in V$.
于是 $U$ 中的点也可用坐标给出. 因为 $U$, $V$ 同胚.

定义1: 上述 $U$ 叫 $p$ 附近的一个欧氏邻域 $\varphi: U\to V\subseteq\mathbb{R}^d$ 叫 $U$ 上的一个图; $(U,\varphi)$ 叫 $p$ 附近的图; 若一组图 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 满足 $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$, 则称为 $X$ 的一个图册; ~~设 $(U,\varphi)$, $(V,\psi)$ 是两个图, 且 $U\cap V\neq$~~ 设 $(U_1,\varphi_1)$ 和 $(U_2,\varphi_2)$ 是两个图, 且 $U_1\cap U_2\neq\phi$, 则存在连续映射 $\varphi_{12}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1\cap U_2)\to\varphi_2(U_1\cap U_2)$.
注意它们是 $\mathbb{R}^d$ 中开集到 $\mathbb{R}^d$ 中开集的映射. 这个映射叫做从 $(U_1,\varphi_1)$ 到 $(U_2,\varphi_2)$ 的转移函数; 一个图册 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 叫做 $C^k$ 的 $(k=1,2,\cdots,\infty,\omega)$ 如果所有转移函数 $\varphi_{\alpha\beta}$ 是 $C^k$ 的; ~~一个图册 $C^k$ 叫做极大的, 如果任意图 $(V,\psi)$ 满足它到任一 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的转移函数都是 $C^k$ 的可知 $(V,\psi)\in\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.~~

Date:
Place:

Reminders

常见的情况：$C^\infty$ 叫光滑，$C^\omega$ 叫解析。 →

$C^\omega$ 流形上没有 $C^\omega$ 的单位分解，只能有 $C^\infty$ 的。 →

作业1：证明 $C^\infty$ 流形上有 $C^\infty$ 单位分解

等价说法：对 $\forall x\in X$，$y=f(x)$，存在 x附近的 图 $(U,\varphi)$ 和 y附近的图 $(V,\psi)$，使得 →
$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 是 $\mathbb{R}^{d_1}$ 的开集到 $\mathbb{R}^{d_2}$ 的开集的 $C^k$ 映射，即每个 $\mathbb{R}^{d_2}$ 中的 分量都是 $C^k$ 函数。

Date:
Place: 下二

Reminders

注：若 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是一个 $C^k$ 图册，则我们可将所有与它相容的图添加进去，从而得到一个极大 $C^k$ 图册。

定义2. 设 X 是拓扑流形，X 上的一个极大 $C^k$ 图册 $\mathcal{F}$，叫做 X 的一个 $C^k$ 微分结构。X 配上一个 $C^k$ 微分结构以后，叫做一个 $C^k$ 微分流形。

注：拓扑流形上可以没有微分结构（4维中有这样的例子），也可以有不止一个微分结构（7维怪球，$\mathbb{R}^4$ 等）。

定理4 设 X 是 $C^k$ 流形，$k=1,2,\dots,\infty$，则对 X 的任一开覆盖，存在 $C^k$ 的单位分解。

定义3. 设 X 是 $C^k$ 流形，$f:X\to\mathbb{R}$ 叫做 X 上的 $C^k$ 函数，如果对任一图 $(U,\varphi)$，$f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 $C^k$ 函数；设 X, Y 是 $C^k$ 流形，$f:X\to Y$ 叫做从 X 到 Y 的 $C^k$ 映射，如果对任意 Y 上的 $C^k$ 函数 $g:Y\to\mathbb{R}$，$g\circ f:X\to\mathbb{R}$ 是 X 上的 $C^k$ 函数；X 上 $C^k$ 函数的全体构成个 $\mathbb{R}$-代数，记为 $C^k(X)$，X 到 Y 的 $C^k$ 映射全体构成个集合，记为 $C^k(X,Y)$。若 Y 上有某种运算，则 $C^k(X,Y)$ 上也有相应的运算。

证明：i) 考虑 $A\to\mathbb{R}$, $f\mapsto f(x)$ 的核.

ii) 设 $m$ 为 $A$ 的极大理想. 假设对 $\forall x\in M$, $\exists f\in m$ 使得 $f(x)\neq 0$. 不妨设 $f(x)>0$. 于是存在 $x$ 的邻域 $U$ 使得 $f|_U>0$. 对每个 $x$ 取相应的 $f_x$ 与 $U_x$. 对开覆盖 $\{U_x\}_{x\in M}$ 取单位分解 $\{\rho_i\}_{i\in I}$. 再取 $f=\sum_{i\in I}\rho_i\cdot f_{x_i}$, 则 $f>0$, $f\in m$. 于是 $f^{-1}\in A$, $1\in m$. 矛盾 □.

等价描述：在 $A$ 上定义等价关系. 设 $f,g\in A$, 若存在 $x$ 附近的开集 $U$ 使得 $f|_U=g|_U$, 则称 $f,g$ 在 $x$ 附近等价. $f$ 所在的等价类叫 $f$ 的芽. 所有这样的芽构成的 $\mathbb{R}$-代数同构于 $A_x$.

证明：构造映射 $\varphi: A/\sim\ \to A_x$, $[f]\mapsto[f/1]$

① $\varphi$ 不依赖于 $f$ 的选取.
② $\varphi$ 是单射.
③ $\varphi$ 是满射.
④ $\varphi$ 是环同态.
④ $\varphi$ 是 $\mathbb{R}$-线性的.

作业3：证明 $A_x$ 的两种描述等价

故 $\leq r$ 阶的微分算子构成一个线性空间, 记为 $T_x^{(r)}(M)$. 特别地, $x$ 处的向量场构成的线性空间记为 $T_x(M)$. ($T_x(M)\cong(m_x/m_x^2)^*$.)

除非特别声明, 为方便起见, 我们总假设流形是 $C^\infty$ 的.

定理5 设 $M$ 是流形, 记 $A=C^\infty(M)$, 若无混淆, 则简记为 $A$.

i) 对 $\forall x\in M$, $m_x=\{f\in A \mid f(x)=0\}$ 是 $A$ 的极大理想.

ii) $A$ 的所有极大理想都是某个 $m_x$.

定义6: (a) 记 $A_x$ 为 $A$ 在 $m_x$ ($x\in M$) 处的局部化. $A_x$ 叫做 $x$ 处的函数芽代数. 因为 $1\in A-m_x$, 所以存在从 $A$ 到 $A_x$ 的同态. $f\in A$ 在这个同态下的像叫做 $f$ 在 $x$ 附近的芽.

(b) 根据定义, $A_x$ 有唯一极大理想 $m_x$, 且有 $A_x\supseteq m_x\supseteq m_x^2\supseteq\cdots$

记 $A_x^*$ 为 $A_x$ 的对偶空间, 即 $A_x$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射全体.

i) $v\in A_x^*$ 叫做 $x$ 处的切向量, 如果它是一个导子, 即对 $\forall f,g\in A_x$, 有 $v(f\cdot g)=v(f)\cdot g+f\cdot v(g)$.

ii) $D\in A_x^*$ 叫做一个 $\leq r$ 阶微分算子, 如果对 $\forall f\in m_x^{r+1}$, 有 $D(f)=0$. 换句话说, $D\in(A_x/m_x^{r+1})^*$.

例: ① $\leq 0$ 阶微分算子只能是 $(A_x/m_x)^*\cong\mathbb{R}$, 即常数倍.

② $\leq 1$ 阶微分算子 $D=\lambda 1_x+v$, 其中 $\lambda\in\mathbb{R}$. $1_x(f)=f(x)$, $v$ 是一个切向量.

Date:
Place:

Reminders

~~留为作业~~. 作业3：证明定理7. →

Date:
Place:

Reminders

③ 设 $M$ 为 $d$ 维. $(x_1, \dots, x_d)$ 是 $x$ 附近的坐标系.
$(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ 是 $d$ 个非负整数 则 $D = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$
是 $A_x$ 上的 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ 阶微分算子.
我们把它记为 $\partial_x^{(\alpha)}$. 特别地, 若 $\alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0$. 则 $\partial_x^{(\alpha)} = 1_x$.

定理7: 设 $r$ 为非负整数, 则 $\{\partial_x^{(\alpha)} \mid |\alpha| \le r\}$ 构成 $T_x^{(r)}(M)$ 的一组基. 特别地. $\{\partial_1, \dots, \partial_d\}$ 构成 $T_x(M)$ 的基.

证明: GTM 102, Lemma 1.1.1. □.

定义8: 在 $M$ 的每一点 $x$ 的切空间 $T_x(M)$ 中取一向量 $X_x$.
~~则可定义映射 $X: A \to$, $f \mapsto (X(f))(x) = X_x(f)$~~
则对任一 $f \in A$, 可定义 $M$ 上的实值函数
$(X(f))(x) = X_x(f)$. 若对每一 $f \in A$. $X(f) \in A$. 则称
$X$ 为一光滑向量场. $M$ 上光滑向量场的全体记为 $\Theta(M)$ 或 $\Theta$ 或 $\mathfrak{X}(M)$. 或 $\mathfrak{X}$.

命题9: (a) 若 $X$ 为光滑向量场, 则在局部坐标系 $(U, (x^1 - x^d))$ 上, 有 $X = \sum_{i=1}^{d} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. $X^i \in C^\infty(U)$. $X^i$ 称为 $X$ 在 $(U, (x^1 \cdots x^d))$ 上的分量.

(b). 若 $X$ 在 $(U, (x^1 \cdots x^d))$ 上的分量为 $X^1 \cdots X^d$.
在 $(\tilde{U}, (\tilde{x}^1, \cdots \tilde{x}^d))$ 上的分量为 $\tilde{X}^1, \cdots \tilde{X}^d$.
则在 $U \cap \tilde{U}$ 上. 有 $\tilde{X}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} X^j$.

DO(M) 可按如下方式递归定义。首先 ~~$DO^{(0)}(M)=A$~~ →

A 中元素叫做零阶微分算子，它们在 A 上的作用就是乘法。我们记 $DO^{(0)}(M)=A$。接下来，假设已经有了 $DO^{(r-1)}(M)\subseteq End_{\mathbb{R}}(A)$，定义 $DO^{(r)}(M)=\{D\in End_{\mathbb{R}}(A) \mid [D, DO^{(0)}(M)]\subseteq DO^{(r-1)}(M)\}$

最后 $DO(M)=\bigcup_{r\geq 0} DO^{(r)}(M)$。事实上，$DO^{(0)}(M)\subseteq DO^{(1)}(M)\subseteq\cdots\subseteq DO(M)$

特别地，$DO^{(1)}(M)=A\oplus\Theta(M)$.

(c) 若 $X\in\Theta(M)$，则对 $\forall f\cdot g\in A$，有

$$X(f\cdot g)=X(f)\cdot g+f\cdot X(g).$$

反之，A 上任何满足上述性质的线性变换都是 $\Theta(M)$ 的元素.

(d) 若 $X_1, X_2\in\Theta(M)$，则 $[X_1,X_2]:=X_1\circ X_2-X_2\circ X_1\in\Theta(M)$.

于是 $(\Theta(M),[\,,\,])$ 构成一个 Lie 代数. A 是一个 $\Theta(M)$ 模（作为 Lie 代数的模）. 反之 $\Theta(M)$ 也是 A 左模（作为代数的模）.

定义10：取一个非负整数 $r\geq 0$，再在每个 $T_x^{(r)}(M)$ $(x\in M)$ 中取一个 $D_x$.

于是对 $\forall f\in A$，可定义 M 上的实值函数 $(D(f))(x)=D_x(f)$.

若对 $\forall f\in A$，有 $D(f)\in A$，则称 D 为 M 上的 $\leq r$ 阶微分算子.

命题11：a) 在每个坐标系 $(U,(x^1,\dots,x^d))$ 上，对每个 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_d\leq r$，存在 $C^\infty(U)$ 中的元素 $a_\alpha$，使得

$D_y=\sum_{|\alpha|\leq r} a_\alpha(y)\,\partial_y^\alpha$，或者可简写为 $D=\sum_{|\alpha|\leq \alpha} a_\alpha\partial^\alpha$.

M 上微分算子的全体记为 DO(M).

b) 若 $D_1, D_2\in DO(M)$，则 $D_1\circ D_2\in DO(M)$，特别地，

$[D_1,D_2]=D_1\circ D_2-D_2\circ D_1\in DO(M)$. （所以 DO(M) 是一个非交换 $\mathbb{R}$ 代数）

c) A 是左 DO(M) 模，DO(M) 也是 A 模.

定义12：设 $\varphi: M\to N$ 是一个光滑映射，它诱导了拉回映射 $\varphi^*: A(N)\to A(M)$，$f\mapsto \varphi\circ f$。对于 $x\in M$，$y=\varphi(x)$。设 $m_x, m_y$ 分别为 $x, y$ 对应的 $A(M)$，$A(N)$ 中的极大理想。由定义易知 $\varphi^*(m_y^k)\subseteq m_x^k$，$k=1,2,\dots$。特别地，有局部代数之间的同态 $\varphi^*: A(N)_y\to A(M)_x$，$[f]\mapsto[\varphi\circ f]$。

取对偶空间，则有映射 $(A(M)_x)^*\to(A(N)_y)^*$，记为 $(d\varphi)_x$。具体来说，对于 $D_x\in(A(M)_x)^*$，$(d\varphi)_x(D_x)(f)=D_x(\varphi^*(f))$，$f\in A(N)$。

~~b) 设 $X\in\mathfrak{X}(M)$，则 $X$ 在每个 $x\in M$ 处定义了一个 $(A(M)_x)^*$ 中的元素 $X_x$，在每个 $y\in\varphi(M)$ 处定义了一个 $(A(N)_y)^*$ 中的元素 $(d\varphi)(X_x)$。如果 $\varphi$ 是微分同胚，就得到了 $\mathfrak{X}(N)$ 上的一个向量场，记为 $d\varphi(X)$。对 $D\in\mathfrak{D}(M)$ 有类似构造。~~

$(d\varphi)_x$ 叫做 $\varphi$ 在 $x\in M$ 处的微分，也叫切映射。

b) ~~若 $X\in\mathfrak{X}(M)$~~ 若将 $(d\varphi)_x$ 限制在切向量场上，则可简单地定义为 $(d\varphi)_x: (m_x/m_x^2)^*\to(m_y/m_y^2)^*$。

作业4

~~作业~~：若 $N=\mathbb{R}$，则 $(m_y/m_y^2)^*\cong\mathbb{R}$。于是 $(d\varphi)_x\in(m_x/m_x^2)^{**}\cong m_x/m_x^2$。证明：在此同构下，$(d\varphi)_x=[\varphi-\varphi(x)]\ (\mathrm{mod}\ m_x^2)$。

~~[illegible]~~



定义13：设 $T(M)=\bigcup_{x\in M}T_x(M)$。定义映射 $\pi: T(M)\to M$，$\pi(v)=x$，若 $v\in T_x(M)$。对于图 $(U,\varphi)$，定义 $\tilde\varphi: \pi^{-1}(U)\to\mathbb{R}^{2n}$，

$$v\mapsto(x_1(\pi(v)),\dots,x_n(\pi(v)),dx_1(v),\dots,dx_n(v))$$

则可证明：(a) 若 $(U,\varphi)$，$(V,\psi)$ 是图，则 $\tilde\varphi\circ\tilde\psi^{-1}$ 是 $C^\infty$ 的。

(b) 对图 $(U,\varphi)$，定义集合 $B_{(U,\varphi)}=\{\tilde\varphi^{-1}(w)\mid w \text{ 在 } \mathbb{R}^{2n} \text{ 中开}\}$，再定义 $B=\bigcup_{(U,\varphi)\in F}B_{(U,\varphi)}$，$F$ 为 $M$ 的微分结构，则以 $B$ 为拓扑基可生成 $T(M)$ 的一个拓扑，使其成为一个 $2n$ 维拓扑流形。

(c) 设 $\tilde F$ 是包含 $\{(\pi^{-1}(U),\tilde\varphi)\mid(U,\varphi)\in F\}$ 是极大图册，则 $\tilde F$ 是 $T(M)$ 上的微分结构。

$T(M)$ 叫做 $M$ 的切丛，$\pi: T(M)\to M$ 称为切丛的投影映射。

~~[illegible]~~ M上的切向量场 $X$，即光滑映射 $X: M\to T(M)$ 满足 $\pi\circ X=\mathrm{id}_M$。

设 $\varphi: M\to N$，则切映射即 $d\varphi: TM\to TN$，~~[illegible]~~ 假设 $X\in\mathfrak{X}(M)$，$Y\in\mathfrak{X}(N)$，若
$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "d\varphi"] & TN \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$
交换，则称 $X, Y$ $\varphi$ 相关。

续前：

引理14：设 $\varphi: M\to N$. $X', X''\in\mathfrak{X}(M)$, $Y', Y''\in\mathfrak{X}(N)$. $X'$与$Y'$ $\varphi$相关，$X''$与$Y''$ $\varphi$相关. 则 $[X', X'']$ 与 $[Y', Y'']$ $\varphi$相关.

~~证明：由已知，对$\forall f\in A(N)$，有~~

$(d\varphi)(X')(f)=X'(f\circ\varphi)=Y'(f)\circ\varphi$

$(d\varphi)(X'')(f)=X''(f\circ\varphi)=Y''(f)\circ\varphi$. 于是

$(d\varphi)([X', X''])(f)=[X', X''](f\circ\varphi)$

$=X'(X''(f\circ\varphi))-X''(X'(f\circ\varphi))$

补：$Y, X$ $\varphi$相关用函数刻画，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} A(N) & \xrightarrow{\varphi^*} & A(M) \\ Y\downarrow & & \downarrow X \\ A(N) & \xrightarrow{\varphi^*} & A(M) \end{array}$$

即 $X\circ\varphi^*=\varphi^*\circ Y$. 即对$\forall f\in A(N)$，有 $X(f\circ\varphi)=Y(f)\circ\varphi$

证明(引理14). 对$\forall x\in M$. 设 $y=\varphi(x)$. 则有

$d\varphi([X', X'']_x)(f)=[X', X'']_x(f\circ\varphi)$

$=X'_x(X''(f\circ\varphi))-X''_x(X'(f\circ\varphi))$

$=X'_x(Y''(f)\circ\varphi)-X''_x(Y'(f)\circ\varphi)$

$=d\varphi(X'_x)(Y''(f))-d\varphi(X''_x)(Y'(f))$

$=Y'_y(Y''(f))-Y''_y(Y'(f))$

$=[Y', Y'']_y(f)$. □.



## §1.3 拓扑群

定义1：一个拓扑群$G$是指一个群$G$带有一个拓扑，使得乘法 $(x, y)\mapsto x\cdot y$ 和逆运算 $x\mapsto x^{-1}$ 都是连续的.

设$G$是拓扑群. $A\subseteq G$, $x\in G$. 我们常用记号

$Ax=\{yx\mid y\in A\}$, $xA=\{xy\mid y\in A\}$, $A^{-1}=\{y^{-1}\mid y\in A\}$.

若$B\subseteq G$，则 $AB=\{xy\mid x\in A, y\in B\}$. 另外，规定

$A^2=AA$, $A^3=AAA$，等等. (注意 $A^2\neq\{x^2\mid x\in A\}$).

命题1 设$G$是拓扑群.

a) 若$U$是$G$的开集，则 $xU$, $Ux$, $U^{-1}$ 都是开集. 特别地，对$\forall A\subseteq G$，$AU$, $UA$ 也都是开集.

b) 对1的任一邻域$U$，存在邻域$V$满足 $1\in V\subseteq U$. $VV\subseteq U$. $V=V^{-1}$ (此性质称为对称).

c) 若$H$是$G$的子群，则$H$的闭包$\bar{H}$也是子群.

d) 若$H$是$G$的开子群，则$H$也是闭的.

e) 若$A, B$在$G$中紧，则$AB$也紧.

证明：a) 对于 $x\in G$. 定义 $l_x: G\to G$, $y\mapsto xy$. $r_x: G\to G$, $y\mapsto y\cdot x$. 则 $l_x$ 与 $r_x$ 都连续. 所以 $xU=l_{x^{-1}}^{-1}(U)$, $Ux=r_{x^{-1}}^{-1}(U)$ 都是开集. 由$()^{-1}$连续可知$U^{-1}$开.

Date:
Place:
Reminders

续前

引理15. 设 $\varphi: M\to N$. $\psi: N\to P$ 为流形间的光滑映射. 则 $d(\psi\circ\varphi)=d\psi\circ d\varphi$

证明: 任取 $X\in T_x(N)$ $f\in A(P)$. 则有

$$
\begin{aligned}
d(\psi\circ\varphi)(X)(f) &= X_x(f\circ\psi\circ\varphi)\\
&= X_x((f\circ\psi)\circ\varphi)\\
&= d\varphi(X_x)(f\circ\psi)\\
&= d\psi(d\varphi(X_x))(f)\\
&= (d\psi\circ d\varphi)(X_x)(f).
\end{aligned}
$$
□

Date:
Place:
Reminders

最后, $AU=\bigcup_{x\in A}xU$. $UA=\bigcup_{x\in A}Ux$. 也都是开集.

b) 由 $(x,y)\to xy$ 的连续性. 存在 1 的邻域 $W_1, W_2$ 满足 $W_1W_2\subseteq U$. 取 $V=W_1\cap W_2\cap W_1^{-1}\cap W_2^{-1}$ 即可.

c) 对于 $x,y\in\bar H$. 取 $H$ 中序列 $\{x_\alpha\}$, $\{y_\beta\}$ 满足 $x_\alpha\to x$, $y_\beta\to y$ ~~$\lim_{\alpha\to\infty}x_\alpha=x$, $\lim_{\beta\to\infty}y_\beta=y$~~, 则有 $x_\alpha y_\beta\to xy$. $x_\alpha^{-1}\to x^{-1}$. 所以 $xy$ 与 $x^{-1}$ 都在 $\bar H$ 中. 所以 $\bar H$ 是子群.

d) 若 $H$ 开. 则 所有 $xH$ $(x\in G)$ 也开. 补集 $G\setminus H$ 可视为 $H$ 的所有陪集中除它自己以外的陪集的并. 所以开. 于是 $H$ 闭.

e) $AB$ 是 $(x,y)\to xy$ 的像. 因为映射连续 所以像也紧. □

命题3. 设 $H$ 是拓扑群 $G$ 的子群.

a) 若 $H$ 闭, 则 $G/H$ 满足 $T_2$.

b) 若 $G$ 局部紧, 则 $G/H$ 也局部紧.

c) 若 $H$ 正规, 则 $G/H$ 是拓扑群.

d) 若 $G$ 满足 $T_1$, 则 $G$ 满足 $T_2$. 一般地, $\overline{\{1\}}$ 是闭正规子群, 而 $G/\overline{\{1\}}$ 满足 $T_2$.

证明: (a) 记 $q: G\to G/H$. 设 $\bar x=q(x)$, $\bar y=q(y)$ 是 $G/H$ 中两个不同的点. 于是 $xHy^{-1}$ 是不包含1的闭集, 所以存在开邻域 $U$, 满足 $U^{-1}=U$. $UU\cap xHy^{-1}=\emptyset$. 由此可得 $(UxH)(UyH)^{-1}\not\ni 1$. 于是 $UxH\cap UyH=\emptyset$. 于是 $q(Ux)$, $q(Uy)$ 是互不相交的邻域

~~因为U是1的邻域，所以存在开集V满足 $1\in V\subseteq U$. 不妨设 $V^{-1}=V$. 定义 $H'=\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. 则~~

为什么开? 设V是开集满足 $1\in V\subseteq U$. 于是 $U^N=U^N\cdot 1\subseteq U^N\cdot V\subseteq$ ~~…~~. 所以 $\bigcup_{n=1}^{N-1} U^n\cdot V\subseteq\bigcup_{n=1}^{N}U^n\subseteq\bigcup_{n=1}^{N}U^nV$.

所以 $H=\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n=\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n\cdot V$, 注意每个 $U^n\cdot V$ 开. 所以H开.



b) 若U是 $1\in G$ 的紧邻域则 $q(Ux)$ 是 $q(x)\in G/H$ 的紧邻域.

c). $G/H$ 是群. 我们要证明群运算连续. 设 $x,y\in G$. U是 $q(xy)\in G/H$ 的开邻域, 由连续性乘法的, 存在x, y的邻域V, W满足 $VW\subseteq q^{-1}(U)$. 于是 $q(V)$, $q(W)$ 是 $q(x)$, $q(y)$ 的开邻域且满足 $q(V)q(W)\subseteq U$. 所以 $G/H$ 的乘法也连续. 逆运算同理.

d) 若G满足 $T_1$, 则 $H=\{1\}$ 是闭子群. 于是 $G\cong G/H$ 满足 $T_2$. 一般地. $\overline{\{1\}}$ 是闭子群. 并且显然是最小的(所有闭子群都包含 $\overline{\{1\}}$ 作为子群). 于是它是正规的(因为若 $x\overline{\{1\}}x^{-1}$ 与 $\overline{\{1\}}$ 不同, 那么它们的交给出一个更小的闭子群). 所以 $G/\overline{\{1\}}$ 也都是拓扑群, 且满足 $T_2$. □.

一般总假设G是 $T_2$ 的. 若不然, 则用 $G/\overline{\{1\}}$ 代替G. 我们约定, 若说G局部紧, 则意味着G局部紧且 $T_2$.

命题. 若G局部紧, 则G有一个开, 闭, σ紧的子群.

证明: 设U是1的对称紧邻域, 令 $H=\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. 则H是子群. H开, H闭. 因为每个 $U^n$ 紧. 所以H σ-紧. □.

若上述U连通, 则H连通. 于是H是G的单位元连通分支.

Date:
Place:
Reminders

一般记为 $G_0$. $G_0$ 一定正规. 因为若 $xG_0x^{-1}$ 与 $G_0$ 不同. 则 $xG_0x^{-1}\cap G_0$ 给出一个更小的开又闭的子群 这与 H 连通矛盾. 于是 $G/G_0$ 也是个拓扑群. 它具有离散拓扑 (因为它的每个点开又闭). 所以从拓扑上看, G 就是一些 $G_0$ 一样的空间拷贝的不交并.

5

定理: 若 G 是拓扑群, 则 $\pi_1(G)$ 交换.

证明: 设 $\gamma_1:[0,1]\to G$, $\gamma_1(0)=\gamma_1(1)=1$.

$\gamma_2:[0,1]\to G$ $\gamma_2(0)=\gamma_2(1)=1$.

定义 $F:[0,1]\times[0,1]\to G$, $(x,y)\mapsto\gamma_1(x)\gamma_2(y)$.

再定义 $H:[0,1]\times[0,1]\to G$.

$$H(x,y)=\begin{cases}F(2xy,\ 2x(1-y)) & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ F(2x-1+(2-2x)y,\ 1-(2-2x)y) & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

则有 $H(x,0)=\gamma_1\circ\gamma_2$. $H(x,1)=\gamma_2\circ\gamma_1$

所以 $\gamma_1\circ\gamma_2$ 与 $\gamma_2\circ\gamma_1$ 同伦, 即 $[\gamma_1][\gamma_2]=[\gamma_2][\gamma_1]$. D.

~~定义 5. 设 G 是局部紧群. G 上的一个 Haar 测度是指从 $C_c(G)$ 到 R 的正线性泛函~~

Date:
Place:

Reminders

Haar 测度部分暂时跳过. →

~~考虑~~期末报告选题之一: Haar 测度

1. Haar 测度的定义 (左, 右, 对应)
2. Haar 测度的~~的~~存在性
3. Haar 测度的唯一性
4. 模函数的定义和性质. unimodular. 紧群是 unimodular 的.
5. 常见矩阵群/Lie 的 Haar 测度与模函数

Ref: Folland §2.2, §2.4.

Date:
Place:

Reminders

定义 ~~8~~ 6 a). 设 $X$ 是一个 $T_2$ 空间. $\mathcal{F}$ 是 $X$ 的 Borel 集构成的 $\sigma$-代数, $m$ 是 $(X, \mathcal{F})$ 上的一个测度.

- 若对任何 $B\in\mathcal{F}$, $m(B)$ 是 $\{m(K) \mid K\subseteq B, K \text{ 紧}\}$ 的上确界, 则称 $m$ 内正规.
- 若对任何 $x\in X$, 存在 $x$ 的邻域 $U$ 满足 $m(U)<\infty$, 则称 $m$ 局部有限.
- 若 $m$ 内正规且局部有限, 则称之为一个 Radon 测度.

b) 设 $C_c(X)$ 是 $X$ 上具有紧支集的 ($\mathbb{R}$ 值) 函数构成的线性空间. $C_c^+(X)=\{f\in C_c(X) \mid f(x)\geq 0\ \forall x\in X\}$.

若线性泛函 $\mu: C_c(X)\to\mathbb{R}$ 满足对 $\forall f\in C_c^+(X)$, $\mu(f)\geq 0$, 则称 $\mu$ 为 $C_c(X)$ 上的正线性泛函.

定理 7 (Riesz-Markov) 对 $C_c(X)$ 上的任一正线性泛函 $\mu$, 存在唯一的一个 Radon 测度 $M$, 使得 $\mu(f)=\int f\, dM$.

定义 8. 设 $G$ 是局部紧群. $G$ 上的一个左(or 右) Haar 测度是指一个非零 Radon 测度 $\mu$, 满足对 $\forall$ Borel 集 $E$, $\forall x\in G$, 有 $\mu(xE)=\mu(E)$ (or $\mu(Ex)=\mu(E)$).

定理 9 a) 每个局部紧群上有一个左 Haar 测度.

Date:
Place:

Reminders

~~作业5 证明右边的推论~~ →

Date:
Place:

Reminders

b) 若 $\lambda, \mu$ 是 $G$ 上的两个左Haar测度，则存在 $c \in (0, +\infty)$，满足 $\mu = c\lambda$.

推论：若 $\lambda$ 是 $G$ 上左Haar测度，则对任意非空开集 $U$，有 $\lambda(U) > 0$. 对任意 $f \in C_c^+(G)$，有 $\int f \, d\lambda > 0$.

证明：假设 $U$ 非空开，且 $\lambda(U) = 0$，则 $\lambda(xU) = 0$，$\forall x \in G$.
~~[illegible]~~ 对于任意紧集 $K$，它可由有限多 $U$ 的平移覆盖，于是 $\lambda(K) = 0$，再由内正则性知 $\lambda(G) = 0$. 这与 $\lambda$ 非零矛盾.
对于 $f \in C_c^+(G)$，设 $U = \{x : f(x) > \frac{1}{2}\|f\|_{\sup}\}$，则
$$\int f \, d\lambda > \frac{1}{2}\|f\|_{\sup} \lambda(U) > 0.$$
□.

定理10. 若 $G$ 是紧的，则左Haar测度也是右Haar的.

## §1.4 Lie群及其Lie代数

定义1：拓扑群 $G$ 叫做Lie群，如果它带有一个 $C^\omega$ 微分结构使得乘法和求逆运算都是~~[illegible]~~解析的.

注：Gleason, Montgomery - Zippin 在1952年证明，局部欧拓扑群上存在唯一的 $C^\omega$ 结构使之成为一个Lie群.

Date:
Place:
Reminders

解析向量场

定义2. 设 $X \in \Theta(G)$、对 $h\in G$，记 $X_h$ 为 $X$ 在 $T_h(G)$ 中~~的~~对应的向量若对 $\forall g \in G$，有

$dl_g(X_h) = X_{gh}$. 则称 $X$ 为 $G$ 上的左不变向量场.

亦可记为 $dl_g(X)=X$.

~~上述条件亦可写为 $dl_g(X)=X$~~. 所有左不变向量场构成的集合记为 $\mathfrak{g}$.

切映射事实上是切丛到切丛的映射. 切向量场则是流形到切丛的映射(截面). 所以左不变性等价于下图交换

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "dl_g"] & TG \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "l_g"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & G \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_h \arrow[r, mapsto] & dl_g(X_h) = X_{gh} \\ h \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & gh \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Date:
Place:
Reminders

所以 Lie 群的定义亦可弱化为局部欧拓扑群.

对于任意的 $g\in G$，可定义两个 $G$ 到 $G$ 的微分同胚.

$l_g: G\to G,\ h\mapsto gh$ $\quad r_g: G\to G,\ h \mapsto hg$

分别叫做 $g$ 的左平移和右平移.

~~定义2: 设 $X\in\Theta(G)$，若对 $\forall g\in G$，$dl_g(X)=X$，则称 $X$ 为 $G$ 上的左不变向量场.~~

~~定理-定义3. $G$ 上所有左不变向量场构成一个 $\mathbb{R}$-线性空间，其维数等于 $G$ 的维数. 且对 $\forall X, Y\in\mathfrak{g}$，有 $[X,Y]\in\mathfrak{g}$. 于是 $(\mathfrak{g},[\,,\,])$ 成为一个 Lie 代数，称之为 $G$ 的 Lie 代数.~~

~~证明: 定义两个映射 $\varphi: \mathfrak{g}\to T_1G$ $\quad X\mapsto X_1$~~

~~$\psi: T_1G\to\mathfrak{g}$, $X_1\mapsto X_g = dl_g(X_1)$~~

~~则不难验证 $\varphi\circ\psi = id$, $\psi\circ\varphi = id$. 所以 $\mathfrak{g}$ 与 $T_1G$ 作为线性空间同构. 于是有 $\dim\mathfrak{g} = \dim T_1G = n$.~~

定理3. 设 $G$ 是 Lie 群，$\mathfrak{g}$ 是其左不变向量场构成的集合，则

(1) $\mathfrak{g}$ 是一个实矢量空间，且映射 $\alpha: \mathfrak{g}\to T_eG$

Date: ..................
Place: ..................

Reminders

并假设 $x^i(1)=0$. $y^i(g)=0$. →

Date: ..................
Place: ..................

Reminders

$X \mapsto X_e$ 是线性空间同构. 因此, $\dim \mathfrak{g} = \dim T_1 G =$ ($\dim G$)

~~b) 左不变向量场是光滑的.~~

b) 两个左不变向量场的 Lie 括号仍是左不变的.

c) $\mathfrak{g}$ ~~在向量场之间的 Lie 括号构成~~ 是一个 Lie 代数.

证明: a) $\alpha$ 线性显然. 若 $\alpha(X)=0$. 即 $X_1=0$,

则 $X_g = dl_g(X_1) = 0$, 所以 $X$ 恒为零. 于是 $\alpha$ 单.

反之. 对任何 $X_1 \in T_1 G$, 定义向量场 $X$, $X_g = dl_g(X_1)$.

则 $X \in \mathfrak{g}$. 这是因为 $dl_g(X_h) = dl_g \circ dl_h(X_1) = dl_{gh}(X_1)$

$= X_{gh}$. 即 $X$ 左不变. 我们还需证明这样的 $X$ 是解析

~~b) 只需证对 $\forall f \in C^\infty(G)$, 有 $X(f) \in C^\infty(G)$.~~

~~$X(f)(g) = X_g(f) = dl_g(X_1)(f) = X_1(f \circ l_g)$~~ 的.

~~所以需要证明 $g \mapsto X_1(f \circ l_g)$ 光滑.~~

~~这里只考虑光滑情况, 设 $f \in C^\infty(M)$. 我们只需证明 $X(f) \in C^\infty(G)$,~~

~~$X(f)(g) = X_g(f) = dl_g(X_1)(f) = X_1(f \circ l_g)$~~

~~所以需要证明 $g \mapsto X_1(f \circ l_g)$ 光滑.~~

设 $f$ 为 $G$ 上的 $C^\omega$ 函数. 只需证 $X(f) \in C^\omega(G)$. 而

$X(f)(g) = X_g(f) = dl_g(X_1)(f) = X_1(f \circ l_g)(1)$

在 1 附近取坐标系 $(x^1 \cdots x^n)$, 在 $g$ 附近取坐标系 $(y^1 \cdots y^n)$ 于是对

于 1 附近的 $h = (x^1 \cdots x^n)$ 和 $g$ 附近的 $g = (y^1 \cdots y^n)$.

有 $y^i(gh) = F^i(y^1 \cdots y^n, x^1, \cdots, x^n)$, 这里 $F^i$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$

的 $C^{\omega}$ 函数. $V$ 是 $g$ 附近的坐标卡的欧氏部分.

设 $X_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 于是

$$X_1(f \circ l_g)(1) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(f\big(F^1(y^1 \cdots y^n, x^1 \cdots x^n), \cdots, F^n(y^1, \cdots, y^n, x^1, \cdots, x^n)\big)\Big)\Big|_{x^1 = \cdots = x^n = 0}.$$

这显然是 $y^1 \cdots y^n$ 的解析函数. 所以 $X \in \mathfrak{G}$.

b): 根据引.2 引理14. c) 根据 a). b). □.

定义4: $\mathfrak{g}$ 叫做 $G$ 的 Lie 代数.

定义5: a) 设 $G_1$、$G_2$ 是两个 Lie 群. 若映射 $\varphi: G_1 \to G_2$ 既是解析流形间的映射, 又是群同态. 则称 $\varphi$ 为 Lie 群同态. 若存在 Lie 群同态 $\psi: G_2 \to G_1$ 满足 $\psi \circ \varphi = id_{G_1}$, $\varphi \circ \psi = id_{G_2}$. 则称 $\varphi$ 为 Lie 群同构.

b) 设 $\mathfrak{g}_1$、$\mathfrak{g}_2$ 是两个 Lie 代数. 若有线性映射 $\varphi: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 满足对 $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}_1$, $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y])$. 则称 $\varphi$ 为 Lie 代数同态; 若还存在 Lie 代数同态 $\psi: \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_1$ 满足 $\psi \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}_1}$, $\varphi \circ \psi = id_{\mathfrak{g}_2}$ 则称 $\varphi$ 为 Lie 代数同构.

Date:
Place:
Reminders

定理6. 设 $G_1$. $G_2$ 是两个 Lie 群. $\varphi: G_1 \to G_2$ 是 Lie 群同态. $\mathfrak{g}_1$. $\mathfrak{g}_2$ 是 $G_1$. $G_2$ 的 Lie 代数. 由定理3. $\mathfrak{g}_1 \cong T_1(G_1)$, $\mathfrak{g}_2 \cong T_1(G_2)$. 定义映射 $d\varphi: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$.

$$X \mapsto X_1 \mapsto (d\varphi)_1(X_1) \mapsto (d\varphi(X))_g = (dl_g)((d\varphi)_1(X_1))$$

则: a) $X \in \Theta(G_1)$ 与 $d\varphi(X)$ 是 $\varphi$ 相关的.

b) $d\varphi$ 是 Lie 代数同态.

Lie's 第一结构定理. (引子 L)

c). 若 $\varphi = id_G$. 则 $d\varphi = id_{\mathfrak{g}}$.

d) 若有 Lie 群同态 $\psi: G_2 \to G_3$. 则 $d(\psi \circ \varphi) = d\psi \circ d\varphi$.

e) 若 $G_1$. $G_2$ 同构, 则 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 同构.

证明: a) 对于 $g \in G_1$. §1.2 引理15.

$$(d\varphi(X))_{\varphi(g)} = dl_{\varphi(g)} \circ d\varphi(X_1) = d(l_{\varphi(g)} \circ \varphi)(X_1)$$

$$= d(\varphi \circ l_g)(X_1) = d\varphi(X_g).$$

§1.2节引理15.

b) 由 §1.2 节引理14. c) 显然. d) ~~[illegible]~~.

e). 由 c). d). □.

利用同构 $dl_g: T_1(G) \to T_g(G)$, 可以构造很多 $G$ 上有趣的结构.

定理7: 设 $G$ 是 Lie 群.

Date:
Place:

Reminders

正体积形式.

Lie群上的Haar测度 $\int f\,d\mu = \int_G f\cdot\omega$ →

左不变度量: $\langle X, Y\rangle_h = \langle dl_g(X), dl_g(Y)\rangle_{gh}$. →

作业: 设G是紧Lie群 $\cancel{f\in C(G)}$. ω是G上的一个左不变体积形式, 证明: 对 $\forall f\in C(G)$, $\int_G f\omega$ 有限.

(关于流形上的积分 参见GTM 94 第四章)

(这里也许需要先复习积分的定义)

紧群的内容以后再说

左不变性:

$$\langle (dl_g)_y(X), (dl_g)_y(X)\rangle^B_{gy} = \int_G \langle (dr_x)_{gy}(dl_g)_y(X), (dr_x)_{gy}(dl_g)_y(Y)\rangle^L_{gyx}\,\omega_x$$

$$= \int_G \langle (dl_g)_{yx}(dr_x)_y(X), (dl_g)_{yx}(dr_x)_y(Y)\rangle^L_{gyx}\,\omega_x$$

$$= \int_G \langle (dr_x)_y(X), (dr_x)_y(Y)\rangle^L_{yx}\,\omega_x = \langle X, Y\rangle^B_y.$$

右不变性: →

$$\langle (dr_g)_y(X), (dr_g)_y(Y)\rangle^B_{yg} = \int_G \langle (dr_x)_{yg}(dr_g)_y(X), (dr_x)_{yg}(dr_g)_y(Y)\rangle^L_{ygx}\,\omega_x$$

$$= \int_G \langle (dr_{gx})_y(X), (dr_{gx})_y(Y)\rangle^L_{y(gx)}\,\omega_x = \int_G l_g^*\left(\langle (dr_x)_y(X), (dr_x)_y(Y)\rangle^L_{yx}\right)\omega_x$$

$$= \int_G l_g^*\left(\langle (dr_x)_y(X), (dr_x)_y(Y)\rangle^L_{yx}\,\omega_x\right) = \langle X, Y\rangle^B_y.$$

Date:
Place:

Reminders

a) G是可平行化的.

b) G是可定向的.

c) G上存在左不变体积形式, 且在相差常数倍的意义下唯一.

d) G上存在左不变度量.

证明: a) 在 $T_1(G)$ 中取一组基 $X_1, \cdots, X_n$. 则相应的左不变向量场 $\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n$ 给出 $T(G)$ 的标架. 于是 $T(G)\cong G\times\mathbb{R}^n$. 所以可平行化.

b) 在 $T_1(G)$ 中取体积形式 $\omega_1$ 则 $l_g^*(\omega) =: \omega_g$ 给出G上处处非零的体积形式 所以G可定向.

d) 在 $T_1(G)$ 上取一个内积, $\langle\,,\,\rangle_1$. 然后对 $X_g, Y_g\in T_g(G)$ 定义 $\langle X_g, Y_g\rangle_g = \langle dl_{g^{-1}}(X_g), dl_{g^{-1}}(Y_g)\rangle_1$ 则 $\langle\,,\,\rangle_g$ 是G上的左不变度量. □.

推论: 若G是紧Lie群. 则G上有双不变度量.

证明: 设 $\langle\,,\,\rangle^L$ 是G上的一个左不变度量. ω是G上正的左不变体积形式, 对于 $X, Y\in T_y(G)$, 定义

$$\langle X, Y\rangle^B_y = \int_G \langle (dr_x)_y(X), (dr_x)_y(Y)\rangle^L_{yx}\,d\omega_x$$

则 $\langle X, Y\rangle^B_y$ 是G上的双不变度量. □.

推论: 紧Lie群上的左不变体积形式也是右不变的.

对于①②:

$\mathfrak{g}=\mathbb{R}$. $[\ ,\ ]=0$. →

⑤特别地 $GL_1(\mathbb{R})=\mathbb{R}^*$ 是Lie群. 它有两个连通分支. 单位元1所在的一个为 $(\mathbb{R}_{>0},\cdot,1)$, 这也是交换的一个Lie群.

另外. $GL_n(\mathbb{C})$ 是复Lie群的例子. $GL_1(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*\cong\mathbb{R}_{>0}\times S^1$.

作业: 根据定义计算 ⑤⑥⑦ 的Lie代数与左不变体积形式



例: ① $(\mathbb{R},+,0)$ 是Lie群.

② $(S^1,\cdot,1)$ 是Lie群 $(S^1=\{e^{i\theta}\mid\theta\in[0,2\pi)\})$.

③ 若 $G_1, G_2$ 是Lie群. 则 $G_1\times G_2$ 是Lie群.

设 $\mathfrak{g}_1=L(G_1)$. $\mathfrak{g}_2=L(G_2)$, 则 $L(G_1\times G_2)=\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_2$.

其定义为 $[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)]=([X_1,Y_1],[X_2,Y_2])$.

④ $\mathbb{R}^n$. $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n个}$ 是Lie群.

其Lie代数为 $(\mathbb{R}^n,[\ ,\ ]=0)$

⑤ $GL_n(\mathbb{R})$ 是Lie群. $\mathfrak{g}=gl_n(\mathbb{R})$.

⑥ $N_n(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\right\}$ 是Lie群. 其Lie代数为

$n_n(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}0 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\right\}$

⑦ $B_n(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a_{11} & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}\middle|\ a_{11}\cdots a_{nn}\neq 0\right\}$ 是Lie群.

其Lie代数为 $b_n(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}* & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & *\end{pmatrix}\right\}$.

## §1.5 Lie子群.

首先复习了流形与Frobenius定理.

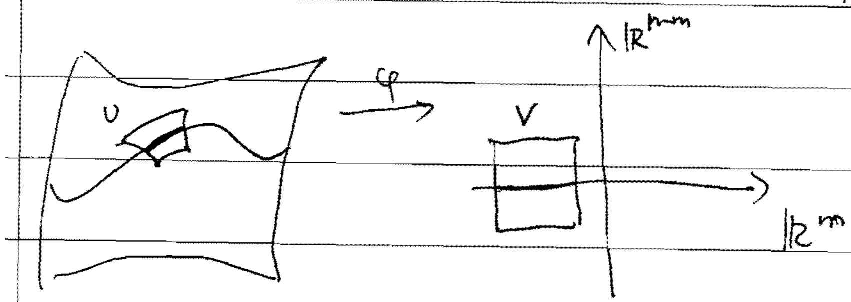
定义: 设 $\varphi: M\to N$ 是光滑(或解析)映射.

a) 若对 $\forall x\in M$. $(d\varphi)_x: T_x(M)\to T_{\varphi(x)}(N)$ 是单射, 则称 $\varphi$

有的书上只把正则嵌入叫嵌入. 这里遵照 GTM102 → 的习惯.

作业: 证明正则嵌入一定是拟正则的. 反之未必. → Ref GTM102 Thm 1.1.4. 以及第1章练习1

另一种表述 (或定义): M是正则子流形 ~~[illegible]~~ → 如果存在 $m \le n$, 使得对 $\forall x \in M$, 存在 $x$ 在 $N$ 中的开邻域 $U$ 以及坐标映射 $\varphi: U \to V \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ 使得 $\varphi(M \cap U) = V \cap \mathbb{R}^m$. 这里, $\mathbb{R}^m$ 视为 $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.






为浸入.

b) 若 $\varphi$ 本身也是单射, 则称 $\varphi$ 为嵌入.

c) 若 $\varphi: M \to \varphi(M)$ 是同胚, 则称 $\varphi$ 为正则嵌入.

(进一步地)

d) 设 $\varphi$ 是嵌入. 若对任意流形 $P$ 以及任意映射 $\psi: P \to M$, 有 "$\psi$ 解析 $\Leftrightarrow$ $\varphi \circ \psi$ 解析", 则称 $\varphi$ 为拟正则嵌入.

e) 设 $M, N$ 是解析流形, 且 $M \subseteq N$. 若含入映射 $i: M \hookrightarrow N$ 是嵌入, 则称 $M$ 为 $N$ 的子流形. 若 $i$ 是(拟)正则嵌入, 则称 $M$ 是 $N$ 的(拟)正则子流形.

定理2: 设 $N$ 是解析流形 ($\dim N = n$). $M$ 是 $N$ 的子集 带有子空间拓扑, 则 $M$ 是 $N$ 的正则子流形 $\Leftrightarrow$ 存在正整数 $m \le n$, 使得对 $\forall x \in M$, 存在 $x$ 在 $N$ 中的开邻域 $U$, 以及 $U$ 上 $n-m$ 个实值解析函数 $f_1, \cdots, f_{n-m}$, 满足: i) $U \cap M = \{y \in U \mid f_1(y) = \cdots = f_{n-m}(y) = 0\}$.

ii) $(df_1)_x, \cdots, (df_{n-m})_x$ 在 $T_x^*(N)$ 中线性无关.

证明: GTM102 Thm 1.1.5. □

定义3. 设 $\varphi: M \to N$ 为解析映射. $x \in M$ 叫做 $\varphi$ 的正则点, 如果 $(d\varphi)_x: T_x M \to T_{\varphi(x)} N$ 是满射. $y \in N$ 叫 $\varphi$ 的正则值, 如果 $\varphi^{-1}(y)$ 为空集, 或 $\varphi^{-1}(y)$ 中全为正则点.

作业：利用定理2证明定理4.

作业：利用定理4证明如下集合是Lie群.

① $SL_n(\mathbb{R})=\{A\in GL_n(\mathbb{R})\mid |A|=1\}$ ~~是Lie群~~.

② $SO_n(\mathbb{R})=\{A\in SL_n(\mathbb{R})\mid A^TA=I\}$ ~~是Lie群~~.

③ $Sp_{2n}(\mathbb{R})=\{A\in SL_{2n}(\mathbb{R})\mid A^T\begin{pmatrix}0&I_n\\-I_n&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}0&I_n\\-I_n&0\end{pmatrix}\}$ 是Lie群.

④ $SU(n)=\{A\in SL_n(\mathbb{C})\mid \bar{A}^TA=I\}$.

⑤

① $SL_n(\mathbb{R})$ , $SL_n(\mathbb{C})$.

② $O_n(\mathbb{R})$ , $SO_n(\mathbb{R})$.

③ $U(n)$, ~~$SO(n)$~~ $SU(n)$.

④ $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ , $Sp_{2n}(\mathbb{C})$. ⑤ $Sp(n)=U(2n)\cap Sp_{2n}(\mathbb{C})$

并求它们的Lie代数.

定理4. 若 $y$ 为 $\varphi: M\to N$ 的正则值，则 $\varphi^{-1}(y)$ 是流形，且是 $M$ 的正则子流形.

定义5. a) 设 $M$ 是解析流形 $\dim M=n$. 对于 $0\le p\le n$. 若对每个 $x\in M$, 指定一个 $p$ 维子空间 $L_x\subseteq T_x(M)$, 则称 $L=\{L_x\}$ 给出 $M$ 上的一个 $p$ 维分布. 若 $p\neq 0, n$. 则称 $L$ 为非平凡的(我们总假设非平凡)

b) 向量场 $X$ 属于 $L$, 如果对 $\forall x\in M$, $X_x\in L_x$.

c) $L$ 叫做解析分布, 如果对 $\forall x\in M$. 存在开集 $U\ni x$, 以及 $U$ 上的 $p$ 个向量场 $X_1\cdots X_p$ 满足 $(X_1)_y,\cdots,(X_p)_y$ 张成 $L_y$ (对任意的 $y\in U$).

d) $L$ 叫对合的, 如果对任意向量场 $X, Y\in L$, $[X,Y]\in L$.

e) 一个解析子流形 $S\subseteq M$ 叫做 $L$ 的积分子流形, 如果 $S$ 是连通的, 且对 $\forall y\in S$, $T_y(S)=L_y$. (注意 $S$ 可以不正规).

f) $L$ 叫做可积的, 如果 $\forall x\in M$ 属于某个积分子流形.

定理6 (整体Frobenius定理) 设 $M$ 是解析流形 $\dim M=n$. $L$ 是 $M$ 上对合解析分布 $\dim L=p$ 则对 $\forall x\in M$, 存在唯一的 $L$ 的极大积分子流形 $S$ 包含 $x$. 任何非空 $L$ 的积分子流形都是 $M$ 的拟正规子流形, 且是唯一的那个极大积分子流形的开子流形.

证明. GTM 102. Thm 1.3.6. □

作业: 设$X$是拓扑空间. $Y$是$X$的局部闭子集 →
则$Y$是$\bar{Y}$的开子集.

Date:
Place:
Reminders

定义7. 设$G$是一个Lie群. $H$是$G$的子流形. 若$H$也是Lie群. 且含入映射 $i: H \to G$ 是Lie群同态, 则称$H$为$G$的Lie子群.

定理8. 设$G$是Lie群. $H$是$G$的子群(抽象群), 若$H$同时也是$G$的拟正规子流形, 则$H$是$G$的Lie子群. 若$H$是正规的, 则$H$是$G$的闭子群.

证明: 映射 $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ 是 $G\times G \to G$ 的解析映射. 限制到 $H\times H$ 上则得到 $H\times H \to G$ 的解析映射. 因为$H$是子群, 所以 $\varphi(H\times H) \subseteq H$. 因为 $H \hookrightarrow G$ 是拟正规的, 所以 $\varphi: H\times H \to H$ 也是解析的. 因此$H$本身也是Lie群. 因此是Lie子群. 若$H$正规, 则根据正规子流形的定义, 在每个$x\in H$附近存在一个$G$的开集$U$, 使得$U\cap H$是$U$中的闭集. 于是$H$在$G$中局部闭. 特别地, $H$在它的闭包中是开集. 设$\bar{H}$是$H$的闭包. 则$\bar{H}$是$G$的子群. 因为$H$在$\bar{H}$中开, 所以$H$在$\bar{H}$中闭. 所以$H=\bar{H}$. 即$H$是$G$的闭子群. □

设 $G$是Lie群. $H \hookrightarrow G$是Lie子群. 则 $(di)_1: T_1(H) \to T_1(G)$ 给出$H$的Lie代数$\mathfrak{h}$到$G$的Lie代数$\mathfrak{g}$的单射. 它的像 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 叫做$\mathfrak{g}$的由$H$定义的子代数. 一个自然的问题是, 对$\mathfrak{g}$的任一子代数$\mathfrak{h}$, 是否都对应$G$的Lie子群?

引理9. 设 G是Lie群. $\mathfrak{g}$为其Lie代数. $\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的任一子代数. 则$\mathfrak{h}$定义了G上的对合分布.

证明: 设 $X_1,\cdots,X_p$ 是$\mathfrak{h}$的基. 将其扩充为$\mathfrak{g}$的基 $X_1\cdots X_n$. 因为 $\mathfrak{h}$是子代数, 所以存在常数 $C_{ijk}$ $(1\le i,j,k\le p)$, 满足

$$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{p} C_{ijk}X_k.$$

设U是G上的开集. X, Y是U上$\mathfrak{h}$中的向量场. 因为$X_1\cdots X_n$是基. 于是存在 $f_1\cdots f_p$. $g_1\cdots g_p\in A(U)$, 使得 $X=\sum_{i=1}^{p} f_iX_i$, $Y=\sum_{j=1}^{p} g_jX_j$.

于是 $[X,Y]=\sum_{1\le i,j\le p}\left((f_i\cdot X_i(g_j))X_j-(g_i X_i(f_j))X_j+\sum_{k=1}^{p} f_ig_jC_{ijk}X_k\right)$.

定理10. 设G为Lie群 $\mathfrak{g}$为其Lie代数. 则对$\mathfrak{g}$的任一子代数$\mathfrak{h}$. 存在G的唯一的连通Lie子群H, 使得$\mathfrak{h}$由H定义.

证明: 由引理9. $\mathfrak{h}$定义了G上一个对合分布. 根据Frobenius定理, 过任一点 $x\in G$, 存在一个极大积分子流形$H_x$. 记 $H_e=H$. 下证H就是所求的Lie子群.

~~根据$\mathfrak{h}$的定义~~ 因为$\mathfrak{h}$是左不变的, 所以若S是包含y的积分子流形, 则xS是包含xy的积分子流形, (因为极大积分子流形唯一). 因此, $H_x=xH$.
~~若$x\in H$, 由 $xH=H$, 所以~~
特别地, 若$x\in H$, 则有$xH=H$. 所以H是一个子群. 整体Frobenius定理保证H是连通拟正规的. 因此. 由定理8可知, H是G的Lie子群.

~~我们还需要证明 $\mathfrak{h}$ 即由 $H$ 定义的子代数. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $H$ 定义的子代数, 则 $X_1 \in (d\iota)_1(T_1(H)) = L_1^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$.~~

设 $H$ 定义的李代数为 $\mathfrak{h}'$. 设 $X \in \mathfrak{g}$, 则 $X \in \mathfrak{h}' \Leftrightarrow X_1 \in (d\iota)_1(T_1(H)) = L_1^{\mathfrak{h}} \Leftrightarrow X \in \mathfrak{h}$. 所以 $H$ 为所求.

我们还需证明这样的 $H$ 是唯一的. 假设 $H'$ 是另一这样的群, 则 $H'$ 也是 $L^{\mathfrak{h}}$ 的积分子流形, 且过 $1$. 所以 $H'$ 是 $H$ 的开子流形(整体 Frobenius 定理). 于是 $H'$ 是 $H$ 的开子群, 所以又是闭子群. 因为 $H$ 连通, 所以 $H' = H$. □

一般来说, Lie 子群不是正则子流形. 因此 $H$ 不同胚于 $\iota(H)$. 下面考虑 $H$ 正则的条件.

引理11. 设 $A, B$ 是局部紧 $C_2$ 拓扑群, $\varphi: A \to B$ 是连续满同态, 则 $\varphi$ 是开的. 若 $\varphi$ 还是单的, 则 $\varphi$ 是同胚.

证明: 主要要证明 $\varphi$ 开. 设 $1_A, 1_B$ 是 $A, B$ 的单位. $V$ 是 $1_A$ 的开邻域. 选取 $1_A$ 的一个紧邻域 $V_1$ 包含于 $V$, 且 $V_1 \cdot V_1^{-1} \subseteq V$. 因为 $A$ 是 $C_2$ 的, 所以存在 $a_1, a_2, \cdots \in A$, 满足 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n V_1$, 于是 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(a_n)\varphi(V_1)$. 注意 $\varphi(a_n)\varphi(V_1)$ 是紧的, $B$ 是 $T_2$ 的, 所以 $\varphi(a_n)\varphi(V_1)$ 闭. 根据 Baire 纲定理, $B$ 不能写为无处稠密闭集的可数并. 所以, 至少有一个 $\varphi(a_n)\varphi(V_1)$ 有非空的内部. 因此,

反之. 若 $H$ 是 Lie 群 $G$ 的闭子群, 则 $H$ 一定是 Lie 子群. 这是所谓的 Cartan 定理. 我们后面将利用指数映射证明它.

作业: 证明右边红线部分.

$\varphi(V_1)$ 也有非空的内部. 设 $b\in V_1$ 使得 $\varphi(b)$ 是 $\varphi(V_1)$ 的内点, 则 $e_B=\varphi(b)\varphi(b^{-1})$ 是 $\varphi(V_1)\varphi(V_1^{-1})$ 的内点. 而 $\varphi(V_1)\varphi(V_1^{-1})=\varphi(V_1V_1^{-1})\subseteq\varphi(V)$. 所以 $e_B$ 是 $\varphi(V)$ 的内点. 现在对于 $A$ 的任意开集 $U$ 及 $a\in U$, 则 $\varphi(a)$ 是 $\varphi(U)$ 的内点, 因此 $\varphi$ 开. □

定理12. 设 $G$ 是 Lie 群, $H$ 是 $G$ 的 Lie 子群. 则 $H$ 是 $G$ 的拟正规子流形. 且如下条件等价:

i) $H$ 是 $G$ 的拓扑子群, ii) $H$ 是正规子流形, iii) $H$ 闭.

证明: 设 $H_0$ 是 $H$ 的单位连通分支, 则 $H_0$ 是拟正规的(定理10). 于是 $H$ 也是拟正规的. 对于 i), ii), iii). i) $\Rightarrow$ ii) 是定义. ii) $\Rightarrow$ iii) 是定理8. 假设 $H$ 现在闭, 则 $H$ 在 $G$ 的诱导拓扑中局部紧且 $C_2$. 所以 $i: H\to i(H)$ 是一个同胚. 因此 i). □

例: $G=T^2$. $h:\mathbb{R}\to G$. $t\mapsto(e^{it}, e^{i\alpha t})$

其中 $\alpha\notin\mathbb{Q}$. 设 $H=h(\mathbb{R})$. 则 $H$ 是 $G$ 的 Lie 子群. $H$ 不闭.

## §1.6 Lie 群作用及其商空间

定义1: 设 $G$ 是一个群, $X$ 是一个集合. 若有映射

$G\times X\to X$, $(g,x)\mapsto g\cdot x$ 满足

Date:
Place:
Reminders

G在X上有作用往往记为 $G \circlearrowright X$ →

t可视为映射 $t: G \to \mathrm{Aut}(X)$, $g \mapsto t_g$. →

$G_x$ 一定是 G的闭子群. →

若 $x' = hx$, 则 $G_{x'} = hG_xh^{-1}$. 所以同一轨道上点的稳定化子相互共轭.

存在 ~~x~~ ⟹ 对所有的 $x \in M$ →

Date:
Place:
Reminders

i) $1 \cdot x = x$; ii) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$.

则称 G在X上有一个作用.

b) 若 G是拓扑群, X是拓扑空间, ·是连续映射, 则称 G在X上有连续作用.

c) 若 G是Lie群, X是解析流形, ·是解析映射, 则称 G在X上有解析作用.

d) 若X上有一个G的作用, 我们称X为一个G空间(或G-流形).

注: 若X是G空间, 对任意 $g \in G$, 定义 $t_g: X \to X$, $x \mapsto g \cdot x$, 则 $t_g$ 是X的自同构(集合双射, 拓扑空间同胚, 或解析流形同构) 因为 $t_g \circ t_{g^{-1}} = t_1 = id_X$, $t_{g^{-1}} \circ t_g = t_1 = id_X$.

~~以下总假设G是Lie群, M是解析流形且带有一个G作用.~~
~~其它情况(集合范畴, 拓扑空间范畴可类似定义)~~

定义2: a) 对于 $x \in M$, 定义 $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$, $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$. 分别叫x的轨道和稳定化子.

b) G作用叫自由的, 如果所有 $G_x = \{1\}$.

c) G作用叫有效的, 如果 $\bigcap_{x \in M} G_x = \{1\}$. (等价说法, t是单射)

d) G作用叫可迁的, 如果存在 $x \in M$ 使 $G \cdot x = M$

~~$\pi: M \to X$, $G$: Lie群, $G$在$M$上有作用~~

~~$(M, X, \pi, G)$ 是主丛意味着存在$X$的开覆盖 $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$~~

~~以及微分同胚 $\varphi_\alpha : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, 使得 $\varphi_\alpha(hg, g) = h\varphi_\alpha(g, y)$~~

Date: ......
Place: ......
Reminders

e) 定义 $M^G = \{x \in M \mid \forall g \in G,\ g \cdot x = x\} \subseteq M$

$M/G = \{G \cdot x \mid x \in M\}$.

$M/G$ 上可按商映射 $\pi: M \to M/G$, $x \mapsto Gx$ 定义商拓扑.

~~f) $G$作用叫做正常的, 如果映射 $G \times M \to M \times M$, $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$ 是正常的(即紧集的原像是紧的).~~

$M^G$ 叫$G$作用的不动点集. $X = M/G$ 叫商空间.

f) $G$作用叫正常的, 如果映射 $G \times M \to M \times M$,

$(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$ 是正常的.

商空间的拓扑可以是很坏的(例如环面无理流). 本节的一个主要定理就是考虑一个Lie群作用在什么情况下会有好的商空间.

定理3. 设$G$是Lie群, $M$是解析流形, $G$在$M$上有一个解析的作用. 若这个作用是自由的, 正常的, 则商空间 $X = M/G$ 上存在一个唯一的解析流形结构, 使得商映射 $\pi: M \to X$ 是一个淹没. 特别地, $(M, X, \pi, G)$ 是一个主丛.

~~为证明这个定理, 我们先回顾一下正常映射的性质.~~
~~(参考书 Bourbaki《General Topology》, Ch I. §10)~~

Date:
Place:
Reminders

例: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 0$ 闭. 而
$f\times id_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto(0,y)$ 不闭.
比如 $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中闭. 而 $(f\times id_{\mathbb{R}})(C)=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0\}$
不是闭的.

作业: 证明引理6

引理7. 设 $G$. $M$. $X=G/M$,
$T=\gamma(G\times M)$ 在 $M\times M$ 中闭 $\Longleftrightarrow$ $X$ 的商拓扑是 $T_2$ 的.
此时, 对 $\forall x\in M$, $Gx$ 是 $M$ 的闭正则子流形.
证明: 设 $T$ 闭. 取 $x,y\in M$ 满足 $\pi(x)\neq\pi(y)$, 则 $(x,y)\notin T$. 所以存在开集 $U,V\subseteq M$ s.t. $(x,y)\in U\times V\subseteq M\times M\setminus T$, 因此 $G\cdot U\cap G\cdot V=\phi$.
因此 $\pi(U)\cap\pi(V)=\phi$. 这证明了 $X$ 是 Hausdorff 的. 反之, 若 $X$ Hausdorff, 取 $(x,y)\notin T$, 则 $\pi(x)\neq\pi(y)$. 所以有 $\pi(x)$ 的开邻域 $[U]$ 与 $\pi(y)$ 的开邻域 $[V]$ 满足 $[U]\cap[V]=\phi$. 取 $U=\pi^{-1}([U])$, $V=\pi^{-1}([V])$, 于是 $(x,y)\in U\times V$

Date:
Place:
Reminders

定义4: 设 $f: X\to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射.
若对任意拓扑空间 $Z$, $f\times id_Z: X\times Z\to Y\times Z$ 是闭的,
则称 $f$ 是正当的.
由定义显然可知 若 $f$ 正当, 则 $f$ 本身闭. (只要取 $Z=pt$).
但是闭映射未必正当.

引理5. 设 $f: X\to Y$ 是连续单射. 则以下等价:
a) $f$ 正当. b) $f$ 闭. c) $f(X)$ 在 $Y$ 中闭, 且 $f: X\to f(X)$ 是同胚
证明: a)$\Rightarrow$b) ✓. b)$\Rightarrow$c) ✓. 若c), 则 $f\times id_Z$ 是 $X\times Z$ 到 $Y\times Z$ 的一个闭子空间的同胚. 因此闭. 所以 a). □

引理6. $G$ 在 $M$ 上有一个自由作用 等价于 映射
$\gamma: G\times M\to M\times M$, $(g,x)\mapsto(g\cdot x, x)$
是单射.

推论: 若 $G$ 在 $M$ 上有自由且正当的作用, 设 $T=\gamma(G\times M)\subseteq M\times M$,
则 a) $T$ 是 $M\times M$ 的闭子集, b) $\gamma: G\times M\to T$ 是同胚. c)

$\subseteq (M\times M)\setminus T$, 因此 $T$ 闭.
注意

Date:
Place:

Reminders

作业：证明：引理4中的$\pi: N\to M$是开的。 →

(Ref GTM 107. Lem 2.9.1)

Date:
Place:

Reminders

为证明定理3，我们首先考虑一种简单情形：只有一个轨道的群作用，即可迁作用。

设$G$是局部紧$T_2$ $C_2$群，$H$是$G$的闭子群，$N=G/H$ $(=\{gH \mid g\in G\})$ 为陪集空间。定义$U\subseteq N$开$\Leftrightarrow \beta^{-1}(U)$开（$\beta: G\to N$为自然投影），于是$N$上被赋以商拓扑，$\beta$连续。

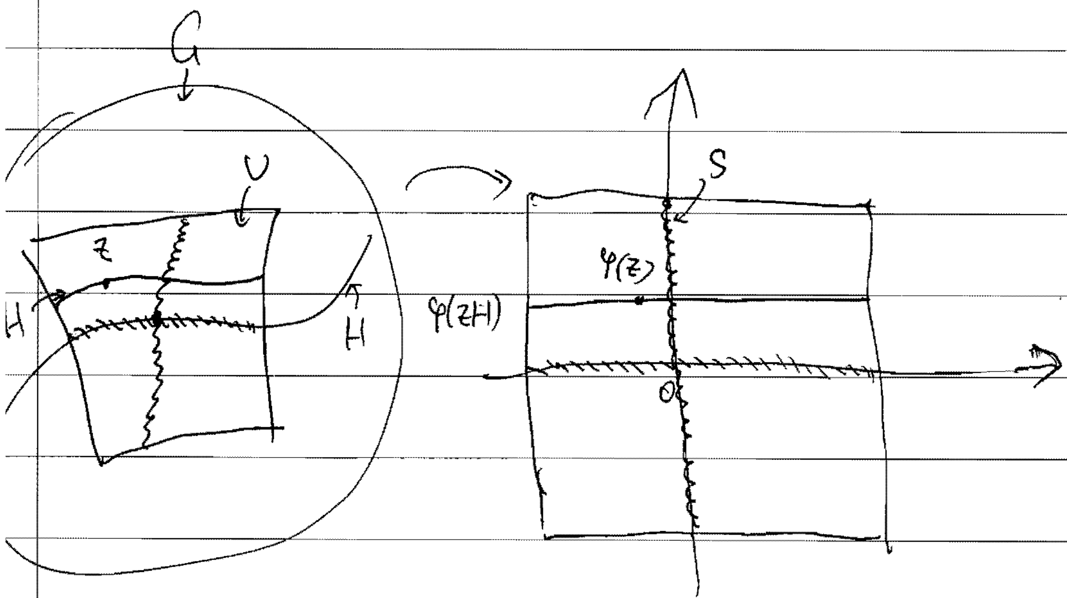
作业：(1) 证明$N$上的商拓扑也局部紧，$T_2$，$C_2$

(2) 证明$G\times N\to N$，$(g, \beta(x))\mapsto g\cdot\beta(x) := \beta(g\cdot x)$良定（即不依赖于$x$的选取），且给出$G$在$N$上的连续作用。

(3) 证明上述作用可迁，且$H$是$\beta(1)$的稳定化子

引理4. 设$M$是$G$空间，$G$和$M$局部紧，$T_2$，$C_2$，设$G$在$M$上的作用可迁，取$x_0\in M$，$H=G_{x_0}$，$N=G/H$，则映射$\pi: N\to M$，$gH\mapsto gx_0$良定，且给出$N$到$M$的同胚，且与$G$在$N$，$M$上的作用交换。特别地，映射$g\mapsto gx_0$是$G$到$M$的开映射。

证明：记$\gamma$为$g\mapsto gx_0$，则$\gamma$连续，且$\gamma=\pi\circ\beta$。注意$N$上是商拓扑，所以对$M$中的开集$U$，$\pi^{-1}(U)$开$\Leftrightarrow \beta^{-1}\pi^{-1}(U)$开$\Leftrightarrow \gamma^{-1}(U)$开。所以$\pi$连续，$\pi$良定显然，与$G$作用交换显然，$\pi$满显然，接下来还要证明$\pi$开。（留为作业）。




Date:
Place:
Reminders

下面假设 $G$ 是 Lie 群，$M$ 是解析流形，$G$ 在 $M$ 上有解析的作用。我们要证明引理 4 的解析版本也成立。

定理 5、设 $H$ 是 $G$ 的闭 Lie 子群，则在 $G/H=N$ 上存在唯一的解析流形结构使得 $G$ 解析地作用在 $N$ 上。

证明：$H$ 是闭 Lie 子群 $\Rightarrow$ $H$ 是 $G$ 的正则嵌入子流形 $\Rightarrow$ 在单位元 1 附近存在开集 $U$ 和坐标映射 $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ $(n=\dim G)$ 满足 $\varphi(H\cap U)=\varphi(U)\cap\mathbb{R}^p$ $(p=\dim H)$。$\mathbb{R}^p=\mathbb{R}^p\times\{0\}\subseteq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{n-p}=\mathbb{R}^n$。

不妨假设 $\varphi(U)=I_a^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x_i|<a,\ i=1,\dots,n\}$。（若不然，总可取一 $I_a^n\subseteq\varphi(U)$，然后重新取 $\tilde{U}=\varphi^{-1}(I_a^n)$）。对于 $0<b\le a$，我们引入记号 $U_b=\{x\in U \mid \varphi(x)\in I_b^n\}$。对于 $\xi\in\mathbb{R}^{n-p}$，我们引入记号 $U_b(\xi)=\{x\in U_b \mid x_i(x)=\xi_i,\ i=p+1,\dots,n\}$。我们首先证明，可以适当缩小 $a$，使得对 $\forall z\in U$，$zH\cap U=U_a(\xi)$，其中 $\xi=(x_{p+1}(z),\dots,x_n(z))$。

根据上面的记号和 $U$ 的取法，$U_a\cap H=U_a(0)$。选取 $0<a_1<a$，使得 $U_{a_1}U_{a_1}\subseteq U_a$ 中。再选取 $0<a_2\le a_1$，使得 $U_{a_2}^{-1}U_{a_2}\subseteq U_{a_1}$，则 $U_{a_2}$ 就是所求。若 $z\in U_{a_2}$，设 $\xi_i=x_i(z)$，$i=p+1,\dots,n$。我们要证明 $U_{a_2}\cap zH=U_{a_2}(\xi)$。设 $\mathfrak{g}$ 是 $G$ 的 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ 是 $H$ 在 $\mathfrak{g}$ 中定义的子代数。$L^{\mathfrak{h}}$ 是由 $\mathfrak{h}$ 定义的分布，则 $L^{\mathfrak{h}}$ 在 $U_{a_2}$ 上就是由 $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}$ 张成的分布。于是 $U_{a_2}(\xi)$ 是 $L^{\mathfrak{h}}$ 的积分子流形。又因为 $z\in U_{a_2}(\xi)$，所以 $U_{a_2}(\xi)\subseteq zH$。接下来我们只需证 $U_{a_2}\cap zH\subseteq U_{a_2}(\xi)$ 中。事实上，$U_{a_2}\cap H=U_{a_2}(0)$，于是 $U_{a_2}\cap zH=z(z^{-1}U_{a_2}\cap H)\subseteq z(U_{a_1}\cap H)=zU_{a_1}(0)$。而 $zU_{a_1}(0)$

Date:
Place:

Recall: $\pi: G \to G/H =: N$.

作业：(a) 证明若 $(U_{\sigma_1}, \tilde{\varphi}_{\sigma_1})$ 和 $(U_{\sigma_2}, \tilde{\varphi}_{\sigma_2})$ 是 $G/H$ 上是有非空交的两个坐标图，则它们的转换函数是解析的。(Ref GTM 94 Thm 3.58)

(b) 证明：$G$ 在 $N = G/H$ 上的作用是解析的。(Ref 同上).

作业：证明定理6的推论.

Date:
Place:

是 $U_{a_2}$ 中过 $\xi$ 的连通积分子流形，所以 $x_{p+1}, \dots, x_n$ 在 $U_{a_2}(0)$ 上是常数，因此 $U_{a_2}(0) = U_{a_2}(\xi)$. 这就证完了我们想要的性质.

现在，取 $S = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^{n-p}$，并定义映射
$\tilde{\varphi}^{-1}: S \to \pi(U)$. $\xi \mapsto \varphi^{-1}(\xi)H$.

根据 $(U, \varphi)$ 的取法可知 $\tilde{\varphi}^{-1}$ 是单射且连续、开，因此是一个同胚. 令 $\tilde{\varphi}$ 是 $\tilde{\varphi}^{-1}$ 的逆，则 $\tilde{\varphi}: \pi(U) \to S \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ 给出 $[1] = 1H \in G/H$ 附近的坐标系. 对于 $\sigma H \in G/H$，定义 $\tau_\sigma: G/H \to G/H$. $\tau H \mapsto \sigma\tau H$. 然后取 $U_\sigma = \tau_\sigma(\pi(U))$. $\tilde{\varphi}_\sigma = \tilde{\varphi} \circ \tau_{\sigma^{-1}}|_{U_\sigma}$，则 $(U_\sigma, \tilde{\varphi}_\sigma)$ 给出 $\sigma H$ 附近的坐标系. 我们需要验证这个坐标覆盖是解析的.（留作作业）. 且 $G$ 在 $G/H$ 上的作用是解析的（同上）.

上面证的都是存在性. 还有唯一性有待证明. 但唯一性事实上是下面一个定理的推论，所以我们先暂停，证完下一定理再说.

定理6. 设 $G$ 解析地作用在 $M$ 上. $x_0 \in M$. $H = G_{x_0}$，则 $H$ 是闭 Lie 子群，$G$ 的映射 $gH \mapsto g \cdot x_0$ 给出 $N = G/H$ 到 $M$ 的解析同胚.（若 $G$ 作用可迁

推论：若 $N$ 上有两个解析流形结构使得 $G$ 解析地作用在 $N$ 上，则这两个结构是一样的.

证明：定义 $\gamma: G \to M$, $g \mapsto g \cdot x_0$. 则 $H = \gamma^{-1}(x_0)$. 我们首先证明 $H$ 是正则嵌入子流形. 根据定义，$\gamma \circ l_g = t_g \circ \gamma$，

于是 $(d\gamma)_g \circ (dl_g)_1 = (dt_g)_{x_0} \circ (d\gamma)_1$.

若映射 $\varphi: M\to N$ 满足对 $\forall x\in M$，$(d\varphi)_x$ 的秩是与 $x$ 无关的常数 $r$，则根据隐函数定理，可选 $x$ 附近的开集 $U$ 及其上坐标系 $x_1\cdots x_m$ 及 $\varphi(x)$ 附近开集 $V$，及其上坐标系 $y_1\cdots y_n$，使得 $\varphi$ 在两个坐标系下即为 $(x_1\cdots x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0)$。于是 $\varphi(U)$ 是 $V$ 中的子流形，$\varphi^{-1}(\varphi(x))$ 是 $U$ 中的子流形。特别地，对任何 $y\in\varphi(M)$，$\varphi^{-1}(y)$ 是 $M$ 的正则子流形。但一般来说 $\varphi(M)$ 未必是 $N$ 的正则子流形，因为 $\varphi$ 可能整体上坏（如环面无理流）。

在 $g\in G$ 附近取坐标系 $(x_1\cdots x_n)$ $U$，使得 $gH\cap U=\{h\in U \mid x_{p+1}(h)=\cdots=x_n(h)=0\}$（由定理5的证明可知这样的坐标系存在）。在 $x_0$ 附近取坐标系 $(y_1\cdots y_m)$ $V$，在 $g\cdot x_0$ 附近取坐标系 $z_1\cdots z_m$。于是对于 $\tilde g\in U$，$y\in V$，$z_i(\tilde g\cdot y)=F_i(x_{p+1},\cdots,x_n,y_1\cdots y_m)$，其中 $F_i$ 解析。根据 $N$ 上坐标系的选法，$(x_{p+1},\cdots,x_n)$ 正好是 $gH\in N$ 附近的坐标系。所以对于固定的 $y_1\cdots y_m$，$(x_{p+1},\cdots,x_n)\mapsto F_i(x_{p+1},\cdots,x_n)$ 正好给出 $N\to M$ 的映射 $\beta$。所以 $\beta$ 解析。



设 $V_g=(d\gamma)_g(T_g(G))\subseteq T_{\gamma(g)}(M)$，则有 $V_g=(dt_g)_{x_0}(V_1)$。因为 $t_g$ 是微分同胚，所以 $(dt_g)_{x_0}$ 是同构，因此 $\dim V_g$ 不随 $g$ 变化，即 $\gamma$ 具有常数的秩。因此 $\gamma^{-1}(x_0)$ 是子流形（正则嵌入）。

要证明 $\beta: gH\mapsto g\cdot x_0$ 是解析的。~~还要按定理5证明选择取H的坐标系~~

~~首先设 $g$ 在 1 附近，在 1 附近按定理5证明选择H取坐标系 $x_1\cdots x_n$，在 $x_0$ 附近取坐标系 $y_1\cdots y_m$，则 $y_i(g x_0)=F_i(x_{p+1},\cdots,x_n,y_1\cdots y_m)$ 是解析函数。而根据定理5中 $N$ 上坐标系的选法，$(x_{p+1},\cdots,x_n)$ 正是 $N$ 上 $gH$ 附近的坐标。上述 $F_i$ 正好给出 $N$ 到 $M$ 的映射，所以是解析的（对于固定的 $y_1\cdots y_m$）。若 $g$ 不在 1 附近，可用左移 $l_g$ 将问题转化为 1 附近。所以 $g\mapsto g x_0$ 是 $N$ 到 $M$ 的解析映射~~

~~要证明 $\beta^{-1}$ 也是解析的，对上述 $F_i(x_{p+1},\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0$ 应用反函数定理即可（注意 $m=n-p$）。□~~

最后还要证明 $\beta^{-1}: M\to N$ 也是解析的。设 $z\in M$，于是存在 $g\in G$ 使得 $g\cdot x_0=z$。按右边的方式取坐标系，于是 $z_i(\tilde g\cdot x_0)=F_i(x_{p+1},\cdots,x_n,0,\cdots,0)$。注意 $F_i$ 关于 $x_{p+1}\cdots x_n$ 是满秩的，且 $m=n-p$（引理4）。所以由反函数定理，$x_k=F_k^{-1}(z_1\cdots z_m)$ $(k=p+1,\cdots,n)$ 是解析的。□

形如 $G/H$ 的流形叫齐性空间，定理6表明，可迁 $G$ 流形与齐性空间是一回事。

这样的$N$叫$G$的Lie商群. →

作业：证明：若 $\varphi: M\to N$ 是淹没，则
$f: N\to\mathbb{R}$ 解析 $\Leftrightarrow$ $f\circ\varphi: M\to\mathbb{R}$ 解析
提示：用隐函数定理或秩定理证明$\varphi$局部上是投影
$\varphi: (x_1,\dots,x_m)\mapsto(x_1,\dots,x_n)$ $(m\ge n)$.

定理7. 设$H$是$G$的闭正规子群. 则$N=G/H$有解析结构使得它成为一个Lie群. 且映射$\beta: G\to N$是Lie群同态.

证明：设 $\eta: G\times G\to G,\ (g,h)\mapsto gh^{-1}$.
$\tilde\eta: N\times N\to N,\ (gH, hH)\mapsto gh^{-1}H$
$\beta^2: G\times G\to N\times N,\ (g,h)\mapsto(\beta(g),\beta(h))$

于是有 $\tilde\eta\circ\beta^2=\beta\circ\eta$. 因为$\beta$解析, $\eta$解析, 所以$\tilde\eta\circ\beta^2$解析. 因为$\beta^2$是淹没, 所以$\tilde\eta$解析. ($\beta$的解析性显然) □

下面考虑一般的(未必可迁的)Lie群作用. 根据定理6. 每个$G\cdot x$微分同胚于$G/G_x$. 且是$M$的子流形. 但是这些子流形的性质可能很坏. 可能不正则.

引理8: $G\cdot x$是$M$的正则子流形 $\Leftrightarrow$ $G\cdot x$局部闭.

证明: $\Rightarrow$ 显然. 反之, 若$G\cdot x$局部闭, 则它的空间拓扑局部紧, $T_2$. 于是根据引理4, $G/G_x\to G\cdot x$是同胚. 所以$G\cdot x$是正则子流形. □

推论: 若$G$紧, 则$G\cdot x$总是正则子流形.

Date:
Place:

Reminders

作业：证明 $G$ 作用自由 $\Leftrightarrow$ $\gamma$ 是单的. $\longrightarrow$

Date:
Place:

Reminders

下面总假设 $G$ 是 Lie 群, $M$ 是解析流形, $G$ 在 $M$ 上有解析作用. $X = M/G$, 并赋以商拓扑. $\pi: M \to X$, $x_0 \mapsto Gx_0$ 为其商映射.

若 $X$ 上有解析流形结构使 $\pi$ 成为淹没, 则对 $\pi(x_0) \in X$, $\pi^{-1}(\pi(x_0)) = Gx_0$ 是 $M$ 的正则子流形, 且其维数不随 $x_0$ 变化. 因为 $Gx_0 \cong G/G_{x_0}$, 于是 $G_{x_0}$ 的维数也不随 $x_0$ 变化. 我们考虑一种简单情况: 所有 $G_{x_0} = \{1\}$, 即自由. 设

$\gamma: G \times M \longrightarrow M \times M$, $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$

$\Gamma = \gamma(G \times M) = \{(gx, x) \mid g \in G, x \in M\} \subseteq M \times M$.

则 $G$ 作用自由 $\Leftrightarrow$ $\gamma$ 是单射.

引理 9. $X$ $T_2$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma$ 闭. 此时, 所有 $G \cdot x$ 是 $M$ 的闭正规子流形

证明: 若 $\Gamma$ 闭, 则对 $\forall x, y \in M$ 满足 $\pi(x) \neq \pi(y)$, 则 $(x, y) \notin \Gamma$. 于是有开集 $U \subseteq M$, $V \subseteq M$, 使得 $(x, y) \in U \times V \subseteq M \times M \setminus \Gamma$. 于是 $G \cdot U \cap G \cdot V = \phi$. 所以 $\pi(U) \cap \pi(V) = \phi$. 于是 $X$ $T_2$. 反之若 $X$ $T_2$. 取 $(x, y) \notin \Gamma$, 则 $\pi(x) \neq \pi(y)$. 取开集 $Y \subseteq X$, $Z \subseteq X$, 使得 $\pi(x) \in Y$, $\pi(y) \in Z$, 且 $Y \cap Z = \phi$. 再取 $U = \pi^{-1}(Y)$, $V = \pi^{-1}(Z)$. 则 $(x, y) \in U \times V \subseteq M \times M \setminus \Gamma$. 因此 $\Gamma$ 闭. 此时, 所有轨道 $G \cdot x$ 在 $M$ 中闭 (因为 $(G \cdot x, x) = \Gamma \cap (M \times \{x\})$). 所以正规. □

Date:
Place:

Reminders

例: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$. 闭.

$f \times id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (0, y)$ 不闭.

因为闭集 $C = \{(x,y) \mid xy = 1\}$ 的像 $f(C) = \{(0,y) \mid y \neq 0\}$ 不是闭的.

Date:
Place:

Reminders

为了证明定理3, 我们首先回顾一些正常映射的性质

定义10: 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射. 若对任意拓扑空间 $Z$, $f \times id_Z: X \times Z \to Y \times Z$ 是闭的, 则称 $f$ 正常.

由定义可知, 若 $f$ 正常, 则 $f$ 闭 (取 $Z = pt$ 即可). 反之, $f$ 闭推不出 $f$ 正常.

引理11: 设 $f: X \to Y$ 是连续单射. 则以下等价

a) $f$ 正常. b) $f$ 闭. c) $f(X)$ 在 $Y$ 中闭, 且 $f: X \to f(X)$ 是同胚.

证明: a)⇒b) ✓. b)⇒c) ✓ 若 c), 则 $f \times id_Z$ 是 $X\times Z$ 到 $Y \times Z$ 的闭子空间的同胚. 因此是闭映射. 所以 a). □.

(更多性质参见 Bourbaki《GT》Ch I. §10).

定理3的证明: 根据前面的引理 $f$ 自由且正常 ⇒ $\gamma$ 单且正常 ⇒ $\Gamma$ 闭 且 $\gamma: G \times M \to \Gamma$ 是同胚 ⇒ $X = M/G$ $T_2$. 且所有 $G\cdot x$ 闭正规.

我们首先证明, 对于 $x \in M$, 存在 $M$ 的过 $x$ 的闭正规子流形 $N$, 使得 a) $T_x(M) = T_x(N) \oplus T_x(G\cdot x)$. b) $\pi|_N$ 是单的.

因为 $G\cdot x$ 闭正规. 所以在 $x$ 附近, $G\cdot x$ 形如 $(x_1, \dots x_k, 0, \dots 0)$. 于是可取闭正规子流形 $N_1 = (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)$, $N_1$ 满足 a). 下面

Date:
Place:

Reminders

$g$ 的唯一性来自 $G$ 作用自由.

①
作业: 利用满足 a), b) 的 $N$ 的存在性证明 $X$ 上存在微分结构, 使得 $\pi: M\to X=M/G$ 是淹没.

② 同样利用子流形 $N$ 证明, 若 $X$ 上存在解析流形结构 使 $\pi: M\to X$ 为淹没, 则 $G$ 作用正当. 作用自由

Ref GTM 102 Thm 2.9.10.

Date:
Place:

Reminders

要适当地缩小 $N_1$ 为 $N$, 使得 $\pi|_N$ 是单的. 设 $\Psi: G\times M\to M$, $(g,y)\mapsto g\cdot y$. 根据 $N_1$ 的选法, $(d\Psi)_{(1,x)}: T_{(1,x)}(G\times M)\to T_x(M)$ 是满的. 因为 $G_x=\{1\}$, 所以 $\dim(G)=\dim(G\cdot x)$. 所以上面两个线性空间维数相同, 因此是双射. 双射是开性质, 所以可适当缩小 $N_1$, 使得 $(d\Psi)_{(1,y)}$ 对 $\forall y\in N_1$ 都是双射. 利用 $G$ 上的左平移不变性证明, 对 $\forall g\in G$, $\forall y\in N_1$, $(d\Psi)_{(g,y)}$ 都是双射. 所以 $\Psi$ 是局部微分同胚. ~~于是 $G\cdot N_1=\mathrm{Im}(\Psi)$ 是 $M$ 中的开集~~ 于是存在 $G$ 中开集 $U\ni 1$, $N_1$ 中开集 $N_2$, 使得 $\Psi: U\times N_2\to U\cdot N_2$ 是同胚.

下面我们证明, 存在 $N_2$ 中 $x$ 的开邻域 $N$, 使得 $\pi|_N$ 是单的. 假设此事不对. 于是对 $N_2$ 中 $x$ 的任何开邻域 $N$, 存在 $y\neq y'\in N$, 以及唯一的 $g\in G$, 使得 $y'=g\cdot y$. 取一串 $N^{(k)}$, 使得 $\bigcap_{k=1}^{\infty}N^{(k)}=\{x\}$. 于是有 $\{y_k\}$, $\{y_k'\}$, $\{g_k\}$ 满足 $y_k\to x$, $y_k'\to x$, $y_k'=g_k\cdot y_k$, $y_k'\neq y_k$. 因为 $\gamma$ 是同胚, 所以 $\gamma^{-1}: (y_k', y_k)\mapsto(g_k, y_k)$ 连续. 于是可知 $g_k\to 1$. 于是存在 $k$, 使得 $g_k\in U$. 现在考虑等式 $\Psi(1, y_k')=\Psi(g_k, y_k)$. 因为 $\Psi$ 是 $U\times N_2$ 到 $U\cdot N_2$ 的同胚, 所以只有 $y_k'=y_k$. 这与假设矛盾.

利用选择的子流形 $N$ 不难给出 $X$ 上的微分结构 (类比定理5中 $S$ 的作用) 留作作业. □

推论1: 若 $G$ 是紧 Lie 群, $M$ 解析, $G$ 在 $M$ 上有自由的解析作用, 则 $M/G$ 有唯一的解析结构.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

使得 $\pi: M \to M/G$ 是淹没.

这是如下引理的推论:

引理: 设G是离散群, X是拓空间. G在X上有连续作用, 则G的作用是正当的.

作业: 证明该引理. Ref: Bourbaki《GT》, Ch III. §4. no.1, Prop 2. a).

推论2. 设G是离散群, 自由且解析地作用在解析流形M上(并假设T闭), 则 $X = M/G$ 上存在解析结构使 $M \xrightarrow{\pi} X$ 为淹没 $\Leftrightarrow$ 对每个 $x \in M$, 存在M的开集U, $x \in U$, 满足 $(g\cdot U) \cap U = \phi$, 对 $\forall g \neq 1 \in G$.

证明: $\Rightarrow$ 若X存在这样的解析结构, 则 $\gamma: G\times M \to M \times M$ 为正当映射. 于是 $\gamma: G\times M \to T$ 为同胚. 假如这样的U对某个x不存在, 则存在序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 满足 $x_n \to x$, $y_n \to x$, $y_n = g_n\cdot x$, $(g_n \neq 1)$. 于是 $g_n \to 1$. 但G上拓扑是离散的, 所以存在N, 使得 $n > N$ 时总有 $g_n = 1$. 矛盾.

$\Leftarrow$ 只需证明γ是闭映射. ~~取 $(g, x) \in G\times M$, 并取一个序列 $(g_n, x_n) \to (g, x)$, 我们要证明 $\gamma(g_n, x_n) = \gamma(g, x) = (g\cdot x, x)$, 即 $g_n\cdot x_n \to gx$. 设 $h_n = g^{-1}g_n$, 则 $h_n \cdot x_n$~~

$\Leftarrow$ 只要证明 $\gamma^{-1}: (g\cdot x, x) \mapsto g$ 是连续的. 设有一串 $\{x_n\}$, $\{g_n\}$ 满足 $x_n \to x$, $g_n\cdot x_n \to g\cdot x$. 令U为x对应的开集, 则存在

Date:
Place:
Reminders

$N$，使 $n>N$ 时有 $x_n\in U$，$(g^{-1}\cdot g_n)\cdot X\in U$，于是 $g^{-1}g_n=1$，即 $g_n=g$。于是 $g_n\to g$。 □

## §1.7 复叠映射与Lie第二定理

引理1. 设 $\varphi: G_1\to G_2$ 是Lie群同态，$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ 是 $G_1,G_2$ 的Lie代数，$d\varphi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ 是切映射。记 $\mathfrak{h}_1=\ker(d\varphi)$，$\mathfrak{h}_2=\mathrm{Im}(d\varphi)$。则 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的Lie子代数，$\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}_2$ 的子代数。设 $H_1$ 是 $\mathfrak{h}_1$ 对应的 $G_1$ 的子群，$H_2$ 是 $\mathfrak{h}_2$ 对应的 $G_2$ 的Lie子群，则：a) $H_1$ 是 $G_1$ 的闭正规Lie子群，$H_1=(\ker(\varphi))_0$。

b) ~~$H_2$ 是 $G_2$ 的Lie子群~~，$\varphi$ 是从 $G_1$ 到 $H_2$ 的Lie群同态，且 $H_2=(\mathrm{Im}\,\varphi)_0$。

证明：a) Lie群同态是连续的，因此 $(\ker\varphi)_0=(\varphi^{-1}(1_{G_2}))_0$ 是过 $1_{G_1}$ 的正规子流形，于是是闭正规Lie子群。由定义易知它是 $\mathfrak{h}_1$ 的积分流形，于是由 $H_1$ 的定义应有 $\ker\varphi\subseteq H_1$，但它在 $H_1$ 中既开又闭，所以 $\ker\varphi=H_1$。b) 同样由连续性质，存在 $1_{G_1}$ 的开集 $U$ 与 $1_{G_2}$ 的附近的子流形 $V$ 使 $\varphi(U)=V$。由定义易知 $V$ 是 $\mathfrak{h}_2$ 的积分流形，所以 $V$ 是 $H_2$ 的 $1$ 附近的开集。因为 $U$ 生成 $G_1$，$V$ 生成 $H_2$，所以有 $\varphi(G_1)=H_2$ $=(\varphi(G_1))_0$。因为 $H_2\hookrightarrow G_2$ 拟正则，所以 $\varphi:G_1\to H_2$ 解析。 □

$G_1 \to G_2$ 是单覆盖 $\Rightarrow$ ① $G_1 \to G_2$ 是满射.

② $\ker(G_1 \to G_2)$ 是 $G_1$ 的离散正规子群

引理：连通 Lie 群 $G$ 的离散正规子群 $H$ 一定在 $G$ 的中心中.

证明：对 $\forall g \in G$. 存在道路 $\gamma: [0,1] \to G$. $\gamma(0) = 1_G$, $\gamma(1) = g$.
对于 $h \in H$, $h(t)$: $t \mapsto \gamma(t) h \gamma(t)^{-1} \in H$. 因为 $H$ 离散. 所以 $h(t) = \gamma(t) h \gamma(t)^{-1}$ 是常数. 因为 $h(0) = h$. 所以 $h(1) = h$,
即 $ghg^{-1} = h$. 即 $gh = hg$. □

因此, 若 $G_1$ 是 $G_2$ 的覆盖. 则存在 $G_1$ 的中心 $Z$ 的一个离散子群 $H$, 使得 $G_2 = G_1/H$.



推论：$\varphi$. $G_1$. $G_2$ $d\varphi$ 同前. 则

a) $d\varphi$ 单 $\Leftrightarrow$ $\ker(\pi)$ 是 $G_1$ 的离散子群.

b) $d\varphi$ 满 $\Leftrightarrow$ $\varphi(G_1^0) = G_2^0$

定义 2：设 $G_1$, $G_2$ 是连通 Lie 群. $\varphi: G_1 \to G_2$ 是 Lie 群同态. 若 $d\varphi: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 是同构, 则称 $G_1$ 是 $G_2$ 的一个覆盖群.

定理 3. a) 若 $G_1$ 是 $G_2$ 的覆盖群. 则 $G_1$ 是 $G_2$ 的覆盖空间

b) 设 $G$ 是 Lie 群. $G'$ 是 $G$ 的一个覆盖空间, $\pi: G' \to G$ 是相应的覆盖映射. 则对任一 $e' \in \pi^{-1}(1_G)$, 存在 $G'$ 上的 Lie 群结构使 $G'$ 成为 $G$ 的覆盖群.

证明：a) 留作作业

b) 设 $a_1'$. $a_2' \in G'$, $\gamma_1$. $\gamma_2$ 是从 $1'$ 到 $a'$. $b'$ 的两条道路

定义 $\delta: I \to G$, $t \mapsto \pi(\gamma_1(t)) \cdot \pi(\gamma_2(t))$. 根据覆盖空间的道路提升性质. 存在 $\delta$ 的唯一提升 $\delta': I \to G'$. 使得 $\delta'(0) = 1'$. $\pi \circ \delta' = \delta$. 定义 $a_1' \cdot a_2' = \delta'(1)$. 则可证明这个 $\delta'(1)$ 不依赖于道路 $\gamma_1$. $\gamma_2$ 的选取, 且这个乘法使 $G'$ 成为一个拓扑群. $G'$ 上有自然的解析流形结构. 进而可证明上述乘法使 $G'$ 成为 Lie 群 □

Date:
Place:

Reminders

Lie的第二结构定理. →

Date:
Place:

Reminders

定义. 若 $G$ 是 $H$ 的单连通复盖群. 则称 $G$ 是 $H$ 的万有覆盖群.

~~定理5. 设 $G$ 是单连通 Lie 群, $H$ 是连通 Lie 群, 其 Lie 代数分别为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$. 则对任一 Lie 代数同态 $\psi: \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$, 存在唯一的 Lie 群同态 $\varphi: G\to H$, 使得 $d\varphi=\psi$.~~
~~证明: 取 $K=G\times H$. $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$.~~

定理5. 设 $G_1, G_2$ 是连通 Lie 群, Lie 代数为 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$. $\lambda: \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ 为 Lie 代数同态, 则至多存在一个 Lie 群同态 $\varphi: G_1\to G_2$, 使得 $d\varphi=\lambda$. 若 $G_1$ 单连通. 则存在唯一的 Lie 群同态 $\varphi: G_1\to G_2$ 使 $d\varphi=\lambda$.

证明: 取 $G=G_1\times G_2$. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_2$ 为其 Lie 代数. 定义 $\mathfrak{h}=\{(v, \lambda(v)) \mid v\in\mathfrak{g}_1\}\subseteq\mathfrak{g}$. 因为 $\lambda$ 为同态, 所以 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 于是存在 $G$ 的子群 $H$ 定义 $\mathfrak{h}$. 假设 $\varphi: G_1\to G_2$ 是 Lie 群同态满足 $d\varphi=\lambda$, 则 $\sigma: g\mapsto(g, \varphi(g))$ 是 $G_1\to G$ 的 Lie 群同态, $d\sigma: \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ 是 Lie 代数同态. $d\sigma(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{h}$. 根据引理1, $\sigma(G_1)=H$. 即 $H$ 是 $\varphi$ 的图像. 因为 $\lambda$ 唯一决定 $H$. 所以 $\varphi$ 唯一.

若 $G_1$ 单连通, 令 $\gamma: G\to G_1$, $(g_1, g_2)\mapsto g_1$ 是 Lie 群同态.

作业：若 $G$ 是单连通 Lie 群，则任何覆盖 →
$\varphi: \tilde{G} \to G$ 都是 Lie 群同构.

作业：① 若 $G_1$ 是 $G_2$ 的覆盖群，则它们局部解析同构
② 若 $G_1, G_2$ 局部解析同构，则 $(d\omega)_1: T_1(G_1) \to T_1(G_2)$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1 = T_1(G_1)$ 到 $\mathfrak{g}_2 = T_1(G_2)$ 的同构.



于是 $d\gamma: (v_1, v_2) \mapsto v_1$ 是 Lie 代数同态. 设 $\tau = \gamma|_H$. 则 $d\tau = d\gamma|_{\mathfrak{h}}$ 根据 $\mathfrak{h}$ 的定义, $d\tau$ 显然是同构. 因此, $\tau: H \to G_1$ 是一个覆盖. 但 $G_1$ 是单连通的. 因此 $\tau$ 一定是同构. 记 $\tau^{-1} = \sigma$. 则 $\sigma$ 是 $G_1$ 到 $H$ 的解析同构. 其分量可写为 $\sigma(g) = (g, \varphi(g))$. $\varphi: G_1 \to G_2$ 成为一个解析同态. 不难验证 $d\varphi = \lambda$. □

推论：若 $G_1, G_2$ 单连通，且 $L(G) \cong L(H)$，则 $G \cong H$.
推论：连通 Lie 群的任何两个万有覆盖同构.

定义6. 设 $G_1, G_2$ 是两个 Lie 群. 我们说它们局部解析同构, 如果存在 $1_{G_1}$ 的开邻域 $U_1$ 与 $1_{G_2}$ 的开邻域 $U_2$ 以及微分同胚 $\omega: U_1 \to U_2$ 满足若 $x, y \in U_1$, 则 $x \cdot y \in U_1 \Leftrightarrow \omega(x)\omega(y) \in U_2$, 且此时有 $\omega(xy) = \omega(x)\cdot\omega(y)$.

由定义易知: 局部解析同构是等价关系, $G_1, G_2$ 局部解析同构当且仅当 $G_1^0, G_2^0$ 局部解析同构. 所以我们可以只考虑连通 Lie 群.

~~引理7. 若 $G_1$ 是 $G_2$ 的覆盖群, 则它们局部解析同构.~~

~~证明：设 $\omega: G_1\to G_2$ 为相应的覆盖映射，则 $d\omega$ 是切空间的同构，因此有 $1_{G_1}$ 的开邻域 $V_1$ 与 $1_{G_2}$ 的开邻域 $V_2$ 使得 $\omega: V_1\to V_2$ 是微分同胚。再选取 $U_1, U_2$ 满足 $U_i^{-1}=U_i$，$U_iU_i\subseteq V_i$，$\omega(U_1)=U_2$，则 $U_1, U_2, \omega$ 满足局部解析同构的定义。□~~

~~引理8. 设 $G_1, G_2$ 是连通Lie群，则 $G_1, G_2$ 局部解析同构 $\Leftrightarrow$ 存在单连通Lie群 $G$ 以及解析覆盖 $\omega_i: G\to G_i$.~~

~~证明：$\Rightarrow$ 设 $U_1, U_2, \omega$ 是局部解析同构定义中的开集和映射。设 $G$ 是 $G_1$ 的万有覆盖群，$\omega_1: G\to G_1$ 为相应的覆盖映射。~~

定理7. $G_1, G_2$ 局部解析同构 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_2$.

证明：$\Rightarrow$ 即作业②. $\Leftarrow$ 设 $G_1$ 的万有覆盖群为 $G$，$\omega_1: G\to G_1$ 为覆盖映射，于是 $G_1$ 与 $G$ 局部解析同构，且 $L(G_1)\cong L(G)=\mathfrak{g}_1$。设 $\lambda: \mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ 为同构映射，于是存在唯一的Lie群同态 $\omega_2: G\to G_2$，使得 $d\omega_2=\lambda$。因为 $\lambda$ 是同构，所以 $d\omega_2$ 在每个切空间上都是双射，所以 $\omega_2$ 是覆盖映射，于是 $G_2$ 与 $G$ 局部解析同构。□

推论：$G_1, G_2$ 局部解析同构 $\Leftrightarrow$ 存在单连通Lie群 $G$

Date:
Place:

Reminders

作业：若 $G=GL_n(\mathbb{R})$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$，则

$\exp:\mathfrak{g}\to G$ 即 $A\mapsto e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots$

(Ref GTM102. ~~Lem.~~ Lem 2.10.2)

(b).(c)都是群同态的推论. 所以只需证 a) →

Date:
Place:

Reminders

及覆盖映射 $\omega_i: G\to G_i$.

## §1.8 指数映射

定义1. 设 $G$ 是 Lie群，$\mathfrak{g}$ 是其 Lie 代数. 对 $\forall X\in\mathfrak{g}$，定义 $\lambda:\mathbb{R}\to\mathfrak{g}$，$t\mapsto tX$，则 $\lambda$ 是一个 Lie 代数同态 ($\mathbb{R}$ 视为交换 Lie 代数)，由上一节定理5. 注意 $\mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 上加法群的 Lie 代数. $\mathbb{R}$ 单连通. 于是存在唯一的 Lie 群同态 $\exp_X:\mathbb{R}\to G$，满足 $d\exp_X=\lambda$.

定义映射 $\exp:\mathfrak{g}\to G$，$X\mapsto\exp_X(1)$. 叫做 $G$ 的指数映射

引理2. 设 $X\in\mathfrak{g}$，则

(a) $\exp(tX)=\exp_X(t)$，$\forall t\in\mathbb{R}$.

(b) $\exp((t_1+t_2)X)=\exp(t_1X)\exp(t_2X)$，$\forall t_1,t_2\in\mathbb{R}$.

(c) $\exp(-tX)=(\exp(tX))^{-1}$ $\forall t\in\mathbb{R}$

证明[(a)]：定义两个映射 $\varphi:\mathbb{R}\to G$，$s\mapsto\exp_{tX}(s)$，$\psi:\mathbb{R}\to G$，$s\mapsto\exp_X(st)$. 它们都是 Lie 群同态. 且 $(d\varphi)(\frac{d}{ds})=tX$，$(d\psi)(\frac{d}{ds})=tX$. 所以 $d\varphi=d\psi$. 根据上一节定理5. $\varphi=\psi$. 于是 $\exp(tX)=\exp_{tX}(1)=\exp_X(t)$. □

作业：设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$ 为线性空间的直和. 证明在每个 $0\in\mathfrak{g}_i$ 附近存在开集 $B_i$, 以 $1\in G$ 附近存在开集 $U$, 使得 $\varphi: B_1\times\cdots\times B_k\to U$, $(Z_1,\cdots,Z_k)\mapsto\exp(Z_1)\cdots\exp(Z_k)$ 是解析微分同胚.

(Ref GTM 102, Thm 2.10.1.)

~~定理：设 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是指数映射. $X_1,\dots,X_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基.~~

~~a) 存在 $a>0$ 使得 $I_a^n\to G$, $(t_1,\dots,t_n)\mapsto\exp(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)$ 是 $I_a^n$ 到 $\varphi(I_a^n)$ 的微分同胚.~~

~~b) 存在 $a>0$, 使得 $\psi: I_a^n\to G$, $(t_1,\dots,t_n)\mapsto\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_nX_n)$ 是 $I_a^n$ 到 $\psi(I_a^n)$ 的微分同胚.~~

~~c) 存在 $\mathfrak{g}$ 中 0 附近的开集 $U$ 使得 $\exp: U\to\exp(U)$~~

定理3. $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是解析映射, 且是 $(\mathfrak{g},0)$ 到 $(G,1)$ 的局部微分同胚.

证明：在 $1\in G$ 附近取坐标系 $(U,(x^1,\dots,x^n))$ 使得 $x^i(1)=0$. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基, 且在 $U$ 上有表达式 $(X_i)_y=F_i^j(y)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_y$. 考虑映射 $t\mapsto\exp(t(a_1X_1+\cdots+a_nX_n))$, 其中 $a_1,\dots,a_n$ 为固定的参数. 则它是微分方程 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_1^1(y)&\cdots&F_n^1(y)\\ \vdots&&\vdots\\ F_1^n(y)&\cdots&F_n^n(y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 的解. 根据解析微分方程的存在定理 (Ref GTM 102, §1.4) 这个方程的解是唯一的, 且解析依赖 $t, a_1,\dots,a_n$. 所以 $(a_1,\dots,a_n)\mapsto\exp(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)$ 局部上在 $0\in\mathfrak{g}$ 附近是解析的. 又因为 $\exp(X)=(\exp\frac{1}{k}X)^k$, 总存在 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $\exp(\frac{1}{k}X)$ 解析, 于是 $\exp(X)$ 解析. □

定理4. (a) 设 $\varphi: G_1\to G_2$ 是 Lie 群同态, 则下图交换

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\exp} \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g}_2 \end{array}$$

即 $\exp\circ d\varphi = \varphi\circ\exp$

特别地, $d\varphi(X)=0 \iff \forall t\in\mathbb{R}$ ~~exp(tX)~~ $\varphi\circ\exp(tX)=1$.

(b) 设 $H$ 是 $G$ 的 Lie 子群, $L(G)=\mathfrak{g}$. ~~…~~ $H$ 在 $\mathfrak{g}$ 中定义的子代数为 $\mathfrak{h}$. 则 $X\in\mathfrak{h} \iff \forall t\in\mathbb{R}$, $\exp(tX)\in H$.

证明: (a) 设 $f:\mathbb{R}\to G_2$, $t\mapsto \exp(d\varphi(tX))$

$g:\mathbb{R}\to G_2$, $t\mapsto \varphi(\exp(tX))$.

则 $f$, $g$ 都是 Lie 群同态, 且有 $(df)(\frac{d}{dt})=(d\varphi)(X)=(dg)(\frac{d}{dt})$. 所以 $f=g$. 于是 $\exp(d\varphi(X))=f(1)=g(1)=\varphi(\exp(X))$.

(b) ~~若 $X\in\mathfrak{h}$, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}$, $\exp(tX)\in H$~~ 设 $H$ 的 Lie 代数为 $\tilde{\mathfrak{h}}$. $i:H\hookrightarrow G$ 为嵌入. 则由(a)知 对 $\forall \tilde{X}\in\tilde{\mathfrak{h}}$, 有 $i(\exp(t\tilde{X}))=\exp(t\,di(\tilde{X}))$. 所以若 $X\in\mathfrak{h}$, 则存在 $\tilde{X}\in\tilde{\mathfrak{h}}$ 满足 $X=di(\tilde{X})$. 于是 $\exp(tX)=i(\exp(t\tilde{X}))\in H$. 反之, 若对 $\forall t\in\mathbb{R}$, $\exp(tX)\in H$. 因为 $H\hookrightarrow G$ 是拟正则的, 所以映射 $\psi:\mathbb{R}\to H$, $t\mapsto\exp(tX)$ 是解析同态. 设 $d\psi(\frac{d}{dt})=\tilde{X}\in\tilde{\mathfrak{h}}$, 则有 ~~$X=(di)(X)$~~ $\exp(tX)=i(\exp(t\tilde{X}))$. 于是 $X=(di)(\tilde{X})\in\mathfrak{h}$. □

定理5. 设 $G$ 是 Lie 群, $\alpha:\mathbb{R}\to G$ 是连续同态, 则 $\alpha$ 解析.

证明: 在 $0\in\mathfrak{g}$ 附近取小开区间 $I_a^n$ 满足 $\exp: I_a^n\to\exp(I_a^n)$

ate:
lace:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

是微分同胚. 再设 $\alpha^{-1}(\exp(I_a^n))=(-b,b)$. 于是对于 $t\in(-b,b)$ 存在唯一的 $X_t\in I_a^n$ 使得 $\alpha(t)=\exp(X_t)$. 记 $X_t=\beta(t)$. 下面考虑 $\beta$ 的性质. 对于 $t\in(-b,b)$, $n\in\mathbb{N}$ 满足 $nt\in(-b,b)$, 有 $\alpha(nt)=(\alpha(t))^n$. 于是 $\exp(\beta(nt))=(\exp(\beta(t)))^n=\exp(n\beta(t))$. 所以 $\beta(nt)=n\beta(t)$. 将 $t$ 换为 $\frac{t}{n}$, 则有 $\beta(\frac{t}{n})=\frac{1}{n}\beta(t)$. 将 $t$ 换为 $mt$, 则有 $\beta(\frac{m}{n}t)=\frac{m}{n}\beta(t)$. 所以对任何 $q\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$, $t\in(-b,b)$, 有 $\beta(qt)=q\beta(t)$. 另外利用 $\alpha(-t)=\alpha(t)^{-1}$ 不难证明 $\beta(-t)=-\beta(t)$. 于是对任意 $q\in(-1,1)\cap\mathbb{Q}$, 有 $\beta(qt)=q\beta(t)$. 因为 $\beta$ 连续, 所以 $\beta(t)=tX$. 这里 $X=\frac{2}{b}\beta(\frac{b}{2})$. 所以局部解析. 因此, $\alpha$ 局部解析. 又因为 $\alpha$ 是群同态, $\mathbb{R}$ 可由 $(-b,b)$ 生成, 所以 $\alpha$ 整体解析. □.

推论: 设 $G_1, G_2$ 是 Lie 群. $\pi: G_1\to G_2$ 是连续同态. 则 $\pi$ 解析.

证明: 设 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是 $G_1, G_2$ 的 Lie 代数. $X_1\cdots X_n$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的基. 定义映射 $\eta_i:\mathbb{R}\to G_2$, $t\mapsto\pi(\exp tX_i)$. 则 $\eta_i$ 是连续同态. 因此是解析同态. 于是映射 $\varphi:(t_1\cdots t_n)\mapsto\eta_1(t_1)\cdots\eta_n(t_n)$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 到 $G_2$ 的解析映射. 另一方面, 在 $1\in G_1$ 附近存在坐标系 $(t_1\cdots t_m)$, 使得 $\psi:(t_1\cdots t_m)\mapsto\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_nX_n)$ 是局部解析同构. 于是 $\pi(g)=\varphi(\psi^{-1}(g))$ 在 $1\in G_1$ 附近解析. 于是 $\pi$ 整体解析. □.

Date:
Place:

Reminders

推论：设 $g\in G$. $X_1,\cdots,X_s\in\mathfrak{g}$. $f\in C^\infty(G,g)$.

则 $(X_1\cdots X_s f)(g)$

$$=\left.\frac{\partial^s}{\partial t_1\cdots\partial t_s}f(g\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_sX_s))\right|_{t_1=\cdots=t_s=0}$$

(Ref GTM 107 Lemma 2.12.2)

Date:
Place:

Reminders

推论：拓扑群上至多存在一个Lie群结构.

定理6 (Cartan) 设 $G$ 是 Lie群. $H$ 是 $G$ 的闭子群. 则 $H$ 是 Lie子群.

要证明这定理，我们首先证明一些关于指数映射的恒等式.

引理7. 设 $G$ 是 Lie群，$g\in G$，$\mathfrak{g}$ 是其 Lie代数，$X\in\mathfrak{g}$. $f\in C^\infty(G,g)$.

则 $(X^k f)(g)=\left(\frac{d^k}{dt^k}f(g\exp tX)\right)_{t=0}$. 且，若 $f$ 解析，则对充分小的 $t$，有

$f(g\exp tX)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}f(g;X^n)$. 其中 $f(g;X^n)=(X^n f)(g)$.

证明：因为 $t\mapsto\exp_X(t)$ 是 $G$ 上过 $1$ 的 $X$ 的积分曲线. 因为 $X$ 左不变.

所以 $t\mapsto g\exp_X(t)=g\exp(tX)$ 就是过 $g$ 的 $X$ 的积分曲线

所以有 $(Xf)(g)=\frac{d}{dt}(f(g\exp(tX)))|_{t=0}$. 下面我们要证明一个

更一般的恒等式 $f(g\exp(tX);X^k)=\frac{d^k}{dt^k}f(g\exp(tX))$.

首先 $k=0$ 时显然成立. 假设 $k$ 时成立. 我们考虑 $k+1$ 的情况：

$f(g\exp(tX);X^{k+1})=(X^{k+1}f)(g\exp(tX))$

$=X(X^k f)(g\exp(tX))=\frac{d}{ds}\left((X^k f)(g\exp((t+s)X))\right)\Big|_{s=0}$

$=\frac{d}{dt}\left((X^k f)(g\exp(tX))\right)=\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}f(g\exp(tX))$ $\square$

下面考虑更一般的Taylor公式. 对于正整数 $s$. 以及 $X_1\cdots X_s\in\mathfrak{g}$.

将 $DO(G)$ 中的元素 $\frac{1}{n!}(t_1X_1+\cdots+t_sX_s)^n$ 展开可得

$$\frac{1}{n!}(t_1X_1+\cdots+t_sX_s)^n=\sum_{n_1\cdots n_s\geq 0}X(n_1,\cdots,n_s)\frac{t_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{t_s^{n_s}}{n_s!}$$

其中 $X(n_1\cdots n_s)$ 是展开系数，简记为 $X(\vec{n})$. 注意 $DO(G)$ 中元素的乘法是不交换的. 所以 $X(\vec{n})$ 可以很复杂. 另外我们记

$f(g;X(\vec{n}))=(X(\vec{n})f)(g)$.

引理 8 设 $g\in G$. $f\in C^\omega(G,g)$ $X_1\cdots X_s\in\mathfrak{g}$. 则

$$f(g\exp(t_1X_1+\cdots+t_sX_s))=\sum_{n_1,\cdots,n_s\geq 0}f(g;X(\vec{n}))\frac{t_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{t_s^{n_s}}{n_s!}.$$

在充分小的邻域 $I_a^s$ 上绝对一致收敛.

证明: 因为 $f(g\exp(t_1X_1+\cdots+t_sX_s))$ 关于 $t_1\cdots t_s$ 解析. 所以必然存在 $I_a^s$, 使得对 $\forall(t_1\cdots t_s)\in I_a^s$,

$$f(g\exp(t_1X_1+\cdots+t_sX_s))=\sum_{n_1\cdots n_s\geq 0}\left(\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_s}}{\partial t_1^{n_1}\cdots\partial t_s^{n_s}}f(g\exp(t_1X_1+\cdots+t_sX_s))\right)_{t=0}\frac{t_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{t_s^{n_s}}{n_s!}$$

现在考虑函数 $u: t\mapsto f(g\exp(t(t_1X_1+\cdots+t_sX_s)))$, 由引理 7, 有

$\frac{1}{k!}u^k(0)=\left(\frac{1}{k!}(t_1X_1+\cdots+t_sX_s)^k f\right)(g\exp(t_1X_1+\cdots+t_sX_s))$. 另外. 直接展开得

$$\frac{1}{k!}u^{(k)}(0)=\sum_{\substack{n_1\cdots n_s\geq 0\\ n_1+\cdots+n_s=k}}\left(\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_s}}{\partial t_1^{n_1}\cdots\partial t_s^{n_s}}f(g\exp(t_1X_1+\cdots+t_sX_s))\right)_{t=0}\frac{t_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{t_s^{n_s}}{n_s!}$$

两边比较系数即可得 $f(g;X(\vec{n}))=$ . □

引理 9: $s\geq 1$. $X_1\cdots X_s\in\mathfrak{g}$. 则对充分小的 $t$ 有

Date: ……
Place: ……

Reminders

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j = (X_1+\cdots+X_s)^2 + \sum_{i<j}[X_i, X_j] \longrightarrow$$

Date: ……
Place: ……

Reminders

$$\exp(t_1X_1)\cdots\cdots\exp(tX_s) = \exp\Big(t\sum_{1\le i\le s} X_i + \frac{t^2}{2}\sum_{1\le i<j\le s}[X_i, X_j] + O(t^3)\Big)$$

特别地,

i) $\exp tX\cdot\exp tY = \exp(t(X+Y)+\frac{t^2}{2}[X,Y]+O(t^3))$.

ii) $\exp(tX)\cdot\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY+t^2[X,Y]+O(t^3))$

iii) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) = \exp(t^2[X,Y]+O(t^3))$.

证明: 令$f$是$1\in G$附近的解析函数. 考虑函数

$F(t_1,\cdots,t_s) = f(\exp t_1X_1\cdots\exp(t_sX_s))$. 则对於充分小的 ~~$t_1\cdots$~~ $t$ $t_s$. 有

$$F(t,\cdots,t) = f(1) + t\sum_{i=1}^{s} f(1;X_i) + \frac{t^2}{2}\Big(\sum_{i=1}^{s} f(1;X_i^2) + 2\sum_{1\le i<j\le s} f(1;X_iX_j)\Big) + O(t^3)$$

下面取$\mathfrak g$的一组基 $\bar X_1\cdots\bar X_n$, 并取 $x_1\cdots x_n$ 为$1$附近的局部坐标, 使得 $x_i(\exp(a_1\bar X_1+\cdots+a_n\bar X_n)) = a_i$, 于是, 由引理可得

$$x_k(1;(a_1\bar X_1+\cdots+a_n\bar X_n)^m) = \begin{cases} c_k & m=1 \\ 0 & m>1 \end{cases}$$

设 $X_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\bar X_k$. $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} d_{ijk}\bar X_k$. 并取 $f = x_k$.

于是有 $x_k(\exp(tX_1)\cdots\exp(tX_s)) = t\sum_{i=1}^{s} x_k(1;X_i)$

$$+\frac{t^2}{2}\Big(\sum_{i=1}^{s} x_k(1;X_i^2) + 2\sum_{i<j} x_k(1;X_iX_j)\Big) + O(t^3)$$

$$= t\sum_{i=1}^{s} c_{ik} + \frac{t^2}{2}\sum_{i<j} d_{ijk} + O(t^3).$$

$$= x_k\Big(\exp\Big(t\sum_{i=1}^{s} X_i + \frac{t^2}{2}\sum_{i<j}[X_i, X_j] + O(t^3)\Big)\Big) \qquad \square.$$

推论: 对于 $X, Y\in\mathfrak g$. 有

i) $\exp(X+Y)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\exp\frac{X}{n}\exp\frac{Y}{n}\right)^n$.

ii) $\exp[X,Y]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\exp\frac{X}{n}\exp\frac{Y}{n}\exp\left(\frac{-X}{n}\right)\exp\left(\frac{-Y}{n}\right)\right)^{n^2}$.

证明(定理6)：设$\mathfrak{g}$是$G$的Lie代数. 定义

$\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\forall t\in\mathbb{R}.\ \exp(tX)\in H\}$

则$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的子代数. 这是因为 ① $0\in\mathfrak{h}$. ② 若$X\in\mathfrak{h}$, 则$\forall c\in\mathbb{R}$, $cX\in\mathfrak{h}$. ③ 若$X,Y\in\mathfrak{h}$. 则

$\exp(t(X+Y))=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\exp\frac{tX}{n}\exp\frac{tY}{n}\right)^n\in H$.

$\exp(t^2[X,Y])=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\exp\frac{tX}{n}\exp\frac{tY}{n}\exp\frac{-tX}{n}\exp\frac{-tY}{n}\right)^{n^2}\in H$.

$\exp(-t^2[X,Y])=\exp(t^2[X,Y])^{-1}\in H$.

所以$\mathfrak{h}$关于$+$和$[\,,\,]$都封闭. 因此是一个子代数.

记$H'$为$\mathfrak{h}$对应的连通Lie子群. 因为$\exp\mathfrak{h}$可生成$H'$. 所以$H'\subseteq H^0$. 接下来要证明$H'=H^0$. 那么, 因为$H$的所有连通分支都微分同胚于$H^0$, 则$H$是Lie子群. 要证明$H'=H^0$只要证明$H'$在$H^0$中开. 于是只要证明可找到$1$在$H$中的开邻域包含于$H'$.

在$\mathfrak{g}$中任选一个$\mathfrak{h}$的补子空间$\mathfrak{b}$. 于是取$\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$中以$0$为球心的开球$A$, $B$, 使得$\exp: A\times B\to G$是$A\times B$到$\exp(A\times B)$的解析微分同胚. 假设$H'$不包含$1$在$H$中的开邻域, 则存在序列$x_k\in H\setminus H'$. $x_k\to 1$. 根据$A$, $B$的取法. $x_k$总可写为$\exp X_k\exp Y_k$. 设$y_k=\exp Y_k$. 则$y_k\in H\setminus H'$. $y_k\to 1$. 特别地. $Y_k\neq 0$.

对每个 $Y_k$，可选一个整数 $r_k \geq 1$，使得 $r_k Y_k \in B$，$(r_k+1) Y_k \notin B$。$\{r_k Y_k\} \subseteq B$ 存在一个收敛子列。不妨设这个子列就是 $r_k Y_k$。记 $Z = \lim\limits_{k\to\infty} r_k Y_k$，那么 $Z \in \mathfrak{b}$，且 $Z \neq 0$。因为如果 $Z = 0$，则 $(r_k+1)Y_k = r_k Y_k + Y_k \to 0$，因此 $(r_k+1)Y_k \in B$（当 $k$ 充分大时），这与 $r_k$ 的取法矛盾。

我们断言，对 $\forall t \in \mathbb{R}$，有 $\exp(tZ) \in H$。因为 $H$ 闭，所以只需对 $t \in \mathbb{Q}$ 证明。于是只需证明对 $\forall p \in \mathbb{Z}$，$p \geq 1$，有 $\exp(\frac{1}{p} Z) \in H$。记 $r_k = s_k p + t_k$ 是 $r_k$ 关于 $p$ 的带余除法。则 $\exp(\frac{1}{p} r_k Y_k) = \exp(s_k Y_k) \cdot \exp(\frac{t_k}{p} Y_k)$。因为 $Y_k \to 0$，$0 \leq t_k \leq p$，所以 $\exp(\frac{t_k}{p} Y_k) \to 1$，所以 $\exp(s_k Y_k) \to \exp(\frac{1}{p} Z)$。另一方面，$\exp s_k Y_k = y_k^{s_k} \in H$。因为 $H$ 闭，所以 $\exp(\frac{1}{p} Z) \in H$。

根据上面的断言，$Z \in \mathfrak{h}$。但 $Z \in \mathfrak{b}$，$Z \neq 0$，这与 $\mathfrak{h}, \mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的直和分解矛盾。定理证完。 $\square$

## §1.9 伴随表示

设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数，对 $\forall X \in \mathfrak{g}$，定义 $ad_X: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，$Y \mapsto [X, Y]$

引理 1：$ad: \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ 是一个 Lie 代数同态。

证明：只要证明 $[ad_X, ad_Y] = ad_{[X,Y]}$，这等价于

$$[X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = [[X,Y],Z]$$ $\square$

Date:
Place:

Reminders

作业：证明 $Ad: G \to GL(\mathfrak{g})$ 是 Lie 群间的解析同态.

(Ref GTM102. Lem 2.13.1)

作业：证明：对 $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$，有

$\exp(tX)\exp(Y)\exp(-tX) = \exp(Y + t[X,Y] + O(t^2))$.

Date:
Place:

Reminders

ad 称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示.

设 $G$ 是 Lie 群，$g \in G$. 定义 $C_g: G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$.

则 $C_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$ 是 $G$ 的自同构，于是诱导了 $\mathfrak{g}$ 的自同构 $Ad_g = dC_g: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. 于是 $Ad: G \to GL(\mathfrak{g})$ 给出 $G$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的一个表示，称为 $G$ 的伴随表示.

定理7. 设 $G$ 是 Lie 群，$\mathfrak{g}$ 是其 Lie 代数，则对 $\forall X \in \mathfrak{g}$，有

$$Ad(\exp X) = e^{ad_X}.$$

证明：设 $d(Ad) = \lambda: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. 则由图的交换性

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Ad"] & GL(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\lambda"] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

知：$Ad(\exp X) = e^{\lambda(X)}$，所以只需证明 $d(Ad)(X) = ad_X$.

~~根据 Ad 的定义 $Ad_g(Y) = \frac{d}{dt}(g\exp(tY)g^{-1})|_{t=0}$~~

$\cancel{(d(Ad)(X))(Y) = \frac{d}{ds}(Ad_{\exp(sX)}(Y))|_{s=0} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(\exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX))|_{t=s=0}}$

根据 Ad 的定义. $Ad_g(Y) = \frac{d}{dt}(g\exp(tY)g^{-1})|_{t=0}$.

于是 $(d(Ad)(X))(Y) = \frac{d}{ds}(Ad_{\exp(sX)}(Y)) = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(\exp(sX)\exp(tY)\exp(-sX))|_{s=t=0}$ 作业.

$= \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}[\exp(tY + st[X,Y] + O(s^2))]|_{s=t=0} = [X,Y]$

$= ad_X(Y)$. □

$\mathfrak{h}$ 叫 $\mathfrak{g}$ 的理想，若对 $\forall X\in\mathfrak{h}$, $Y\in\mathfrak{g}$ 有 $[X,Y]\in\mathfrak{h}$. →

期末报告题之二：余伴随轨道与表示。

1. 辛流形，Poisson 流形，辛叶子的定义
2. 辛变换，Lie群在辛(或Poisson)流形上的作用，矩映射 (Hamilton 作用)
3. $\mathfrak{g}^*$ 上的 Poisson 结构，$Ad^*$ 是 $G$ 在 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Hamilton 作用。
   $Ad^*$ 的轨道是 $\mathfrak{g}^*$ 的辛叶子。
4. ~~G的不可约表示与Ad*~~ 若 $G$ 是紧的，证明
   $G$ 的不可约表示与 $Ad^*$ 的整的轨道一一对应。

Ref Kirillov «Lectures on Orbit method».

See also: S.K. Donaldson 的
«Lectures on Lie groups and geometry».

Date:
Place:
Reminders

定理2. 设 $H$ 是连通 Lie 群 $G$ 的连通 Lie 子群，$\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}$ ...
则 $H$ 是正规子群 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想。

证明：若 $H$ 正规，则对 $\forall X\in\mathfrak{h}$, $g\in G$, 有 $g\exp(tX)g^{-1}\in H$.
于是 $Ad_g(X)=\frac{d}{dt}(g\exp(tX)g^{-1})|_{t=0}\in\mathfrak{h}$. 再取 $g=\exp tY$, $Y\in\mathfrak{g}$
再求导得 $ad_Y(X)\in\mathfrak{h}$，即 $[X,Y]\in\mathfrak{h}$. 于是 $\mathfrak{h}$ 是理想。

反之，若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，取 $X\in\mathfrak{h}$, $\forall Y\in\mathfrak{g}$, 记 $g=\exp Y$.
则 $g\exp(X)g^{-1}=\exp Ad_g(X)=\exp(X+[Y,X]+\frac{1}{2}[Y,[Y,X]]+\cdots)$
因为 $X\in\mathfrak{h}$，所以 $X+[Y,X]+\frac{1}{2}[Y,[Y,X]]+\cdots\in\mathfrak{h}$. 所以
$g\exp(X)g^{-1}\in H$. 因为 $G$, $H$ 连通，所以它们可由形如 $\exp Y$, $\exp X$ 的元素生成，所以 $H$ 是正规子群。□

定理3. 设 $G$ 是连通 Lie 群，其中心为 $Z$，则 $Z=\ker Ad$.

证明：设 $g\in Z$, $X\in\mathfrak{g}$, 则 $\exp(tX)=g\exp(tX)g^{-1}$
$=\exp(t\,Ad_g(X))$. 再对 $t$ 求导得 $Ad_g(X)=X$. 所以 $g\in\ker(Ad)$.

反之，若 $g\in\ker(Ad)$，则 $g$ 与 $1\in G$ 的某开邻域中所有元素交换，因为 $G$ 连通，所以 $g$ 与 $G$ 中元素(所有)交换，于是 $g\in Z$. □

推论：设 $G$ 连通，$Z$ 是 $G$ 的中心，则 $Z$ 是 $G$ 的闭子群，
其 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$ 的中心。

证明：留作作业。

证明留作作业.



推论：连通Lie群是交换的 $\Longleftrightarrow$ 其Lie代数交换. 此时指数映射 $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是覆盖同态. 若$G$单连通, 则$G \cong \mathfrak{g}$. 换言之, 每个连通交换Lie群都是$\mathfrak{g}/\Gamma$, 其中$\Gamma$是$\mathfrak{g}$的离散子群.

~~定理4. 设$G$是Lie群, $\mathfrak{g}$是其Lie代数, $X \in \mathfrak{g}$, 则~~

$$\cancel{(d\exp)_X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\mathrm{ad}_X)^n}$$

## §1.10 Baker-Campbell-Hausdorff公式.

我们前面已证明, $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3))$. 所以若$[X,Y] \neq 0$, 一般来说, $\exp(X)\exp(Y) \neq \exp(X+Y)$. 但另一方面, 因为$\exp$是局部微分同胚, 所以存在$0 \in \mathfrak{g}$的邻域$U$, 使得对任意的$X, Y \in U$, 存在$A(X,Y) \in \mathfrak{g}$, 使得$\exp X \exp Y = \exp A(X,Y)$. BCH公式就是映射$A: U \times U \to \mathfrak{g}$的一个具体表达式.

引理1. 设$V$是一个Banach空间, $E = \mathrm{End}(V)$, 赋以算子范数. $F_a = \{ f(z) \mid f 在 |z| < a 上解析 \}$. 对于$\varphi \in F_a$, 记

$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi) z^n$. 则对任意$L \in E$, 满足$\|L\| < a$, 以及$\varphi \in F_a$,

$\varphi(L) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi) L^n$ 在$E$中绝对收敛, 且映射$\varphi \mapsto \varphi(L)$是一个$F_a$到$\mathrm{End}(V)$的环同态.

由引理若 $\varphi\in F_a$ 在 $\{|z|<a\}$ 上处处非零，则 $\varphi(L)$ 可逆，且 $(\varphi(L))^{-1}=(1/\varphi)(L)$.

设 $G$ 是 Lie 群，$\mathfrak{g}$ 是其 Lie 代数，在 $\mathfrak{g}$ 上赋以一个范数使其成为 Banach 空间。对于 $\varepsilon>0$，设 $\mathfrak{g}_\varepsilon=\{Z\in\mathfrak{g}\mid \|Z\|<\varepsilon\}$. 取 $\xi>0$，使 $\exp:\mathfrak{g}_\xi\to\exp(\mathfrak{g}_\xi)$ 是解析微分同胚。再取 $0<\eta<\xi$，使 $(\exp(\mathfrak{g}_\eta))^2\subseteq\exp(\mathfrak{g}_\xi)$，于是 $A:\mathfrak{g}_\eta\times\mathfrak{g}_\eta\to\mathfrak{g}_\xi$ 是一个解析映射.

对于 $X,Y\in\mathfrak{g}$ ~~定义 $Z(u,v;X,Y)=A(uX,vY)$. 于是 $Z(\cdot,\cdot;X,Y)$ 是 $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ 附近的解析映射. 对于 $(u,v)$ 满足 $\|uX\|<\eta$, $\|vY\|<\eta$ 有 $\exp(uX)\exp(vY)=\exp Z(u,v;X,Y)$.~~

设 $F(t;X,Y)=A(tX,tY)$，则 $F$ 在 $t=0$ 附近解析，定义

$$C_n(X,Y)=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dt^n}F(t;X,Y)\right)_{t=0}\quad n\geq 0.$$

则 $F(t;X,Y)=\sum_{n=0}^{\infty}t^nC_n(X,Y)$. 在 $|t|$ 充分小的邻域上绝对收敛。根据之前的引理，有 $C_0=0$, $C_1=X+Y$, $C_2=\frac{1}{2}[X,Y]$. 下面我们要给出一般的 $C_n$ 的公式.

引理2. 设 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是指数映射. 对于 $X\in\mathfrak{g}$，$(d\exp)_X:T_X\mathfrak{g}\to T_{\exp X}(G)$，将 $T_X\mathfrak{g}$ 等同于 $\mathfrak{g}$，$T_{\exp X}(G)$ 左平移至 $T_eG\cong\mathfrak{g}$，则 $(d\exp)_X$ 可视为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的映射.

Date:
Place:
Reminders

我们有 $(d\exp)_X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \mathrm{ad}_X^n$.

证明：根据定义，$(d\exp)_X(Y) = \frac{d}{dt}\left(\exp(-X)\exp(X+tY)\right)_{t=0}$.

设 $f \in C^{\omega}(G,1)$. $F(u,v,w) = f(\exp(uX)\exp(vX+wY))$.

则 $F$ 解析，设其展开式为 $F(u,v,w) = \sum_{p,q,r\geq 0} F_{p,q,r} \frac{u^p}{p!} \cdot \frac{v^q}{q!} \cdot \frac{w^r}{r!}$.

则 $\frac{\partial F}{\partial w}(u,v,0) = \sum_{p,q\geq 0} \frac{F_{p,q,1}}{p!\,q!} u^p v^q$.

$$\frac{\partial F}{\partial w}(-s,s,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} t^n, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} F_{k,n-k,1}.$$

另一方面，$F(u,v,w) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,q!} \left((uX)^p (vX+wY)^q f\right)(1_G)$.

于是 
$$\frac{\partial F}{\partial w}(u,v,0) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(uX)^p}{p!\,q!} \sum_{i=0}^{q-1} \left((vX)^i Y (vX)^{q-1-i} f\right)(1_G)$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{u^p v^q}{p!\,(q+1)!} \sum_{i=0}^{q} \left(X^{p+i} Y X^{q-i} f\right)(1_G).$$

所以 $F_{p,q,1} = \frac{1}{(q+1)} \sum_{i=0}^{q} X^{p+i} Y X^{q-i}(f)(1_G)$. 于是

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=0}^{n-k} X^{k+i} Y X^{n-k-i} f(1_G)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} \sum_{l=k}^{n} X^l Y X^{n-l} f(1_G)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} X^l Y X^{n-l} \left(\sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{n+1}{k}\right) f(1_G)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} X^l Y X^{n-l} f(1_a)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \mathrm{ad}_X^n(Y) f(1_a).$$

所以 $(d\exp)_{sX}(Y)(f) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} s^n \cdot \mathrm{ad}_X^n(Y)(f)$.

于是 $(d\exp)_X = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \mathrm{ad}_X^n$. □

设 $g(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n$. 于是 $(d\exp)_X = g(\mathrm{ad}_X)$.

设 $f(z) = \frac{1}{g(z)} - \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\left[\frac{e^z+1}{e^z-1}\right] = \sum_{k\geq 0} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$.

引理3. 设 $F(t;X,Y) = A(tX,tY)$. 则

$$\frac{dF}{dt} = f(\mathrm{ad}F)(X+Y) + \frac{1}{2}[X-Y, F], \quad F(0;X,Y)=0.$$

证明: 设 $Z(u,v) = A(uX, vY)$ 则 $\exp(uX)\exp(vY) = \exp Z(u,v)$

因为 $F = Z(t,t)$. 所以 $\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial Z}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial v}\right)\Big|_{u=v=t}$.

考虑映射 $v \mapsto \exp(uX)\exp(vY) = \exp Z(u,v)$ 的导数. 则有

$Y = (d\exp)_{Z(u,v)}\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right) = g(\mathrm{ad}_Z)\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial v} = f(\mathrm{ad}_Z) Y + \frac{1}{2}[Z, Y]$.

类似地, 考虑映射 $u \mapsto \exp(-vY)\exp(-uX) = \exp(-Z(u,v))$

的导数则可得 $\frac{\partial Z}{\partial u} = f(\mathrm{ad}_Z)(X) - \frac{1}{2}[Z, X]$. 相加即得结论. □

留作作业. 并由此计算 $C_2, C_3, C_4, C_5$ →

Ref GTM 102. Lem 2.15.3.

引理4. $F(t)$ 的 Taylor 系数 $C_n$ 可由如下递推公式给出:

$$(n+1)C_{n+1} = \frac{1}{2}[X-Y, C_n] + \sum_{\substack{p\geq 1\\ 2p\leq n}} \frac{B_{2p}}{(2p)!} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{2p}>0\\ k_1+\dots+k_{2p}=n}} [C_{k_1},[C_{k_2},\dots,[C_{k_{2p}}, X+Y]\cdots]] \qquad C_1 = X+Y.$$

定理5 (BCH公式). 设 $G$ 是 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 是其 Lie 代数, 对于 $X, Y\in\mathfrak{g}$. 定义 $C_1 = X+Y$. $C_n\ (n>1)$ 由引理4中公式给出, 则对充分小的开集 $U\subseteq\mathfrak{g}$, $0\in U$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 绝对收敛, 且其和给出映射 $A(X,Y)$.

证明: 只需证收敛性. 首先 $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是连续双线性变换. 因此存在 $M>0$. 使得对 $\forall X, Y\in\mathfrak{g}$, 有 $\|[X,Y]\|\leq M\cdot\|X\|\cdot\|Y\|$

设 $\alpha = \max(\|X\|,\|Y\|)$. 则由 $C_n$ 的递推关系, 有

$$(n+1)\|C_{n+1}\| \leq M\alpha\|C_n\| + 2\alpha\sum_{\substack{p\geq 1\\ 2p\leq n}} \frac{|B_{2p}|}{(2p)!} M^{2p} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{2p}>0\\ k_1+\dots+k_{2p}=n}} \|C_{k_1}\|\cdots\|C_{k_{2p}}\|.$$

设 $b_n = \|C_n\|/M^{n-1}(2\alpha)^n$. 则 $b_1\leq 1$

$$(n+1)b_{n+1} \leq \frac{1}{2}b_n + \sum_{\substack{p\geq 1\\ 2p\leq n}} \frac{|B_{2p}|}{(2p)!} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{2p}>0\\ k_1+\dots+k_{2p}=n}} b_{k_1}\cdots b_{k_{2p}}.$$

设 $\gamma_1 = 1$. $(n+1)\gamma_{n+1} = \frac{1}{2}\gamma_n + \sum_{\substack{p\geq 1\\ 2p\leq n}} \frac{|B_{2p}|}{(2p)!} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_{2p}>0\\ k_1+\dots+k_{2p}}} \gamma_{k_1}\cdots\gamma_{k_{2p}}$.

则 $\gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n z^n$ 满足方程

Date:
Place:
Reminders

期末报告选题之三. Lie的变换群理论.
Ref GTM102. §2.16.

Date:
Place:
Reminders

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{2}\gamma(z) + 1 + \sum_{p\geq 1} \frac{|B_{2p}|}{(2p)!}\gamma(z)^{2p} \qquad \gamma(0)=0.$$

注意右边是$\gamma(z)$的解析函数，所以在$\{|z|<\delta\}$上有解析解$\gamma(z)$. 由$\gamma_n$的定义易知 $\delta_n \leq \gamma_n$，所以收敛. $\square$

BCH公式说明G在1附近的乘法完全由$\mathfrak{g}$的Lie括号决定. 由此可给出Lie的第三定理的局部版本的另一个证明.

作业：证明BCH公式有如下积分形式

$$A(X,Y) = X + \left(\int_0^1 \psi\left(e^{\mathrm{ad}X} e^{t\,\mathrm{ad}Y}\right) dt\right) Y.$$

其中 $\psi(z) = \frac{z\log z}{z-1}$.

(Ref Shlomo Sternberg 的 Lie algebras 讲义.)

## Ch 2. Lie代数

### §2.1 定义

定义1. (a). 设 $k$是一个交换环且有单位(例如 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$等). $A$是一个$k$模. 若给定一个 $k$-双线性运算 $\mu: A\times A\to A$. 则称$A$为一个$k$代数.

(b). 对于 $I\subseteq A$, $J\subseteq A$. 定义 $\mu(I,J)=\{\mu(x,y)\mid x\in I, y\in J\}$.

若 $I$是$A$的子模，且满足 $\mu(I,A)\subseteq I$，则称$I$为$A$的左理想.

(或 $\mu(A,I)\subseteq I$) (或右)

Der $A$ 是一个 $k$ 模. $\begin{cases} \delta\in \mathrm{Der}A,\ k\delta\in \mathrm{Der}A \\ \delta_1,\delta_2\in \mathrm{Der}A,\ \delta_1+\delta_2\in \mathrm{Der}A \end{cases}$ →

我们总假设 结合代数有单位, 即存在 $1\in A$, $1\neq 0$, → 使得对 $\forall x\in A$, 有 $\mu(x,1)=\mu(1,x)=x$.



若 $I$ 既是左理想 又是右理想, 则称 $I$ 为 $A$ 的双边理想.

c) 设 $I$ 是 $A$ 的双边理想, 则商模 $A/I$ 上可定义运算

$\bar{\mu}(x+I,\ y+I)=\mu(x,y)+I$.

$(A/I,\bar{\mu})$ 叫做 $(A,\mu)$ 关于 $I$ 的商代数.

d) 设 $\delta: A\to A$ 是 $k$ 模同态, 若对 $\forall x,y\in A$,

$\delta(\mu(x,y))=\mu(\delta x,y)+\mu(x,\delta y)$.

则称 $\delta$ 为 $(A,\mu)$ 的一个导子, 所有导子的全体记为 Der $A$.

定义2 c). 设 $A$ 是一个 $k$ 代数, 其代数运算记为 $[\,,\,]: A\times A\to A$.

若 i) $[x,x]=0$, $\forall x\in A$, ii) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$, $\forall x,y,z\in A$.

则称 $(A,[\,,\,])$ 为一个 Lie 代数.

a) 设 $A$ 是一个 $k$ 代数, 其代数运算记为 $\cdot: A\times A\to A$.

若 $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$, 则称 $(A,\mu)$ 为结合代数.

~~若 $x\cdot y=y\cdot x$ 则称 $(A,\mu)$ 为交换代数~~ 交换代数

~~$k$ 上结合代数的全体~~ b) 设 $(A,\mu)$ 为结合代数, 若 $x\cdot y=y\cdot x$ 则称之为

d). 设 $A,B$ 是两个 $k$ 代数 (结合或 Lie), ~~[illegible]~~ $\varphi: A\to B$ 是一个

$k$ 模同态. 若 $\varphi(\mu_A(x,y))=\mu_B(\varphi(x),\varphi(y))$, $\forall x,y\in A$, 则称 $\varphi$

为一个 $k$ 结合或 Lie) 代数同态. (结合时还要求 $\varphi(1_A)=1_B$).

e) $k$ (交换) 结合代数及其同态构成的范畴记为 $Ass_k$. ($Comm_k$)

$k$-Lie 代数及其同态构成的范畴记为 $Lie_k$.

函子性: $A \xrightarrow{\varphi} B$, 则 $L(\varphi): L(A)\to L(B)$ 是 $\longrightarrow$
Lie代数同态.

作业: ① 证明右边的 $[\,,\,]$ 的确是Lie括号.
② $A$ 是理想, $B$ 是子代数
③ $\mathfrak{g}/A \cong B$.



例: ① 设 $A$ 是任一 $k$ 模. 定义 $[\,,\,]: A\times A\to A$, $(x,y)\mapsto 0$.
则 $A$ 是一个 Lie 代数. 这样的Lie代数称为交换Lie代数.

② 设 $A$ 是任一 $k$ 代数. $\mathrm{Der}A$ 是其导子构成的 $k$ 模. 在 $\mathrm{Der}A$ 上定义 $[\delta_1,\delta_2]=\delta_1\circ\delta_2-\delta_2\circ\delta_1$. 则 $(\mathrm{Der}A,[\,,\,])$ 是Lie代数.

③ 若 $A$ 本身是Lie代数, 则对 $\forall x\in A$, $ad_x: y\mapsto [x,y]$ 是一个导子. $ad: A\to \mathrm{Der}A$ 是一个 Lie 代数同态.

④ 若 $A$ 是结合代数, 则 $[\,,\,]: (x,y)\mapsto x\cdot y-y\cdot x$ 使 $A$ 成为一个Lie代数. 这一构造给出 $Ass_k$ 到 $Lie_k$ 的一个函子, 记为 $L$.

⑤ 若 $A$ 是Lie代数, $I$ 是一个理想, 则 $A/I$ 也是Lie代数.

⑥ 若 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一族Lie代数, 则 $\prod_{i\in I} A_i$ 也是Lie代数.

⑦ 设 $A, B$ 是Lie代数, $\varphi: B\to \mathrm{Der}(A)$ 是Lie代数同态. 定义
$\mathfrak{g}=A\oplus B$, $[x_1\oplus y_1,\ x_2\oplus y_2]=\big([x_1,x_2]+\varphi(y_1)(x_2)-\varphi(y_2)(x_1)\big)\oplus[y_1,y_2]$.
则 $(\mathfrak{g},[\,,\,])$ 是Lie代数, 且 $A$ 是 $\mathfrak{g}$ 的双边理想, $B$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数.
$\mathfrak{g}/A\cong B$. $\mathfrak{g}$ 叫做 $A, B$ 的半直积, 记为 $\mathfrak{g}=A\rtimes_{\varphi} B$.

反之, 若 $\mathfrak{g}$ 有理想 $A$, 子代数 $B$, 满足 $\mathfrak{g}/A\cong B$, 则对任意 $y\in B$, $ad_y$ 是 $A$ 上的导子. 于是可定义同态 $\varphi: B\to \mathrm{Der}A$, $y\mapsto ad_y$
使 $\mathfrak{g}=A\rtimes_{\varphi} B$.

若 $\mathfrak{g}=A\rtimes B$, 则 $0\to A\xrightarrow{i_A}\mathfrak{g}\xrightarrow{\pi_B}B\to 0$ 正合, 且有
嵌入映射 $B\xrightarrow{i_B}\mathfrak{g}$, 使 $\pi_B\circ i_B=id_B$. 反之, 若有Lie代数的正合列

设 $C, D$ 是范畴. $F: C \to D$, $G: D \to C$ 是函子. 若对 $\forall X \in C$, $Y \in D$, 存在双射

$$\mathrm{Hom}_C(X, GY) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(FX, Y).$$

则称 $F$ 是 $G$ 的左伴随, $G$ 是 $F$ 的右伴随.

同态

$0 \to A \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} B \to 0$ 以及 $j: B \to \mathfrak{g}$ 使 $p \circ j = id_B$.

则 $\mathfrak{g} = A \rtimes_\varphi B$. 其中 $\varphi(y)(x) = i^{-1}([j(y), i(x)])$.

作业: 证明上述 $\varphi$ 的确是 $B$ 到 $\mathrm{Der} A$ 的同态. 因而确有 $\mathfrak{g} \cong A \rtimes_\varphi B$.

## §2.2 泛包络代数.

设 $\mathfrak{g}$ 是一个 $k$-Lie 代数.

定义1. $\mathfrak{g}$ 的一个泛包络代数 (UEA) 是指一个结合代数 $U\mathfrak{g}$ 以及 $k$ 模同态 $\varepsilon: \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ 满足

i) $\varepsilon([x, y]) = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(y) - \varepsilon(y) \cdot \varepsilon(x)$, 即 $\varepsilon$ 是 Lie 代数同态.

ii) 对任一结合代数 $A$, 以及 Lie 代数同态 $\alpha: \mathfrak{g} \to A$, 存在唯一的结合代数同态 $\varphi: U\mathfrak{g} \to A$, 满足 $\alpha = \varphi \circ \varepsilon$.

注: 定义1中的条件 ii) 等价于存在同构

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, LA) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ass}(U\mathfrak{g}, A).$$

可以证明, $U$ 是一个函子. 上式表明 $U$ 是 $L$ 的左伴随.

定理2. $\mathfrak{g}$ 的 UEA 在同构的意义下存在唯一.

~~证明: 唯一性由万有性易知. 下面证存在性. 设 $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.~~

~~$T^n \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 $n$ 次张量积 (作为 $k$-模)~~

~~$T\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \geq 0} T^n \mathfrak{g}$. (注意 $T^0 \mathfrak{g} = k$). 叫做 $\mathfrak{g}$ 的张量代数.~~

~~这里用到 $I \subseteq T'g$ 因此, $Tg \to Ug$ 限制在 $T'g$ 上时为同构. 另外, $Tg \to Ug$ 限制在 $T'g = g$ 上时(即 $\varepsilon$) 也为同构. 或者等价地说, $\varepsilon$ 是单射~~

5. 设 $\varphi: g_1 \to g_2$ 是 Lie 代数同态.
$\varepsilon_1: g_1 \to Ug_1$, $\varepsilon_2: g_2 \to Ug_2$ 是 $g_1$, $g_2$ 的 UAE.
则 $\alpha = \varepsilon_2 \circ \varphi: g_1 \to Ug_2$ 是一个 Lie 代数同态.
于是存在唯一的映射 $U(\varphi): Ug_1 \to Ug_2$, 使 $\alpha = U(\varphi) \circ \varepsilon_1$
证明: ① $U(id_g) = id_{Ug}$.

② 若 $\varphi: g_1 \to g_2$, $\psi: g_2 \to g_3$, 则
$U(\psi \circ \varphi) = U(\psi) \circ U(\varphi)$.

即 $U$ 是 $Lie_k$ 到 $Ass_k$ 的函子.



~~则对任一结合代数 $A$, 有 $Hom_{mod}(g, A) = Hom_{Ass}(Tg, A)$.
设 $I$ 是 $Tg$ 中由 $[x,y] - x \otimes y + y \otimes x$ 生成的双边理想. 则
$Ug = Tg/I$ 是 $g$ 的一个 UEA.
首先 构造 $\varepsilon: g \to Ug$ 为可分解为 $g = T'g \to Tg \to Ug$.
由 $Ug$ 定义易知 $\varepsilon$ 的确是 Lie 代数同态.
其次, 若 $A$ 是结合代数, $\alpha: g \to A$ 是 Lie 代数同态. 由张量代数的万有性, 存在 $\beta: Tg \to A$ 是 $\alpha$ 的扩充. 因为 $\alpha$ 是 Lie 代数同态 所以 $\beta(I) = 0$. 于是有映射 $\varphi: Ug \to A$. 因为 $Ug$ 由 1 和 $g$ 生成. $\varphi(1) = 1_A$. $\varphi|_g = \varepsilon$. 所以 $\varphi$ 唯一. □~~

证明(唯一性): 设 $\varepsilon_1: g \to U_1$, $\varepsilon_2: g \to U_2$ 是 $g$ 的两个 UAE. 于是存在结合代数同态 $\varphi_{12}: U_1 \to U_2$ 和 $\varphi_{21}: U_2 \to U_1$, 使 $\varphi_{12} \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2$. $\varphi_{21} \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_1$. 于是 $\varphi_{12} \circ \varphi_{21} \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_2$. $\varphi_{21} \circ \varphi_{12} \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_1$. 另一方面, 取 $A = U_1$ ($\alpha = \varepsilon_1$), 我们知道存在唯一的映射 $id_{U_1}: U_1 \to U_1$ 使 $id_{U_1} \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_1$, 于是 $\varphi_{21} \circ \varphi_{12} = id_{U_1}$. 同理, $\varphi_{12} \circ \varphi_{21} = id_{U_2}$. 所以 $\varphi_{12}: U_1 \to U_2$ 是同构. 因此, $g$ 的 UAE 唯一. □

为了证存在性, 我们要复习一些张量代数的知识. 为简单起见, 我们假设 $k$ 是域.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

定义3. 设 $V$ 是 $\Bbbk$-向量空间. 定义 $T(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V)$, 其中 $T^0(V)=\Bbbk$, $T^n(V)=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{n\text{个}}$. 并定义乘法 $\cdot: T(V)\times T(V)\to T(V)$, $(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\cdot(v_1'\otimes\cdots\otimes v_m')=v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes v_1'\otimes\cdots\otimes v_m'$. (特别地, $c\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)=cv_1\otimes\cdots\otimes v_n$, $(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\cdot c=cv_1\otimes\cdots\otimes v_n$). 则 $(T(V),\cdot)$ 构成一个结合代数, 称为 $V$ 的张量代数.

定理4 ($T(V)$ 的泛性质) 设 $V$ 是 $\Bbbk$-空间. $T(V)$ 是其张量代数. $\iota: V\xrightarrow{\sim} T^1(V)\hookrightarrow T(V)$ 是 $V$ 在 $T(V)$ 中的嵌入. 对任一 $\Bbbk$-结合代数 $A$, 以及线性映射 $\alpha: V\to A$, 存在唯一的结合代数同态 $\varphi: T(V)\to A$, 使得 $\alpha=\varphi\circ\iota$.

证明: 先证存在性. 因为 $T(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}T^n(V)$, 只需定义 $\varphi$ 在每个 $T^n(V)$ 上的作用 $\varphi^{(n)}$. 首先规定 $\varphi^{(0)}(c)=c\cdot 1_A$. 其次, 对于 $v_1\otimes\cdots\otimes v_n\in T^n(V)$, 规定 $\varphi^{(n)}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)=\alpha(v_1)\cdots\alpha(v_n)$, 并利用线性性将 $\varphi^{(n)}$ 延拓到整个 $T^n(V)$ 上. 则不难验证 $\varphi: T(V)\to A$ 是一个结合代数同态.

再证唯一性. 设 $\varphi$, $\varphi'$ 是两个这样的同态. 由同态的定义, 应有 $\varphi(1_{T(V)})=1_A=\varphi'(1_{T(V)})$. 由 $\alpha=\varphi\circ\iota=\varphi'\circ\iota$, 以及 $\iota$ 是 $V$ 到 $T^1(V)$ 的嵌入, 应有 $\varphi^{(1)}(v)=\alpha(v)=\varphi'^{(1)}(v)$. 最后, 因为 $T(V)$ 由 $T^0(V)$ 和 $T^1(V)$ 生成, 所以 $\varphi=\varphi'$. $\square$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

现在我们来构造 $U(\mathfrak{g})$. 首先 $\mathfrak{g}$ 是化线性空间. 所以可以构造张量代数 $T(\mathfrak{g})$, 接下来定义

$$I = \langle [x, y] - x\otimes y + y\otimes x \rangle \subseteq T(\mathfrak{g})$$

为形如 $[x, y] - x\otimes y + y\otimes x$, $x, y \in \mathfrak{g}$ 的元素生成的双边理想. 最后. 取 $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$. 记 $T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ 的投影为 $\pi$. 则取 $\varepsilon = \pi \circ \iota : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$.

证明(定理7的存在性部分) 即证明上述 $U\mathfrak{g}$ 具有所要求的泛性质. 设 $A$ 是一结合代数, 以及 $\alpha: \mathfrak{g} \to A$ 于是有结合代数同态 $\tilde{\varphi}: T(\mathfrak{g}) \to A$, 满足 $\tilde{\varphi}\circ\iota = \alpha$. 注意 $\tilde{\varphi}([x, y] - x\otimes y + y\otimes x) = 0$. 所以 $\tilde{\varphi}(I) = 0$. 于是诱导了同态 $\varphi: U(\mathfrak{g}) \to A$. 即 $\varphi\circ\pi = \tilde{\varphi}$. 由 $\varepsilon = \pi\circ\iota$ 得 $\varphi\circ\varepsilon = \varphi\circ\pi\circ\iota = \tilde{\varphi}\circ\iota = \alpha$. 所以 $\varphi$ 满足条件.

还要证明这样的 $\varphi$ 是唯一的. 首先注意 $I \cap T^0(\mathfrak{g}) = 0$. 所以 $U(\mathfrak{g})$ 可分解为 $U\mathfrak{g} = T^0(\mathfrak{g}) \oplus (T^+(\mathfrak{g})/I)$ 所以 $\varphi^0$ 即 $\tilde{\varphi}^0$. 于是 $\varphi^0(1_{U\mathfrak{g}}) = 1_A$. 其次. 因为 $T(\mathfrak{g})$ 由 $T^0(\mathfrak{g})$ 和 $T^1(\mathfrak{g})$ 生成, 所以 $U(\mathfrak{g})$ 由 $T^0(\mathfrak{g})$ 和 $T^1(\mathfrak{g})/I$ 生成. 于是 $\varphi$ 在 $T(\mathfrak{g})$ 上的作用由它在 $T^0(\mathfrak{g})$, $T^1(\mathfrak{g})/I$ 上的限制决定. $\varphi$ 在 $T^0(\mathfrak{g})$ 上的限制由 $\varphi(1_{U\mathfrak{g}})$ 给出. $\varphi$ 在 $T^1(\mathfrak{g})/I$ 上的限制由 $\tilde{\varphi}$ 在 $T^1(\mathfrak{g})$ 上的限制给出. 于是由 $\alpha$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用给出. 因此这样的 $\varphi$ 是唯一的. $\square$.

Date:
Place:
Reminders

代数A叫分次的，若 $A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$，且 $A_n\cdot A_m\subseteq A_{n+m}$

理想 $I\subseteq A$ 叫分次的，若 $I=\bigoplus_{n\geq 0}(I\cap A_n)$

若 I 是 A 的分次理想，则 $A/I$ 也是分次的。

且有 $A/I=\bigoplus_{n\geq 0}(A_n/(I\cap A_n))$

且有 $T^n(V)\cdot T^m(V)\subseteq T^{n+m}(V)$

$S^n(V)\cdot S^m(V)\subseteq S^{n+m}(V)$

Date:
Place:
Reminders

下面要进一步考虑 $U(\mathfrak{g})$ 的结构.

§2.3 PBW定理.

定义5. 设V是向量空间. V可视为一个交换Lie代数. 其UEA记为 $S(V)$，叫做V的对称代数. 由定义，

$$S(V)=T(V)/\langle x\otimes y-y\otimes x \mid x,y\in V\rangle.$$

定理6（$S(V)$ 的泛性质）设 $\iota: V\to T(V)\to S(V)$ 是V在 $S(V)$ 中的嵌入. 对于任意交换结合代数A，以及线性映射 $\alpha: V\to A$，存在唯一的交换结合代数同态 $\varphi: S(V)\to A$，使 $\alpha=\varphi\circ\iota$.

证明：这实际上是定理2在交换Lie代数 $(V,[\ ]=0)$ 上的应用. □.

注意 $I=\langle x\otimes y-y\otimes x\rangle$ 是分次的，即

$$I=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(I\cap T^n(V))$$

因此 $S(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}T^n(V)/(I\cap T^n(V))$

记 $S^n(V)=T^n(V)/(I\cap T^n(V))$. 则 $S(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}S^n(V)$.

注意 $I\cap T^1(V)=0$. 所以 $S^1(V)=V$.

$T(V)$ 和 $S(V)$ 都有直和分解 $T(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}T^n(V)$，$S(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}S^n(V)$.

这样的分解叫其上的一个分次. 在 $U(\mathfrak{g})$ 上没有这样的分解. (gradation).

代数A叫过滤的, 如果存在k子模的链

$\cdots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$

满足 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n = A$. $A_n\cdot A_m \subseteq A_{n+m}$

当k是域时 $grU$ 做为k模空间同构于$U$. 但k不是域时, k模范畴中可以有不是直和的正合列. 于是 $grU \ncong U$.



但在$U(\mathfrak{g})$上有另一种类似的结构.

定义7. a) 对于自然数n, 定义 $U_n(\mathfrak{g}) = Span_k\{\varepsilon(x_1)\cdots\varepsilon(x_m) \mid m\le n,\ x_i\in\mathfrak{g}\}$

则 $U_n(\mathfrak{g})$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 的子空间. 且有 $U_p(\mathfrak{g})\cdot U_q(\mathfrak{g}) \subseteq U_{p+q}(\mathfrak{g})$.

$U_0(\mathfrak{g}) = k$. $U_1(\mathfrak{g}) = k\oplus\varepsilon(\mathfrak{g})$. $U_0(\mathfrak{g}) \subseteq U_1(\mathfrak{g}) \subseteq U_2(\mathfrak{g}) \subseteq \cdots$

$\bigcup_{p\ge 0} U_p(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})$. 这样的子空间套叫$U(\mathfrak{g})$上的一个滤子(filtration)

b) 设k空间$U$上有一个滤子 $U_0\subseteq U_1\subseteq U_2\subseteq\cdots$, $\bigcup_{p\ge0}U_p = U$.

定义 $gr_n U = U_n/U_{n-1}$. $grU = \bigoplus_{n=0}^{\infty} gr_n U$. 叫做过滤空间$U$对应的分次空间.

c). 在 $grU(\mathfrak{g})$ 上定义乘法: $gr_p U(\mathfrak{g}) \times gr_q U(\mathfrak{g}) \to gr_{p+q} U(\mathfrak{g})$

$((x+U_{p-1}(\mathfrak{g})), (y+U_{q-1}(\mathfrak{g}))) \mapsto x\cdot y + U_{p+q-1}(\mathfrak{g}))$

其中 $x\in U_p(\mathfrak{g})$, $y\in U_q(\mathfrak{g})$. 则上述乘法不依赖于代表$x,y$的选取.

于是 $(grU(\mathfrak{g}), \cdot)$ 成为一个分次结合代数.

引理8. $(grU(\mathfrak{g}), \cdot)$ 是交换的

证明: 因为$U(\mathfrak{g})$由1和$\varepsilon(\mathfrak{g})$生成. 所以$grU(\mathfrak{g})$也由1和$\varepsilon(\mathfrak{g})$生成, 所以只需证明对$\forall x,y\in\mathfrak{g}$, $\overline{\varepsilon(x)}$ 和 $\overline{\varepsilon(y)}$ 交换即可. 而根据定义, $\varepsilon(x)\varepsilon(y)-\varepsilon(y)\varepsilon(x) = \varepsilon([x,y]) \in U_1(\mathfrak{g})$. 所以 $\overline{\varepsilon(x)}\cdot\overline{\varepsilon(y)} = \overline{\varepsilon(y)}\,\overline{\varepsilon(x)}$ (在 $gr_2 U(\mathfrak{g})$ 中). □

根据 $S(\mathfrak{g})$ 的泛性质. 映射 $\varepsilon: \mathfrak{g} \to gr_1U(\mathfrak{g}) \to grU(\mathfrak{g})$

Date:
Place:
Reminders

这里用到k是域. 若k不是域 PBW定理也在适当→
条件下成立. 例如 g是自由k模. 或k是PID等.

Date:
Place:
Reminders

可延拓为交换代数间的同态 $\varphi: S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g})$.

定理 9 (Poincare-Birkhoff-Witt) $\varphi$是同构.

因为 $\mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g})$ 由 $\varepsilon(\mathfrak{g})$ 和 1 生成. 所以 $\varphi$总是满的. 定理 9
证明的主要任务是证明$\varphi$单.

~~引理~~. 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 其中 I 是一个全序集.
引理10. 所有形如 $\varepsilon(X_{i_1})\cdots\varepsilon(X_{i_m})$ $(i_1\le\cdots\le i_m)$ $(m\le n)$ 的单项式
生成了 $U_n(\mathfrak{g})$
证明: 对于 $a\in U_n(\mathfrak{g})$. 考虑它在 $\mathrm{gr}_n U(\mathfrak{g})$ 中的像 $\bar{a}$, 因为 $\mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g})$
由 $\varepsilon(\mathfrak{g})$ 生成. 且交换. 必有 $\bar{a} = \sum c_{i_1\cdots i_m}\overline{\varepsilon(X_{i_1})}\cdots\overline{\varepsilon(X_{i_m})}$.
于是存在 $a_1\in U_{n-1}(\mathfrak{g})$, 使 $a = \sum c_{i_1\cdots i_m}\varepsilon(X_{i_1})\cdots\varepsilon(X_{i_m}) + a_1$.
接下来对n做归纳即可. $\square$.

引理11. 定理9等价于如下定理
定理9' (PBW基) 形如 $\varepsilon(X_{i_1})\cdots\varepsilon(X_{i_m})$ $i_1\le\cdots\le i_m$, $m\ge 0$
的单项式构成 $U(\mathfrak{g})$ 的一组基.
证明: 对于 $M=(i_1,\cdots,i_m)$ 满足 $i_1\le\cdots\le i_m$. 记 $X_M = \varepsilon(X_{i_1})\cdots\varepsilon(X_{i_m})$
以及 $l(M) = m$. 叫做 M 的长度. 对每个 $n\ge 0$. 满足 $l(M)\le n$ 的 $X_M$ 落在

Date:
Place:

Reminders

这里先将 $S(\mathfrak{g})$ 等同为 $\Bbbk[X_i \mid i\in I]$ 这是显然的. →

这里实际上证明的是 $\varphi$ 在每个 $S^n(\mathfrak{g})$ 上的限制的单性

$\varphi^{(n)} = \varphi|_{S^n(\mathfrak{g})} : S^n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}_n U(\mathfrak{g})$,

$$X_{i_1}\cdots X_{i_n} \mapsto \overline{\varepsilon(X_{i_1})}\cdots\overline{\varepsilon(X_{i_n})}.$$

~~这里仅需在补充 $x_i z_\phi = z_i$~~ →

Date:
Place:

Reminders

$U_n(\mathfrak{g})$ 中. 且 $\overline{X_M} \in \mathrm{gr}_n U(\mathfrak{g}) = U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$ 正是 $\varphi(X_{i_1}\cdots X_{i_n})$

因此, 要证明 $\varphi$ 是单的. 只要证明, 若 $\sum_{l(M)=n} c_M X_M \equiv 0 \mod U_{n-1}(\mathfrak{g})$

则 $c_M=0$. 而引理 10 说明 $U_{n-1}(\mathfrak{g})$ 由 $\{X_M \mid l(M)<n\}$ 生成. 所以

只要证明若 $\sum_{l(M)=n} c_M X_M = \sum_{l(M)<n} c_M X_M$. 则 $c_M=0$. 这个条件

即说明 $\{X_M \mid l(M)\geq 0\}$ 构成 $U(\mathfrak{g})$ 的基. 反之亦然. □

下面将证明定理 9'. 首先取 $V=\Bbbk[z_i \mid i\in I]$.

则 $V$ 有基 $z_M$. $M=(i_1,\cdots,i_n)$. $i_1\leq\cdots\leq i_n$. $n\geq 0$.

~~引理 12. V上存在一个模结构使得~~ 对于 $i\in I$. 我们

记 $i\leq M \Leftrightarrow i\leq i_1$. 并记 $iM=(i,i_1,\cdots,i_n)$.

引理 12. $V$ 上存在一个 $\mathfrak{g}$ 模结构, 使得 若 $i\leq M$, 有 $X_i z_M = z_{iM}$.

~~证明: 我们要构造一个线性映射 $\mathfrak{g}\times V\to V.(x,v)\mapsto xv$~~

~~满足 $xyv-yxv=[x,y]v$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$, $v\in V$. 为定义 $xv$, 只需~~

~~对所有 $i\in I$. 及 $M$ 定义 $x_i z_M$. 而为定义 $x_i z_M$, 我们可以递归地~~

~~进行即假设对所有 $l(N)<l(M)$ 及 $j<i$, $l(N)=l(M)$, $x_j z_N$ 都已定义好.~~

~~我们进一步假设 $x_j z_N$ 是 $z_L$ 的线性组合 其中 $l(L)\leq l(N)+1$. 下面~~

~~记为条件(*).~~

~~定义 $X_i z_N = \begin{cases} z_{iM}, & 若\ i\leq M. \\ X_j(X_i z_N)+[X_i,X_j]z_N. & 若\ M=jN,\ i>j. \end{cases}$~~

~~注意 $l(N)<l(M)$. 所以 $x_i z_N$ 是定义好的 而 $j<i$. $X_i z_N$ 的单项式长度 $\leq l(M)$,~~

~~且其单项式长度 $\leq l(M)$~~

~~所以 $X_j(X_i z_N)$ 也是定义好的. $[X_i, X_j] z_N$ 也定义好.~~
~~另外 这样的 $X_i z_M$ 显然也满足归纳假设的条件(*)~~
~~下面检查可换性质, 这只需证明 $X_iX_j z_N - X_jX_i z_N = [X_i, X_j] z_N$.~~
~~当 $i=j$ 时显然. 不妨设 $i>j$. ① 若 $j\le N$, 则 $X_j z_N = z_{jN}$. 上式即~~
~~$X_i(z_{jN})$ 定义的情况, 因此成立. ② 若 $N=kL$, $k<j\le i$~~
~~则 $X_iX_jX_k z_L - X_jX_iX_k z_L - [X_i,X_j]X_k z_L$ 待证式变为~~

引理12. $V$ 上存在一个$g$模结构, 使得若 $i\le M$,
则 $X_i z_M = z_{iM}$

证明: ~~记 $1 = z_\phi \in V$. 由条件知 $\pi(X_i)1 = z_i$. 于是~~
~~$X_M 1 = (X_{i_1}\cdots X_{i_p})1 = (X_{i_1}\cdots X_{i_{p-1}})(X_{i_p}1) = (X_{i_1}\cdots X_{i_{p-1}})z_{i_p} = \cdots = z_{i_1}\cdots z_{i_p} = z_M$.~~

下面考虑~~要一般的~~作用 $g\times V\to V$, $(x, z)\mapsto \pi(x)z$. 注意 $V=\bigoplus_{p\ge 0} V_p$.
$V_p$ 为 $p$ 次齐次单项式张成的线性空间. 记表示 $g\to \mathrm{End}(V)$ 为 $\pi$. 则
我们要定义的 $\pi$ 满足 $\pi(x): V_p\to V_{p+1}$. 它通过如下条件递归
地定义: $(A_p)$ $\pi(X_i) z_M = z_{iM}$  $i\le M$. $l(M)=p$.

$(B_p)$ $\pi(X_i) z_M - z_i z_M \in V_p$. $\forall\, l(M)=p$.

$(C_p)$ $\pi(X_i)(\pi(X_j) z_M) = \pi(X_j)(\pi(X_i) z_M) + \pi([X_i, X_j]) z_M$

$\forall\, l(N)=p-1$.

首先. $p=0$ 时, $\pi(X_i)1 = z_i$. 满足 $(A_0)$. $(B_0)$成立. $(C_0)$空.
其次. 假设 $(A_{p-1})$. $(B_{p-1})$. $(C_{p-1})$ 成立. 则对 $l(M)=p$.

$z_i z_N$ 可重排为 $z_{(i,N)}$. $(i,N)$ 表示将 $(i,N)$ 按升序重排. 

因为 $j<i$ $j\le N$. 所以 $j\le(i,N)$. 所以 $\pi(X_j)z_iz_N=z_jz_iz_N$. $(A_p)$



我们定义 $\pi(X_i)z_M$. ① 若 $i\le M$. 则 $(A_p)$ 给出定义. ~~[illegible]~~.

② 若不然, 则 $M=(j.N)$. $i>j$. $j\le N$. $l(N)=p-1$. 于是

我们定义 $\pi(X_i)z_M=\pi(X_i)\pi(X_j)z_N \quad \Leftarrow (A_{p-1})$ 只能

$$=\pi(X_j)\pi(X_i)z_N+\pi([X_i,X_j])z_N \quad (C_p)$$

$$=\pi(X_j)(z_iz_N+w)+\pi([X_i,X_j])z_N. \quad (B_{p-1}).\ w\in V_{p-1}$$

$$=z_jz_iz_N+\pi(X_j)w+\pi([X_i,X_j])z_N.$$

按这个定义显然 $(B_p)$ 满足. 接下来只需验证 $(C_p)$ 成立.

根据上述构造, 若 $j<i$ $j\le M$, 则 $C_p$ 成立. ($l(M)=p-1$) 由反称性.

若 $i<j$, $i\le M$. 则 $C_p$ 也成立. 所以只要看 $M=(k.N)$. $l(N)=p-2$.

$k<i$. $k<j$. 此时 $\pi(X_j)z_M=\pi(X_j)z_kz_N$

$$=\pi(X_j)\pi(X_k)z_N=\pi(X_k)\pi(X_j)z_N+\pi([X_j,X_k])z_N. \quad (C_{p-1})$$

$$=\pi(X_k)(z_jz_N+w)+\pi([X_j,X_k])z_N. \text{ 其中 } w\in V_{p-2}. \text{ 于是}$$

$$\pi(X_i)\pi(X_j)z_M=\underbrace{\pi(X_i)\pi(X_k)(z_jz_N)}_{\text{已知的}(C_p)}+\underbrace{\pi(X_i)\pi(X_k)w}_{(C_{p-1})}+\underbrace{\pi(X_i)\pi([X_j,X_k])z_N}_{(C_{p-1})}.$$

因此, 右边的 $(C_p)$ 或 $(C_{p-1})$ 都是已知的情况. 因此有

$$X_iX_jz_M=X_iX_kX_jz_N+X_i[X_j,X_k]z_N \quad (\text{这里}\pi\text{都省了})$$

$$=X_kX_iX_jz_N+[X_i,X_k]X_jz_N$$

$$+[X_j,X_k]X_iz_N+[X_i,[X_j,X_k]]z_N \quad \text{互换 } i,j \text{ 相减得}$$

$$X_iX_jz_M-X_jX_iz_M=X_k(X_iX_j-X_jX_i)z_N+([X_i,[X_j,X_k]]-[X_j,[X_i,X_k]])z_N$$

$$=X_k[X_i,X_j]z_N+[[X_i,X_j],X_k]z_N.=[X_i,X_j]X_kz_N=[X_i,X_j]z_M. \ \square$$

这里需要 $\pi(X_M)1 = z_M$. ~~这…~~
~~是前面划掉的部分~~

$$\pi(X_M)1 = X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_n}1 = X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_{n-1}}z_{i_n}$$
$$= \cdots = z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_n} = z_M.$$

作业：设 $G$ 是 Lie 群，$\mathfrak{g}$ 是 $G$ 上左不变向量场构成的 Lie 代数，$D$ 是 $G$ 上左不变微分算子构成的结合代数，则存在映射 $\mathfrak{g} \hookrightarrow D$，使 $D$ 成为 $\mathfrak{g}$ 的一个包络代数，进而有映射 $\varphi: U\mathfrak{g} \to D$。证明 $\varphi$ 是同构。
(Ref GTM102 §3.4)

Hopf 代数：

① 结合代数 $(A, \mu, \eta)$，$A$: $k$-模，$\mu: A\otimes A \to A$，$\eta: k \to A$
使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes A)\otimes A \cong A\otimes(A\otimes A) \arrow[r, "id\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes id"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$
(结合性)

$$\begin{tikzcd}
A \cong A\otimes k \cong k\otimes A \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\eta"'] \arrow[dr, "id"] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$
(单位元)

证明(定理9) 若 $\sum c_M X_M = 0$，则作用在 $1\in V$ 上得 $0 = \sum c_M z_M$，但 $z_M$ 是 $V$ 的基，因此 $c_M = 0$，于是 $X_M$ 是基。

推论：$\varepsilon: \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ 是单的。
证明：因为 $\varphi': S'(\mathfrak{g}) \to gr_1 U(\mathfrak{g})$ 是同构。 □

§2.4 表示

引理1. $\mathfrak{g}$ 模范畴和 $U(\mathfrak{g})$ 模范畴是相同的
证明：$\mathfrak{g}$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 的子代数，所以任一 $U(\mathfrak{g})$ 模都是 $\mathfrak{g}$ 模。
反之，对任一 $\mathfrak{g}$ 模，映射 $\mathfrak{g} \to End(V)$ 可扩展为 $U(\mathfrak{g}) \to End(V)$，因此 $V$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 模 □

引理2. 设 $V_1, V_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 模，则 $V_1\otimes V_2$ 也是
证明：$X(v_1\otimes v_2) = (Xv_1)\otimes v_2 + v_1\otimes Xv_2$. $\forall X\in\mathfrak{g}$. □
引理3. 设 $V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模，则 $V^*$ 也是. $X(f)(v) = -f(Xv)$ □
推论：$Hom_k(V_1, V_2)$ 也是
注：引理2,3 表明 $U(\mathfrak{g})$ 是一个 Hopf 代数。
(基本)

$\tau(x\otimes y)=y\otimes x$.

Date: Place: Reminders

若进一步有
$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mu"] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "id"] & A \end{tikzcd}$$
则称A交换.

② k余代数 $(C,\Delta,\varepsilon)$: C: k模. $\Delta: C\to C\otimes C$. $\varepsilon: C\to k$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C\otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes id"] & C\otimes C\otimes C \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "id"] & C\otimes C \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\varepsilon\otimes id"] & k\otimes C\cong C\cong C\otimes k \end{tikzcd}$$

若进一步有
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\Delta"] & C \arrow[d, "\Delta"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\tau"] & C\otimes C \end{tikzcd}$$
则称C余交换.

③ k双代数 $(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ B: k模.

- $(B,\mu,\eta)$ 是代数 • $(B,\Delta,\varepsilon)$ 是余代数
- $\mu,\eta,\Delta,\varepsilon$ 相容. 即下列图表交换.

1.
$$\begin{tikzcd} B\otimes B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] & B \arrow[r, "\Delta"] & B\otimes B \\ (B\otimes B)\otimes(B\otimes B) \arrow[rr, "id\otimes\tau\otimes id"] & & (B\otimes B)\otimes(B\otimes B) \arrow[u, "\mu\otimes\mu"] \end{tikzcd}$$
(Δ是B→B⊗B的代数同态且 μ是B×B→B的余代数同态).

2.
$$\begin{tikzcd} B\otimes B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] & B \arrow[d, "\varepsilon"] \\ k\otimes k \arrow[r, "\cong"] & k \end{tikzcd}$$
($\varepsilon: B\to k$ 是代数同态)

3.
$$\begin{tikzcd} k\otimes k \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\eta\otimes\eta"] & k \arrow[d, "\eta"] \\ B\otimes B & B \arrow[l, "\Delta"] \end{tikzcd}$$
($\eta: k\to B$ 是余代数同态).

4.
$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "id"] & B \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & k \end{tikzcd}$$
($\eta$与$\varepsilon$的相容性).

2.4 ⟺ ε保单位

3.4 ⟺ η保余单位.

Date: Place: Reminders

定义4. a) 设V是g模. 若 $v\in V$ 满足 对$\forall x\in g$, $x.v=0$. 则称v是一个不变量.

b) 设 $V_1, V_2$ 是g模. $B\in(V_1\times V_2)^*$. 若B是g不变的, 则称它为 $V_1\times V_2$ 上的一个不变双线性型. 具体地说, 即
$B(xv_1, v_2)+B(v_1, xv_2)=0$. $\forall x\in g$, $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$.

c) 设 V是g模, 相应的同态为 $\rho: g\to \mathrm{End}\,V$. 定义
$B_\rho(x,y)=\mathrm{Tr}_V(\rho(x)\rho(y))$ $\forall x,y\in g$.
则 $B_\rho$ 是 $g\times g$ 上的对称不变双线性型.

作业: 证明上述断言.

d) 定义 $B: g\times g\to k$, $(x,y)\mapsto \mathrm{Tr}_g(ad(x)ad(y))$.
B叫做g的Killing型.

## §2.5 幂零Lie代数.

设g是域k上的有限维Lie代数. 定义 $C^1g=g$.
$C^ng=[g, C^{n-1}g]$ $(n\geq 2)$.

作业: ① 证明 $C^1g\supseteq C^2g\supseteq\cdots$

② $[C^rg, C^sg]\subseteq C^{r+s}g$

$\{C^ng\}$ 叫g的降中心列.

④ $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ 叫 Hopf 代数，若

- $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ 是双代数.
- $S: H \to H$（叫做 antipode）使下图交换.

$$\begin{tikzcd}
 & H\otimes H \arrow[r, "S\otimes id"] & H\otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & k \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
 & H\otimes H \arrow[r, "id\otimes S"'] & H\otimes H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

（可以证明，$S: H \to H$ 是代数和余代数的反同构）

性质：设 $H$ 是一个 Hopf 代数. 则

① 若 $M, N$ 是 $H$ 模. 则 $M\otimes N$ 也是. 对于 $a\in H$.
$$a(m\otimes n) = \Delta(a)(m\otimes n) = \sum (a_{(1)}m)\otimes(a_{(2)}n).$$

② $k$ 自动是 $H$ 模. 对于 $a\in H$. $a(k) = \varepsilon(a)k$.

③ 若 $M$ 是 $H$ 模. 则 $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ 也是，对于 $a\in H$.
$(af)(m) = f(S(a)m)$.

作业：设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数. $U = U(\mathfrak{g})$.

① $\Delta: \mathfrak{g} \to U\otimes U$, $x \mapsto x\otimes 1 + 1\otimes x$ 是 Lie 代数同态. 因此存在唯一的代数同态 $\Delta: U \to U\otimes U$.

② $\varepsilon: \mathfrak{g} \to k$, $x \mapsto 0$ 是 Lie 代数同态. 因此存在唯一的代数同态：$\varepsilon: U \to k$.



定理1. 如下条件等价

(i) 存在整数 $n$, 使 $C^n\mathfrak{g} = 0$.

(ii) 存在整数 $n$, 使得对 $\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{g}$, 有
$$[x_1, [x_2, \cdots [x_{n-1}, x_n], \cdots]] = (\mathrm{ad}\, x_1)\cdots(\mathrm{ad}\, x_{n-1})(x_n) = 0.$$

(iii) $\mathfrak{g}$ 是一串交换 Lie 代数的中心扩张. 即存在理想的降链 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_n = (0)$ 使得 $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$ 的中心. 或等价地说，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$.

证明：留作作业. ((i) ⇒ (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i)) □

定义2. 若定理1中的条件满足，则称 $\mathfrak{g}$ 是幂零 Lie 代数.

例：设 $V$ 是有限维向量空间. $F = (V_i)$ 叫 $V$ 中的旗，若 $(0) = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$. $\dim V_i = i$. 设 $\mathfrak{u}(F) = \{u \in \mathrm{End}\, V \mid uV_i \subseteq V_{i-1}\ \forall i \geq 1\}$，于是 $\mathfrak{u}(F)$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 的子代数. 因此也是 $\mathrm{End}(V)$ 的 Lie 子代数. 若在 $V$ 中取基 $(v_i)$ 使得 $V_i = \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_i)$. 则 $\mathfrak{u}(F)$ 中元素在基 $(v_i)$ 下全是严格上三角矩阵. 定义 $\mathfrak{u}_k(F) = \{u \in \mathrm{End}(V) \mid uV_i \subseteq V_{i-k}, \forall i \geq k\}$. 则 $\mathfrak{u}\mathfrak{u}_k \subseteq \mathfrak{u}_{k+1}$, $\mathfrak{u}_k\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{u}_{k+1}$. 于是 $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}_k] \subseteq \mathfrak{u}_{k+1}$. 因此 $\mathfrak{g}$ 幂零.

定义3. $X \in \mathfrak{g}$ 称为 ad 幂零，如果 $\mathrm{ad}_X$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的幂零变换.

Date:
Place:
Reminders

③ 定义 $U^{op}=U$, $\mu^{op}: U^{op}\times U^{op}\to U^{op}$, $(x,y)\mapsto y\cdot x$.
称为U的反代数. 则 $S: \mathfrak{g}\to U^{op}$, $x\mapsto -x$
是一个Lie代数同态. 于是可得代数同态 $S:U\to U$

④ 证明 $(U,\cdot,1,\Delta,\varepsilon,S)$ 是一个余交换Hopf代数.

---

中心扩张: 设 $\mathfrak g$ 为Lie代数. 若有Lie代数的短正合列 $0\to K\xrightarrow{i}\tilde{\mathfrak g}\xrightarrow{p}\mathfrak g\to 0$, 使得 $i(K)\subseteq Z(\tilde{\mathfrak g})$, 则称 $\tilde{\mathfrak g}$ 为 $\mathfrak g$ 的一个中心扩张. 在线性空间范畴中总可认为 $\tilde{\mathfrak g}=\mathfrak g\oplus K$. 于是对于 $x\oplus a,\ y\oplus b\in\tilde{\mathfrak g}$, 有
$$[x\oplus a, y\oplus b]_{\tilde{\mathfrak g}}=[x,y]_{\mathfrak g}\oplus c(x,y).$$
其中 $c:\mathfrak g\times\mathfrak g\to K$ 为双线性映射, 满足
i) $c(x,y)+c(y,x)=0$.
ii) $c([x,y],z)+c([y,z],x)+c([z,x],y)=0$.
这样的 $c$ 叫做 $\mathfrak g$ 在 $K$ 上的一个 2-cocycle.
后面我们会介绍Lie代数的上同调理论. 那时还会回到这一主题.

续前: 事实上,
$$\Delta(X_M)=\sum_{I\cup J=M}X_I\otimes X_J,\quad \varepsilon(X_M)=\begin{cases}1 & l(M)=0\\ 0 & l(M)>0\end{cases}$$
$$S(X_M)=(-1)^{l(M)}X_M.$$

Date:
Place:
Reminders

定理4. $\mathfrak g$ 幂零 $\Leftrightarrow$ $\forall X\in\mathfrak g$, $X$ ad幂零.

我们先证明下述定理.

定理5 (Engel) 设 $\rho:\mathfrak g\to \mathrm{End}(V)$ 是 $\mathfrak g$ 的一个表示. 若满足对 $\forall X\in\mathfrak g$, $\rho(X)$ 幂零, 则存在 $V$ 的旗 $F=(V_i)$, 使得 $\rho(\mathfrak g)\subseteq u(F)$.
此定理的逆是平凡的. 因为 $u(F)$ 中的元素都幂零. 这个定理的意义在于: 若对每个 $X\in\mathfrak g$, 存在一个旗 $F_X$ 使得 $\rho(X)\in u(F_X)$, 则可找到一个旗对所有 $X$ 都适用. 定理5等价于
定理5': 在定理5的假设下, 若 $V\neq\{0\}$, 则存在 $v\in V$, $v\neq 0$, 使得对 $\forall X\in\mathfrak g$, 有 $\rho(X)v=0$.
证明: ~~若5'成立...~~ 若5成立, 取 $v\in V_1$, 则有 $\rho(X)v\in V_0=0$. 反之, 若5'成立, 对 $\dim V$ 归纳, 于是定理5对 $V'=V/kv$ 成立 (因为 $\rho(\mathfrak g)v=0$). 所以 $V'$ 中满足性质的旗可提升为 $V$ 中的旗. □.

证明(定理5'). 分7步.
1. 因为条件和结论仅涉及 $\rho(\mathfrak g)$, 所以不妨设 $\mathfrak g\subseteq\mathrm{End}(V)$.
2. 设 $L_X:\mathrm{End}(V)\to\mathrm{End}(V)$, $\alpha\mapsto X\alpha$. $R_X:\mathrm{End}(V)\to\mathrm{End}(V)$, $\alpha\mapsto\alpha X$, 由已知条件, $L_X$ 与 $R_X$ 都幂零. 于是 $ad_X=L_X-R_X$ 也幂零 (对 $\forall X\in\mathfrak g$)
3. 对 $\dim\mathfrak g$ 做归纳. 我们可假设定理对所有维数小于 $\dim\mathfrak g$ 的Lie代数成立.

ders
8.
是g
G的
的覆盖
g×g到g
以存在
有
只需试
$\rho(\mathfrak h)=G$.
□.
闭.

Date:

Place:

Reminders

4. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Lie 子代数. $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$. 令 $\mathfrak{u}=\{x\in\mathfrak{g} \mid ad_x\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{h}\}$ 即 $\mathfrak{h}$ 的正规化子. 下证 $\mathfrak{u}$ 严格大于 $\mathfrak{h}$. 因为 $\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}$. 所以 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 非零. $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}$ 都是 $\mathfrak{h}$ 模. 于是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{h}$ 模. 因为 $\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}$, 由3知存在 $\bar{x}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. 满足对 $\forall y\in\mathfrak{h}$. $ad_y(\bar{x})=0$. 取 $\bar{x}$ 的代表 $x$. 即 $[y,x]\in\mathfrak{h}$. 即 $[x,y]\in\mathfrak{h}$. 所以 $x\in\mathfrak{u}$. $x\neq0$. 即 $\mathfrak{u}\neq\mathfrak{h}$. $\mathfrak{u}\supseteq\mathfrak{h}$. □

5. 若 $\mathfrak{g}\neq(0)$. 则存在余维数1的理想 $\mathfrak{h}$. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个极大子代数(不同于 $\mathfrak{g}$ 的). 则 4 中的 $\mathfrak{u}$ 必然是 $\mathfrak{g}$. 所以 $\mathfrak{h}$ 是理想. 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中取一条线. 那么它在 $\mathfrak{g}$ 中的反像将是严格大于 $\mathfrak{h}$ 的子代数. 因此只能是 $\mathfrak{g}$. 所以 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是一维的.

6. 设 $W=\{v\in V \mid \mathfrak{h}v=0\}$. 则 $W$ 是 $\mathfrak{g}$ 不变的. 因为 $\mathfrak{h}$ 是理想. 所以对于 $x\in\mathfrak{g}$. $y\in\mathfrak{h}$. $yxv=xyv-[x,y]v=0$. 若 $v\in W$.

7. $W\neq\{0\}$(归纳假设3). 取 $y\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$. 于是 $y$ 作用在 $W$ 上(由6). 因为 $y$ 幂零. 所以存在 $W$ 中非零元 $v$. 满足 $yv=0$. 于是 $\mathfrak{g}v=0$. □

~~最后我们证明~~ 证明(定理4) 由定理2的 i) 可知若 $\mathfrak{g}$ 幂零. 则对 $\forall x\in\mathfrak{g}$. $x$ ad 幂零. 反之. 若所有 $x$ ad 幂零. 对伴随表示 $ad:\mathfrak{g}\to End(\mathfrak{g})$ 应用 Engel 定理. 则存在旗

$$(0)\subseteq\mathfrak{a}_1\subseteq\mathfrak{a}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{a}_n=\mathfrak{g}.$$

使得 $[\mathfrak{g},\mathfrak{a}_i]\subseteq\mathfrak{a}_{i-1}$. 因此 $\mathfrak{g}$ 幂零(定理2的 ii)) □

Date: 
Place: 
Reminders

大作业选题：幂零与可解Lie群

(Ref. Bourbaki《Lie Groups and Lie Algebras》, Ch III, §9. no.1 ~ no.6)

1. Lie群的交换子群、正规化子、中心化子的初步性质。

2. ① Lie群幂零(作为抽象群) $\Leftrightarrow$ 其Lie代数幂零

② 若G是连通幂零群，则 $\exp: \mathfrak{g}\to G$ 是覆盖映射

③ 若G是单连通幂零群，则 $\exp: \mathfrak{g}\to G$ 是微分同胚

④ 设V是K空间，$\infty > \dim V > 0$，G是GL(V)的子群，其元素幂么(线性变换幂么如果 $x-\mathrm{id}$ 幂零)，则

i) 存在 $v\in V$, $v\neq 0$, s.t. $\forall g\in G$, $gv=v$.

ii) 存在V的基，使得对 $\forall g\in G$，其矩阵 $=\begin{pmatrix}1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

iii) G幂零。

⑤ 设G是有限维连通实Lie群，则G幂零 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ad}_g$ 幂零，$\forall g\in G$.

3. ① Lie群可解 $\Leftrightarrow$ 其Lie代数可解

② $\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$上的n维单连通可解Lie群微分同胚于$\mathbb{R}^n$或$\mathbb{C}^n$.

③ 设V是复线性空间，有限维，G是GL(V)的可解子群(连通)，且G在V上的作用是不可约的，则 $\dim V=1$.

④ 设V是复线性空间 $0<\dim V<\infty$，G是GL(V)的连通可解子群，则存在 $v\in V$, $v\neq 0$，使得 $\forall g\in G$, $gv\in \mathbb{C}v$.

ii) 存在V的基，使得对 $\forall g\in G$，其矩阵 $=\begin{pmatrix}* & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & *\end{pmatrix}$

Date: 
Place: 
Reminders

§7.6 幂零Lie群

定义1. 连通Lie群叫做幂零的，如果它的Lie代数是幂零的。

在本节中，G总是连通Lie群，$\mathfrak{g}$是其Lie代数。

定理2. i) 存在一个多项式映射 $P: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，使得 $\exp X \exp Y = \exp P(X,Y)$, $\forall X, Y\in\mathfrak{g}$.

ii) 设Z为$\mathfrak{g}$的中心，$D=\{X\in Z \mid \exp X = 1_G\}$，则D是$\mathfrak{g}$的离散加法子群，并且指数映射exp诱导从$\mathfrak{g}/D$到G的解析微分同胚。特别地，D是G的基本群，$\mathfrak{g}$是G的覆盖空间，exp是相应的覆盖映射。于是exp是满射。

证明: i) 设$C_n$是BCH公式中的Taylor系数，则$C_n$都是$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$到$\mathfrak{g}$的多项式映射。由递推公式可以证明 $C_q\in \mathcal{C}^{q-1}(\mathfrak{g})$，所以存在N，使得$n\geq N$时，$C_n=0$。设 $P=\sum_{n=1}^{N} C_n$，则在0的邻域内有 $\exp X\exp Y=\exp P(X,Y)$。因为P是多项式，所以该式对所有 $X, Y\in\mathfrak{g}$成立。

ii) i)表明 $\exp(\mathfrak{g})$ 是G的子群，且在1附近开，于是 $\exp(\mathfrak{g})=G$。因为exp是局部微分同胚，所以是覆盖映射。 □

推论: a) 若G单连通，则exp是解析微分同胚

b) 若H是G的Lie子群，$\mathfrak{h}$是相应的$\mathfrak{g}$的子代数，则H闭

Date:
Place:　　　　　　　　　　　　　　　　Reminders

这里用到幂零Lie代数的子代数幂零. →

此时未必分裂.

即$\mathfrak{g}$可写为一串交换Lie代数的扩张. →

Date:
Place:　　　　　　　　　　　　　　　　Reminders

~~单连通且 $H=\exp(\mathfrak{h})$.~~

~~证明: a) 显然. 对于 b). 由前一定理的 ii), 应有 $H=\exp(\mathfrak{h})$.~~

~~因为exp是同胚. 所以H闭. H单连通~~ □.

~~注: G不单连通时 H未必闭. 例如环面无理流.~~

## §2.6 可解Lie代数.

从这节开始我们总假设 $k$ 是代数封闭域. 且 $\mathrm{char}\,k=0$.

$\mathfrak{g}$是$k$上的有限维Lie代数. 定义 $D^1\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

$D^n(\mathfrak{g})=[D^{n-1}(\mathfrak{g}), D^{n-1}(\mathfrak{g})]$, $n\geq 2$.

$\{D^n(\mathfrak{g})\}$ 叫$\mathfrak{g}$的导~~级数~~出列. $D(\mathfrak{g})$ 叫$\mathfrak{g}$的导代数.

定理1. 以下条件等价

i) 存在正整数n 使得 $D^n(\mathfrak{g})=(0)$.

ii) 存在理想降链 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_1\supseteq\mathfrak{a}_2\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{a}_n=(0)$, 使得

$\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$是交换的. 即 $[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_i]\subseteq\mathfrak{a}_{i+1}$, $\forall i$. 6.

证明: 留为作业. □.

定义2. 若$\mathfrak{g}$满足定理1的条件. 则称之为可解Lie代数.

例: 设 $F=(V_i)$ 是 V中的一个旗. 定义

Date:
Place:

Reminders

留作作业. →

Date:
Place:

Reminders

$\mathfrak{b}(F)=\{x\in \mathrm{End}(V) \mid xV_i\subseteq V_i, \forall i\}$. 取与F适配的基. 则 $\mathfrak{b}(F)$ 中的元素在此基下都是上三角矩阵. 于是不难验证 $\mathfrak{b}(F)$ 可解.

定理3 (Lie). 设 $\rho: \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个有限维表示. 则存在 $V$ 的旗 $F$, 使得 $\rho(\mathfrak{g})\subseteq \mathfrak{b}(F)$.

定理3': 条件同定理3, 若 $\dim V>0$, 则存在 $v\in V$, $v\neq 0$, 使得 $v$ 是所有 $\rho(x)$, $(x\in\mathfrak{g})$ 的特征向量.

利用对 $\dim V$ 的归纳不难证明定理3与定理3'等价. 若定理3'成立, 则存在映射 $\lambda: \mathfrak{g}\to k$, 使得 $\rho(x)v=\lambda(x)v$.

引理4. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, $V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模, 且有 $v\in V$, $v\neq 0$, $\lambda: \mathfrak{h}\to k$ 满足 $hv=\lambda(h)v$, $\forall h\in\mathfrak{h}$, 则 $\lambda([x,h])=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}$, $h\in\mathfrak{h}$.

证明: 对 $\forall x\in\mathfrak{g}$, 定义 $V_i=\mathrm{Span}(v, xv, \cdots, x^{i-1}v)$, $i=0,1,\cdots$ 则 $(0)=V_0\subseteq V_1\subseteq\cdots\subseteq V_i\subseteq V_{i+1}\subseteq\cdots$ 因为 $V$ 是有限维的, 所以存在正整数 $n$, 使得 $V_n=V_{n+1}$, 此时有 $xV_n\subseteq V_n$, $V_n=V_{n+k}$ $(\forall k\geq 0)$.

对于 $h\in\mathfrak{h}$, 下面考虑 $h$ 在 $V_i$ 上的作用. 首先, $hv=\lambda(h)v$.

Date:
Place:
Reminders

Reminders

下面将证明. 对 $\forall i=0,1,\cdots$ $hx^iv \equiv \lambda(h)x^i(v) \pmod{V_i}$

$i=0$ 时易证. 假设 $i-1$ 时正确. 考虑 $i$ 时. 则有

$hx^iv = hx\,x^{i-1}v = xhx^{i-1}v - [x,h]x^{i-1}v$.

($i-1$ 时正确 $\Rightarrow$ $hx^{i-1}v = \lambda(h)x^{i-1}v + v'$. $v' \in V_{i-1}$)

$= \lambda(h)x^iv + xv' - [x,h]x^{i-1}v$. ($xV_{i-1} \subset V_i$. $\mathfrak{h}V_i \subseteq V_i$)

$\equiv \lambda(h)x^i(v) \pmod{V_i}$

所以, 在基 $v, xv, \cdots, x^{n-1}v$ 下. $h$ 的矩阵 $= \begin{pmatrix} \lambda(h) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(h) \end{pmatrix}$.

因此, $Tr_{V_n}(h) = n\cdot\lambda(h)$. 取 $h$ 为 $[x,h]$. 则有

$\lambda([x,h]) = \frac{1}{n}Tr_{V_n}([x,h]) = 0$. $\square$.

证明(定理3'). 对 $\dim\mathfrak{g}$ 做归纳. $\dim\mathfrak{g}=0$ 时平凡. 考虑 $\dim\mathfrak{g}>0$ 的情况. 因为 $\mathfrak{g}$ 可解. 所以 $D(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ (否则 $D^n(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$ 始). 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中包含 $D(\mathfrak{g})$ 的余维 1 的子空间. 因为 $\mathfrak{h}/D(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}/D(\mathfrak{g})$ 的理想(交换 Lie 代数的任一子空间都是理想), 所以 $\mathfrak{h}$ 一定是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

因为 $\dim\mathfrak{h} = \dim\mathfrak{g}-1$. 由归纳假设. 在 $V$ 中存在 $v\neq 0$, 以及 $\lambda: \mathfrak{h}\to k$, 使得 $hv = \lambda(h)v$. $\forall h\in\mathfrak{h}$. 定义

$W = \{w\in V \mid hw = \lambda(h)w, \forall h\in\mathfrak{h}\}$.

则 $W$ 是 $V$ 的非零子空间. 下面说明 $\mathfrak{g}W \subseteq W$. 取 $x\in\mathfrak{g}$. $w\in W$, 则对 $\forall h\in\mathfrak{h}$. $hxw = xhw - [x,h]w = \lambda(h)xw - \lambda([x,h])w$

(由引理4) $= \lambda(h)xw$. 所以 $xw\in W$.

最后，取 $x\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$，$x$在$W$上是一线性变换，因此有特征向量$v_0$，于是$v_0$是公共特征向量 of $\mathfrak{g}$. □

推论：若$\mathfrak{g}$可解，则$\mathfrak{g}$中存在由理想构成的链.

证明：对伴随表示 $ad:\mathfrak{g}\to End(\mathfrak{g})$ 应用 Lie 定理，则条件 $[x,\mathfrak{g}_i]\subseteq\mathfrak{g}_i$，$\forall x\in\mathfrak{g}$ 说明$\mathfrak{g}_i$都是理想. □

推论：$\mathfrak{g}$可解 $\Leftrightarrow$ $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$幂零.

证明：$\Leftarrow$ 显然. 下证 $\Rightarrow$. 设 $\mathfrak{g}\supseteq\mathfrak{g}_1\supseteq\mathfrak{g}_2\cdots\supseteq\mathfrak{g}_n=0$ 是上一推论给出的理想链，取 $x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，则 $ad\,x(\mathfrak{g}_i)\subseteq\mathfrak{g}_{i+1}$（因为$\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$是1维的，所以 $End(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1})\cong k$ 交换，所以 $ad\,x$在$\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$上的作用恒为零，即 $ad\,x\,\mathfrak{g}_i\subseteq\mathfrak{g}_{i+1}$）于是 $ad\,x$幂零，由Engel定理 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$幂零. □

下面将复习一些线性代数中的结果，然后证明Cartan判据.

命题 5. 设$V$是有限维$k$空间，$x\in End(V)$.

(a) 存在唯一的 $x_s,x_n\in End(V)$ 满足 $x=x_s+x_n$，$x_s$半单，$x_n$幂零，$[x_s,x_n]=0$.

(b) 存在多项式 $p(T),q(T)$，$p(0)=q(0)=0$，使得 $x_s=p(x)$，$x_n=q(x)$.

特别地，若 $y\in End(V)$ 满足 $[x,y]=0$，则 $[x_s,y]=0$，$[x_n,y]=0$.

c) 若 $A\subseteq B\subseteq V$ 是线性子空间 且 $xB\subseteq A$ 则 $x_sB\subseteq A$，$x_nB\subseteq A$.

Date:

Place:

Reminders

作业：证明：若 $x$ 半单，则 $\mathrm{ad}\,x$ 也半单。

（设 $x$ 在某基下为 $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$，求 $\mathrm{ad}\,x$ 的特征值特征向量）

Date:

Place:

Reminders

证明：只需构造 $p(T)$，$q(T)$，其它显然。设 $a_1 \cdots a_k$ 是 $x$ 的不同特征值，重数为 $m_1 \cdots m_k$，于是 $x$ 的特征多项式 $f(T) = \prod_{i=1}^{k} (T-a_i)^{m_i}$，记 $V_i = \ker(x - a_i \cdot 1)^{m_i}$，则 $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$。

考虑如下同余方程：

$$p(T) \equiv a_i \mod (T-a_i)^{m_i}, \quad p(T) \equiv 0 \pmod T$$

根据中国剩余定理，上述方程有解 $p(T)$（若有 $a_i = 0$，则此方程可省去）。再设 $q(T) = T - p(T)$，则此 $p(T)$，$q(T)$ 即所求。 □

定义6. $x = x_s + x_n$ 叫 $x$ 的 Jordan-Chevalley 分解，$x_s$ 和 $x_n$ 分别叫 $x$ 的半单部分和幂零部分。

引理7. 设 $x \in \mathrm{End}(V)$，$x = x_s + x_n$ 是 $x$ 的 JC 分解，则 $\mathrm{ad}\,x = \mathrm{ad}\,x_s + \mathrm{ad}\,x_n$ 是 $\mathrm{ad}\,x$ 的 JC 分解。

证明：$x_n$ 幂零 $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}\,x_n$ 幂零，$x_s$ 半单 $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}\,x_s$ 半单。

$[x_s, x_n] = 0 \Rightarrow [\mathrm{ad}\,x_s, \mathrm{ad}\,x_n] = \mathrm{ad}[x_s, x_n] = 0$。 □

引理8. 设 $A$ 是一个有限维代数，$x \in \mathrm{Der}\,A$，则 $x_s$，$x_n \in \mathrm{Der}\,A$。

证明：只需证 $x_s \in \mathrm{Der}(A)$。对于 $c \in \Bbbk$，定义 $A_c = \{a \in A \mid (x - c)^k a = 0$，对某个可能依赖于 $a$ 的 $k\}$，则 $A = \bigoplus_{c\text{是}x\text{的特征值}} A_c$，因 $x_s$ 在 $A_c$ 上的作用就是标量乘。注意对 $\forall c_1, c_2 \in \Bbbk$，有 $\mu(A_{c_1}, A_{c_2}) \subseteq A_{c_1+c_2}$。

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

(因为 ~~$(x-(a+b)1)^n \mu($~~

$$(x-(c_1+c_2)1)^n \mu(a_1,a_2)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mu\left((x-c_11)^{n-i}a_1,\ (x-c_21)^{i}a_2\right)$$

所以当n充分大时，右边$\mu$中的两个参数必有一个为零)，于是

对于 $a_1\in A_{c_1}$，$a_2\in A_{c_2}$，有

$x_s\,\mu(a_1,a_2)=(c_1+c_2)\,\mu(a_1,a_2)$ $\quad$ ($x_s\in \mathrm{Der}\,A$.

另一方面 $\mu(x_s a_1,a_2)+\mu(a_1,x_s a_2)=(c_1+c_2)\mu(a_1,a_2)$，所以 $\square$

$\dim V<\infty$

引理9：设 $A\subset B$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 的子空间，$M=\{x\in \mathrm{End}(V)\mid [x,B]\subseteq A\}$

若 $x\in M$ 满足 对 $\forall y\in M$，$\mathrm{Tr}(xy)=0$，则 $x$ 幂零。

证明：设 $x=s+n$ 是 $x$ 的JC分解，取基 $v_1\cdots v_m$ 使得 $S=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_m\end{pmatrix}$

要证明 $a_1=\cdots=a_m=0$，设 $E=\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(a_1,\cdots,a_m)$，则 $E$ 是 $\mathbb{Q}$ 上有限维线性空间，只需证明 $E=0$，于是只需证明 $E^*=0$，即对任何线性函数 $f:E\to\mathbb{Q}$，有 $f\equiv 0$.

设 $y$ 是矩阵 $\begin{pmatrix}f(a_1)&&\\&\ddots&\\&&f(a_m)\end{pmatrix}$ 对应的线性变换，则

$\mathrm{ad}_s(e_{ij})=(a_i-a_j)e_{ij}$，$\mathrm{ad}_y(e_{ij})=(f(a_i)-f(a_j))e_{ij}$，设 $r(T)$ 是满足

$$r(a_i-a_j)=f(a_i)-f(a_j),\quad r(0)=0$$

的多项式（可用Lagrange插值公式构造），则 $\mathrm{ad}_y=r(\mathrm{ad}_s)$

因为 $s$ 是 $x$ 的半单部分，所以 $\mathrm{ad}_s$ 是 $\mathrm{ad}_x$ 的半单部分，于是有多项式

无常数项

$p$ 使 $\mathrm{ad}_s=p(\mathrm{ad}_x)$，于是 $\mathrm{ad}_y=(r\circ p)(\mathrm{ad}_x)$，因为 $\mathrm{ad}_x(B)\subseteq A$，

所以 $\mathrm{ad}_y(B)\subseteq A$，即 $y\in M$，由引理假设 $\mathrm{Tr}(xy)=0$，即

Date:
Place:
Reminders

作业：设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想，若 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 可解，则 $\mathfrak{g}$ 本身也可解.

(Ref: GTM9 §3.1 Proposition.)

~~设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想，则 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 也是幂零理想~~

Date:
Place:
Reminders

$\sum_{i=1}^{m} a_i f(a_i)=0$. 注意这是 $E$ 中元素的 $\mathbb{Q}$ 线性组合. 于是可用 $f$ 再作用一次，得 $\sum_{i=1}^{m} f(a_i)^2=0$. 所以必有 $f(a_i)=0$. □.

定理10 (Cartan 判据) 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 的子代数. $\dim V<\infty$. 若 $\mathrm{Tr}(xy)=0$, $\forall x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $y\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 可解

证明：要证 $\mathfrak{g}$ 可解只需证 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 幂零. 取 $A=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $B=\mathfrak{g}$. $M=\{x\in\mathrm{End}(V) \mid [x,\mathfrak{g}]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\}$. 显然 $\mathfrak{g}\subseteq M$. 为了应用引理9. 我们需要证明，对 $\forall$ ~~$y\in M$~~ $x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $z\in M$ 有 $\mathrm{Tr}(xz)=0$.

设 $x=[x_1,x_2]$ 为 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的一个生成元. 则

$\mathrm{Tr}(xz)=\mathrm{Tr}([x_2,z]x_1)$ 其中 $[x_2,z]\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $x_1\in\mathfrak{g}$. 所以为零 □.

$B(x,y)=0$.

推论：设 $\mathfrak{g}$ 满足 ~~$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)$~~ $=0$. $\forall x\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $y\in\mathfrak{g}$, 则可解.

证明：对伴随表示应用 Cartan 判据. 可知 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 可解. 注意 $\ker\mathrm{ad}=Z(\mathfrak{g})$ 交换. 由 $0\to Z(\mathfrak{g})\to\mathfrak{g}\to\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\to 0$ 的正合性可知 $\mathfrak{g}$ 可解. □.

§2.7 半单 Lie 代数.

引理1 设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想. 则 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 也是可解理想.

证明：$0\to\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\to\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\to 0$ □.

$\cong\mathfrak{b}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$

~~练习: 若 $0\to A\to \mathfrak{g}\to B\to 0$ 既是半直积又是中心扩张, 则 $\mathfrak{g}=A\oplus B$.~~



定义2. a) 设 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 中所有可解理想的和, 称为 $\mathfrak{g}$ 的根. (于是 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大可解理想)

b) 设 $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 中所有幂零理想的和. 于是 $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零理想. $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ 叫 $\mathfrak{g}$ 的幂零根.

c) 若 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})=(0)$, 则称 $\mathfrak{g}$ 半单. (semisimple)

~~d) 若 $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})=(0)$, 则称 $\mathfrak{g}$ 约化 (reductive)~~

~~由定义易知, 对任意 $\mathfrak{g}$ (有限维, 代数闭, 特征零),~~

~~$0\to \mathrm{rad}(\mathfrak{g})\to\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^{ss}=\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})\to 0.$~~

~~$0\to \mathrm{nil}(\mathfrak{g})\to\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^{red}=\mathfrak{g}/\mathrm{nil}(\mathfrak{g})\to 0.$~~

~~后面的Levi定理将说明前者总是半直积, 而后者未必. 另外,~~

~~$0\to \mathrm{rad}(\mathfrak{g})/\mathrm{nil}(\mathfrak{g})\to\mathfrak{g}^{red}\to\mathfrak{g}^{ss}\to 0$~~

~~总是既是半直积又是中心扩张, 于是是直和 ([illegible])~~

引理3. $\mathfrak{g}$ 半单 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ 没有非零的交换理想.

证明: 若有一个非零交换理想, 则 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 非零. 反之, 若有非零的 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$, 它的最后一个非零导代数给出一个非零交换理想. □.

定理4 (Cartan 判据) $\mathfrak{g}$ 半单 $\Leftrightarrow$ $B$ 非退化.

证明: 设 $k$ 是 $B$ 的根, 即 $k=\{x\in\mathfrak{g}\mid B(x,y)=0\ \forall y\in\mathfrak{g}\}$. 则 $k$ 是一个可解理想 (Cartan 判据). 于是 $k\subseteq \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

Date:
Place:
Reminders

性质:

① 若 $S$ 是单 Lie 代数, 则 $[S, S] = S$.

② 若 $S_1, S_2$ 是单 Lie 代数, $\varphi: S_1 \to S_2$ 是 Lie 代数满同态.
则 $\varphi$ 或者是零, 或者是同构.

③ ~~证明~~

Date:
Place:
Reminders

若 $g$ 半单, 则 $\mathrm{rad}(g) = (0)$ 于是 $K = (0)$. 反之, 若 $g$ 不半单, 则有一非零交换理想 $a$, 对于任一 $x \in a$, $y \in g$.
$B(x, y) = Tr(ad_x ad_y)$ 设 $\sigma = ad_x ad_y : g \to g$.
则 $\sigma g \subseteq a$ (因为 $a$ 是理想) $\sigma a = (0)$ (因为 $a$ 交换)
所以 $\sigma^2 = 0$. 于是 $Tr(\sigma) = 0$. 即 $a \subseteq K$. 所以 $B$ 退化. □

推论: 若 $g$ 半单, $a \subseteq g$ 是理想, $a^{\perp}$ 是 $a$ 关于 $B$ 的正交补, 则 $a^{\perp}$ 是理想, 且 $g = a \oplus a^{\perp}$ (作为 Lie 代数).

证明: $a^{\perp}$ 显然是理想. $a \cap a^{\perp}$ 是可解理想, 于是 $a \cap a^{\perp} = (0)$.
因为 ~~$B([a, a^{\perp}], g) = B(a, [a^{\perp}, g]) = 0$~~. 所以 $[a, a^{\perp}] = 0$. □
$a, a^{\perp}$ 是理想 所以 $[a, a^{\perp}] \subseteq a \cap a^{\perp}$.

定义5. $g$ 叫做单 Lie 代数, 若 i) $g$ 非交换. ii) $g$ 没有非平凡理想.

推论. 半单 Lie 代数同构于单 Lie 代数的直和

证明: 设 $a$ 是半单 Lie 代数 $g$ 的理想, 于是 $g = a \oplus a^{\perp}$. $[a, a^{\perp}] = 0$.
于是 $a$ 的理想也是 $g$ 的理想, 所以 $a$ 也半单. 同理 $a^{\perp}$ 半单. 这种分解可一直继续直到 $g$ 中再找不到非平凡理想. 注意 $g$ 没有交换理想.
所以这样得到的直和项总是单的. □

推论: 若 $g$ 半单, 则 $[g, g] = g$. (因为 $[S_i, S_j] = \delta_{ij} S_i$)

大作业选题：~~Lie代数的??根~~ 约化Lie代数

Ref. Bourbaki Ch I. §4. §5.

Jacobson Ch II. Ch III.

背景：需要环论中Jacobson根的有关知识

引理：设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie代数. $B$ 是其 Killing 型. $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ 如前

$K=\mathfrak{g}^{\perp}$ 是$B$的根. 另外还有 $S=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap \mathrm{rad}(\mathfrak{g})=[\mathfrak{g},\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}]$

则 (i) $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp}$.

(ii) $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})\supseteq K\supseteq \mathrm{nil}(\mathfrak{g})\supseteq S$.

例如. $\mathfrak{g}$可解时. $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$. $K=\mathfrak{g}^{\perp}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathrm{nil}(\mathfrak{g})=S$.

见下页(续) $\mathfrak{g}$半单时. 所有4个根都是零

$\mathfrak{g}$约化时. $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})=Z(\mathfrak{g})$. $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})=0=K$.

此时有 $\mathfrak{g}=\underbrace{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}_{\text{半单}}\oplus Z(\mathfrak{g})$

定义. 若 $S=0$. 则称$\mathfrak{g}$约化.

~~大作业选题：约化Lie代数. (留待完全可约性之后)~~

(Ref. Bourbaki. Ch I. §6 no4)

引理：以下等价

① $\mathfrak{g}$ 约化. ② $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 半单. ③ $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})=Z(\mathfrak{g})$.

④ $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 是半单的. ⑤ $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\oplus Z(\mathfrak{g})$.

⑥ $\mathfrak{g}$有忠实半单有限维表示.

⑦ 对任意$\mathfrak{g}$模$V$ 满足 $Z(\mathfrak{g})$在$V$上作用可对角化. $V$可分解为不可约$\mathfrak{g}$模的直和.



定理. 设 $\mathfrak{g}$ 是半单Lie代数. 若有分解 (单Lie代数)

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s=\mathfrak{g}'_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}'_t$.

则 $s=t$. 且有置换 $\sigma\in S_s$, 满足 $\mathfrak{g}'_i=\mathfrak{g}_{\sigma(i)}$.

证明：考虑商映射 $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'_i$. 因为 $\ker\varphi=\mathfrak{g}'_1\oplus\cdots\widehat{\mathfrak{g}'_i}\cdots\oplus\mathfrak{g}'_t$

是理想. 所以$\varphi$是Lie代数同态. 设 $\varphi_j$ 是 $\varphi$ 在 $\mathfrak{g}_j$ 上的限制.

因为 $\varphi_j$ 满, $\mathfrak{g}_j$, $\mathfrak{g}'_i$ 单. 所以 $\varphi_j$ 或者是零, 或者是同构. 因为$\varphi$是

满射. 所以 $\varphi_j$ 不可能全是零. 也不可能有 $j_1, j_2$ 使 $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}$ 都是同构. 因为

$[\mathfrak{g}_{j_1},\mathfrak{g}_{j_2}]=0\Rightarrow[\varphi(\mathfrak{g}_{j_1}),\varphi(\mathfrak{g}_{j_2})]=0\Rightarrow[\mathfrak{g}'_i,\mathfrak{g}'_i]=0\Rightarrow\mathfrak{g}'_i$ 交换.

所以对任一 $i\in\{1,\dots,t\}$, 存在唯一的 $j\in\{1,\dots,s\}$ 使

$\mathfrak{g}'_i=\mathfrak{g}_j$. □.

推论. 若 $\mathfrak{g}$半单. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s$. 则任一$\mathfrak{g}$的理想都是某些$\mathfrak{g}_i$的直和.

证明：留作作业. □.

定理：设 $\mathfrak{g}$ 半单. 则对任一导子 $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. 存在 $x\in\mathfrak{g}$, 使得 $D=\mathrm{ad}\,x$.

证明：考虑映射 $f: y\mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y D)$. 因为$B$非退化. 所以存在唯一的 $x\in\mathfrak{g}$ 使 $\forall y\in\mathfrak{g}$ $f(y)=B(x,y)$. 下证 $D=\mathrm{ad}\,x$. 设 $A=D-\mathrm{ad}\,x$.

则对$\forall y\in\mathfrak{g}$. 有 $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_y A)=0$. 另一方面, 对任意的 $y,z\in\mathfrak{g}$.

$H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$. $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. $D(x)=[x,y]\Leftrightarrow D=-\mathrm{ad}_y$

考虑4种根(值): $\mathfrak{g}$, $r=\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$, $k\lhd k$, $n=\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$, $s=[\mathfrak{g},r]$,

| $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ | $r$ | $k$ | $n$ | $s$ | $=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{g}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ | $Z(\mathfrak{g})$ | $Z(\mathfrak{g})$ | $Z(\mathfrak{g})$ | 0 | 所以4种根 |
| $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ | $\mathfrak{g}$ | $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ | $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ | $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ | 全不同. |
| $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ | $\mathfrak{g}$ | $\mathfrak{g}$ | $\mathfrak{g}$ | $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ | |

$Z(\mathfrak{g})$总在$n$中. 但它和$s$的关系不定. 例如. 约化时 $S\subseteq Z(\mathfrak{g})$. 幂零时, $Z(\mathfrak{g})$可能小于$S$.

作业: 证明 ~~ . →

提示. 设 $a=v_1\wedge\cdots\wedge v_m$. $b=w_1\wedge\cdots\wedge w_n$.

由 $v_i\wedge w_j=-w_j\wedge v_i$ 可证. D.

作业. 证明定理2.



~~$B(A(y),z)=tr(ad_{A(y)}\circ ad_z)$. 注意 $ad_{A(y)}=A\circ ad_y-ad_y\circ A$.~~

~~$=tr((A\circ ad_y-ad_y\circ A)\circ ad_z)$~~

~~$=tr(A\circ ad_{[y,z]})=0$. 所以 $A=0$.~~ D.

## §2.8 Lie代数上同调.

定义1. 设$k$是域, $V$是$k$上有限维Lie代数. $T(V)$是$V$的张量代数. 定义 $I'=\langle v\otimes v\mid v\in V\rangle$是$T(V)$中由$v\otimes v$生成的理想. 定义 $\Lambda(V)=T(V)/I'$. $\Lambda(V)$叫$V$的外代数.

因为$I'$是齐次的. 所以 $\Lambda(V)$是分次的: $\Lambda(V)=\bigoplus_{n\geq 0}^{\infty}\Lambda^n(V)$. $\Lambda(V)$上的乘法一般记为$\wedge$. 对于 $a\in\Lambda^m(V)$, $b\in\Lambda^n(V)$. 我们有 $a\wedge b=(-1)^{mn}\,b\wedge a$.

定理2. $\Lambda^n(V)$具有如下泛性质: 设 $\iota: V\times\cdots\times V\to\Lambda^n(V)$ 为映射 $(v_1,\cdots,v_n)\mapsto v_1\wedge\cdots\wedge v_n$. 则对任一线性空间$W$, 以及全反称多重线性映射 $f: V\times\cdots\times V\to W$, 存在唯一的映射 $\varphi:\Lambda^n(V)\to W$, 使 $f=\varphi\circ\iota$.

证明留作作业.

来源：若 $\mathfrak{g}$ 是流形 $M$ 上的向量场 Lie 代数，$V$ 是 $M$ 上的光滑函数代数，则 $C^n$ 就是 $M$ 上的微分 $n$ 形式构成的空间。$\delta$ 就是微分形式的外微分运算。右边的定义就是 $d\omega$ 在 $X_0,\cdots,X_n$ 上的作用。

$(\delta f_0)(X) = X_0 f_0$

$$(\delta f_1)(X_0,X_1) = X_0 f(X_1) - X_1 f(X_0) - f([X_0,X_1])$$

$$(\delta f_2)(X_0,X_1,X_2) = X_0 f(X_1,X_2) - X_1 f(X_0,X_2) + X_2 f(X_0,X_1) - f([X_0,X_1],X_2) + f([X_0,X_2],X_1) - f([X_1,X_2],X_0)$$

作业：证明 a)。



现在设 $\mathfrak{g}$ 是有限维 Lie 代数，$V$ 是一个 $\mathfrak{g}$ 模。记 $C^n = \mathrm{Hom}(\Lambda^n(\mathfrak{g}), V)$，其元素叫 $\mathfrak{g}$ 的取值在 $V$ 中的上链 (cochain)。定义一运算 $\delta: C^n \to C^{n+1}$。对 $f \in C^n$，

$$(\delta f)(x_0,\cdots,x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i f(x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n) + \sum_{0\le i<j\le n} (-1)^{i+j} f([x_i,x_j],x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_n).$$

定理3. a) $\delta f \in C^{n+1}$. b) $\delta\circ\delta = 0$.

证明：a) 只需证 若 $x_p = x_q$ $(p<q)$，则 $(\delta f)(x_0\cdots x_n) = 0$.

由定义 $(\delta f)(x_0\cdots x_n) = \sum_{i\ne p,q} (-1)^i x_i f(x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n)$

$+ (-1)^p x_p f(x_0,\cdots,x_{p-1},x_{p+1},\cdots,x_q,\cdots,x_n)$

$+ (-1)^q x_q f(x_0,\cdots,x_p,\cdots,x_{q-1},x_{q+1},\cdots,x_n)$

$+ \sum_{\substack{i<j\\ i\ne p\\ j\ne q}} (-1)^{i+j} f([x_i,x_j],x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_n)$

b) 首先，$T(\mathfrak{g})$ 上有自然的 $\mathfrak{g}$ 模结构：

$$X(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) = [X,v_1]\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n + \cdots + v_1\otimes\cdots\otimes v_{n-1}\otimes[X,v_n]$$

其次 $X(I) \subseteq I$ （$X(v\otimes v) = ([X,v]+v)^{\otimes 2} - [X,v]^{\otimes 2} - v^{\otimes 2}$）

于是 $\Lambda^n(\mathfrak{g}) = T^n(\mathfrak{g})/I\cap T^n(\mathfrak{g})$ 上有自然的 $\mathfrak{g}$ 模结构。

$$X(v_1\wedge\cdots\wedge v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [X,v_i]\wedge v_1\wedge\cdots\hat{v}_i\cdots\wedge v_n.$$

~~于是 $C^n = \mathrm{Hom}(\Lambda^n(\mathfrak{g}), V)$ 上也有自然的 $\mathfrak{g}$ 模结构。~~

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

记 $L: \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(C^n)$, $X \mapsto L_X$. 则由包络代数一节的内容，知 $(L_X f)(X_1,\dots,X_n)$

$$= X f(X_1,\dots,X_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f([X,X_i],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_n).$$

再定义一个运算：对 $X\in\mathfrak{g}$，定义 $i_X: C^n \to C^{n-1}$, $f \mapsto i_X f(X_2,\dots,X_n) = f(X,\cancel{X_1},\dots,X_n)$

那么有

$$\delta(f)(X_0,X_1,\dots,X_n) = i_{X_0}(\delta(f))(X_1,\dots,X_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i X_i f(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_n) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j} f([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_n)$$

$$= X_0 f(X_1,\dots,X_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i X_i (i_{X_0}f)(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_n)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}(-1)^j f([X_0,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_n) + \sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j+1}(i_{X_0}f)([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_n).$$

$$= L_{X_0} f(X_1,\dots,X_n) - \delta(i_{X_0}f)(X_1,\dots,X_n).$$

即有恒等式 $\cancel{L_X = i_X\delta + \delta i_X}$ $i_X\delta = L_X - \delta i_X$. 类似的方法可得 $i_X L_Y = L_Y i_X + i_{[X,Y]}$

利用这些恒等式可以进行如下计算：

$$i_Y(L_X\delta - \delta L_X) = (i_Y L_X)\delta - (i_Y\delta)L_X$$

$$= (L_X i_Y + i_{[Y,X]})\delta - (L_Y - \delta i_Y)L_X$$

$$= L_X(L_Y - \delta i_Y) + (L_{[Y,X]} - \delta \cancel{i_{[Y,X]}}) - L_Y L_X + \delta(L_X i_Y + \cancel{i_{[Y,X]}})$$

$= L_X L_Y - L_Y L_X + L_{[Y,X]} - (L_X\delta - \delta L_X) i_Y = -(L_X\delta - \delta L_X) i_Y.$

引理: $L_X\delta = \delta L_X$

证明: 设 $z^n = L_X\delta - \delta L_X : C^n \to C^{n+1}$. 要证明 $z^n = 0$.

只需证对 $\forall X\in\mathfrak{g}$. $i_X z^n = 0$. 而由前面的计算

$i_X z^n = -z^{n-1} i_X$, 所以由归纳法, 只需证明 $z^0 = 0$.

$z^0(f) = (L_X(\delta f) - \delta(L_X f))(Y)$

$= X(Y(f)) - [X,Y](f) - Y(X(f)) = 0.$ □

由上述引理, $i_X\delta\delta = (L_X - \delta i_X)\delta = \delta(L_X - i_X\delta) = \delta\delta i_X$.

所以要证明 $\delta^{n+1}\delta^n = 0$. 只要证 $i_X\delta^{n+1}\delta^n = \delta^n\delta^{n-1} i_X = 0$.

于是只要证 $\delta^1(\delta^0 f)(X_0,X_1) = X_0(\delta^0 f)(X_1) - X_1(\delta^0 f)(X_0) - \delta^0 f([X_0,X_1])$

$= X_0(X_1(f)) - X_1(X_0(f)) - [X_0,X_1](f) = 0.$ □

定义 $Z^n = \mathrm{Ker}\,\delta^n$. $B_n = \mathrm{Im}\,\delta^{n-1}$. 于是 $Z_n \supseteq B_n$.

定义 $H^n(\mathfrak{g}, V) = Z^n/B_n$. 叫做第n个上同调 (g的取值在V中的).

$Z^n$ 中元素叫上循环 (cocycle)

$B^n$ 中元素叫上边缘 (coboundary).

例: $H^0(\mathfrak{g}, V) = \{v\in V \mid Xv = 0 \ \forall X\in\mathfrak{g}\}$. 即 g不变元素.

Date:
Place:
Reminders

更好的讲法：设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数. $\mathfrak{g}$ 的扩张是指一个满的同态 $\tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{p} \mathfrak{g}$. 记 $\ker p = \mathfrak{h}$. 于是有短正合列 $0 \to \mathfrak{h} \to \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0$. (*) 若 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$. 则叫交换扩张. 若 $\mathfrak{h} \subseteq Z(\tilde{\mathfrak{g}})$, 则叫中心扩张. 若存在 $s: \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$, 使 $p \circ s = id_{\mathfrak{g}}$, 则叫可裂扩张. 显然中心扩张都是交换的. 下面考虑交换扩张.

设 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上最一般的满足(*)的双线性映射为

$$[X \oplus a, Y \oplus b]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = [X, Y]_{\mathfrak{g}} \oplus (f_1(X, Y) + f_2(X, b) + f_3(a, Y) + f_4(a, b)).$$

因为 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$. 所以 $f_4 \equiv 0$. 因为是 Lie 括号. 所以 $f_1$ 反对称.
且 $f_2(X, b) = -f_3(b, X)$. 我们记 $f_2 = \varphi: \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$. $f_3 = \psi: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.
则 Jacobi 恒等式给出:

Date:
Place:
Reminders

② $Z^1 = \{ f \in Hom(\mathfrak{g}, V) \mid f([X, Y]) = X f(Y) - Y f(X) \}$

这样的映射叫 $\mathfrak{g}$ 的取值在 $V$ 中的导子.

$B^1 = \{ f \in Hom(\mathfrak{g}, V) \mid$ 存在 $v \in V$, 使 $f(X) = X.v \}$

这样的映射叫 $\mathfrak{g}$ 的取值在 $V$ 中的内导子. 所以

$H^1(\mathfrak{g}, V) = \{导子\} / \{内导子\}$.

~~③ 设 $V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模. 若有 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 以及满同态 $p: \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 使得 $0 \to V \xrightarrow{i} \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \to 0$ 是 Lie 代数正合列 (其中 $V$ 交换), 且 对 $\forall \tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}, v \in V$, $[\tilde{X}, i(v)] = -[i(v), \tilde{X}] = p(\tilde{X}).v$ 则称 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的以 $V$ 为核的扩张. 扩张称为可裂的, 如果存在 Lie 代数同态 $s: \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$, 满足 $p \circ s = id_{\mathfrak{g}}$.~~

定理5. 若 $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$. 则所有以 $V$ 为核的 $\mathfrak{g}$ 的扩张都可裂.

证明: 取 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$. 则由定义知 (取 $p$ 为 $\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 的投影直和)

$$[X \oplus v, Y \oplus w]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = [X, Y] \oplus (Xw - Yv + f(X, Y)).$$

其中 $f: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to V$ 需满足 ① $f(X, X) = 0$. ② 使 $[\ ]_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ 满足 Jacobi 恒等式

$\varphi([x,y],c) - \varphi(x,\varphi(y,c)) + \varphi(y,\varphi(x,c))$

$+\varphi([y,z],a) - \varphi(y,\varphi(z,a)) + \varphi(z,\varphi(y,a))$

$+\varphi([z,x],b) - \varphi(z,\varphi(x,b)) + \varphi(x,\varphi(z,b))$

$+\psi([x,y]_{g},z) - \varphi(z,\psi(x,y)) + \psi([y,z]_{g},x)$

$-\varphi(x,\psi(y,z)) + \psi([z,x]_{g},y) - \varphi(y,\psi(z,x)) = 0.$

因为 a, b, c 任意. 所以 $\varphi: g\times h \to h$ 实际上是 g 在 End(h) 上的表示. 而 $\psi: g\wedge g \to h$ 则是这个表示的 2-cocycle.



条件① ⇒ $f\in C^2$. 条件② ⇒ $f\in Z^2$.

若 $H^2\cong 0$. 则 $Z^2 = B^2$. 于是存在 $g\in C^1$. 使

$f(X,Y) = Xg(Y) - Yg(X) - g([X,Y])$ (*)

定义 $s: g\to \tilde{g}$, $X\mapsto (X, -g(X))$. 那么由(*)可证明 s 是 Lie 代数同态 且 $p\circ s = id$. 即 $\tilde{g}$ 可裂. □

定理6 (Whitehead Lemma). 设 g 是半单 Lie 代数. V 是 g 模. 则 $H^1(g,V)\cong 0$. $H^2(g,V)\cong 0$.

~~设 $\rho: g\to End(V)$ 是相应的表示映射. 记 $K=\ker\rho$. 则 K 是 g 的理想. 于是是一些单理想的直和. 记 $g'=K^\perp$. 则 $g'$ 是另外的单理想的直和. 且 $\rho|_{g'}$ 是非退化的. V 本质上其实是 $g'$ 模而已. g 中 K 的作用是平凡的. 回忆一下. 对于 g. ρ. V 可定义 $B_\rho: g\times g\to k$. $(X,Y)\mapsto Tr_V(\rho(X)\rho(Y))$. 于是 $B_\rho(X,Y) = B_{\rho'}(X',Y')$. 其中 $X'$ 是 X 在 $g'$ 中的分量. $Y'$ 是 Y 在 $g'$ 中的分量. $\rho'$ 是 ρ 在 $g'$ 上的限制. 我们先考虑 K=0. 即 ρ 是单射的情况. 此时 $B_\rho$~~

我们要先证明一些关于半单 Lie 代数表示的基本定理.

Date:
Place:
Reminders

设V是g模, $\rho: g \to End(V)$ 是相应的映射, 回忆一下,
我们曾定义 $B_\rho: g\times g \to k$, $(X,Y)\longmapsto Tr(\rho(X)\rho(Y))$.

引理7: $B_\rho$ 的核 = $\rho$ 的核, 特别地, 若 $\rho$ 忠实, 则 $B_\rho$ 非退化
证明: 记 $B_\rho$ 的核为 $S$, $\rho$ 的核为 $k$. 显然有 $k\subseteq S$. 设 $g=k\oplus k^\perp$.
对于 $X\in S$, 将它分解为 $X_1+X_2$, 其中 $X_1\in k$, $X_2\in k^\perp$. 那么对 $\forall Y\in g$, $Y=Y_1+Y_2$
$B_\rho(X,Y)=B_\rho(X_2,Y_2)$ 所以只需证明
对于 $X_2\in k^\perp$, 若对 $\forall Y_2\in k^\perp$ 都 $B_\rho(X_2,Y_2)=0$, 则 $X_2=0$.
换句话说, 即证明 $B_\rho$ 在 $k^\perp$ 上非退化. 这正是 $\rho$ 忠实的情形.
若 $\rho$ 忠实, 则 $S\cong\rho(S)$, 注意 $\rho(S)$ 是可解的 (Cartan 判据)
所以 $S$ 是 $g$ 的可解理想, 所以 $S=0$. □

设 $g'=(\ker\rho)^\perp$, $X_1\cdots X_n$ 是 $g'$ 的基, $Y_1^\rho\cdots Y_n^\rho$ 是它们 ($n=\dim g'$)
关于 $B_\rho$ 的对偶基 ($B_\rho$ 在 $g'$ 上非退化). $\omega_\rho=\sum_{i=1}^n \rho(X_i)\rho(Y_i^\rho)\in End(V)$.
则 $Tr_V(\omega_\rho)=\dim g'$. (因为 $Tr\,\omega=\sum_{i=1}^n B_\rho(X_i,Y_i^\rho)=n=\dim g'$)
引理8. $\omega_\rho$ 与 $\rho(g)$ 中元素都交换. (即 $\omega$ 是 $g$ 模同态)
证明: 设 $X\in g'$. 设 $[X,X_i]=\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j$
$[X,Y_i]=\sum_{j=1}^n b_{ij}Y_j$. 于是由 $B_\rho([X,X_i],Y_j)=B(X_i,-[X,Y_j])$ 可得
$a_{ij}=-b_{ji}$, 于是 $[X,\sum_i X_iY_i]=\sum_i([X,X_i]Y_i+X_i[X,Y_i])$
$=\sum_{i,k}(a_{ik}X_kY_i+b_{ik}X_iY_k)=0$. 所以 $[\rho(X),\omega_\rho]=0$. □
$b_{ki}X_kY_i$

Date:
Place:
Reminders

作业：设 $V$ 是线性空间. $X: V\to V$ 是线性映射

定义 $W_1=\bigcup_{s\geq 1}\ker(X^s)$ $W_2=\bigcap_{s\geq 1}\mathrm{Im}(X^s)$. 则 $V=W_1\oplus W_2$.

若 $[Y, X]=0$. 则 $W_1, W_2$ 都是 $Y$ 的不变子空间.

Date:
Place:
Reminders

引理9. 设 $V_n=\{v\in V \mid \rho(X)v=0\ \forall X\in\mathfrak{g}\}$ (即 $H^0(\mathfrak{g}, V)$).

$$V_r=\sum_{X\in\mathfrak{g}}\rho(X)(V)$$

则 $V_n$. $V_r$ 是 $V$ 的子模. 且有 $V=V_n\oplus V_r$.

证明：子模是显然的. 只需证是直和. ~~我~~我们对 $V$ 的维数做归纳. 假设对所有满足 $\dim W<\dim V$ 的子模 $W$. 引理正确. 考虑 $V$ 的情况. 若 $\rho\equiv 0$. 则 $V_n=V$. $V_r=0$ 显然是直和. 若 $\rho\neq 0$. 于是 $\dim\ker\rho<\dim\mathfrak{g}$. $\mathrm{tr}\,\omega_\rho=\dim(\ker\rho)^\perp>0$. 所以 $\omega_\rho$ 不是幂零映射. 定义 $W_1=\bigcup_{s\geq 1}\ker(\omega_\rho^s)$. $W_2=\bigcap_{s\geq 1}\mathrm{Im}(\omega_\rho^s)$. 则 $V=W_1\oplus W_2$. 且 $W_1$. $W_2$ 都是 $\mathfrak{g}$ 子模. ~~丰~~因为 $\omega_\rho$ 不幂零 所以 $W_2\neq 0$. 若 $W_1$ 也 $\neq 0$. 则由归纳假设 $W_1=W_{1r}\oplus W_{1n}$. $W_2=W_{2r}\oplus W_{2n}$. 且 $V_r=W_{1r}+W_{2r}$ ($V_n=W_{1n}+W_{2n}$) 引理得证. 若 $W_1=0$. 则 $\ker\omega_\rho=0$ 即 $\omega_\rho$ 是单射. 对于 $v\in V_n$. $\omega_\rho(v)=\sum\rho(X_i)\rho(Y_i)v=0$. $\Rightarrow v=0$. 所以 $V_n=0$. ~~另~~另一方面. 对 $\forall v\in V$ $v=\omega_\rho\cdot\omega_\rho^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\rho(X_i)\rho(Y_i)\omega_\rho^{-1}(v)$. 于是 $V_r=V$. 所以是直和. $\square$

证明~~定理~~：先证 $H^1(\mathfrak{g}, V)\cong 0$. 即 $Z^1=B^1$. 首先 $C^1$ 是一个 $\mathfrak{g}$ 模 其作用即 $L: \mathfrak{g}\to\mathrm{End}(C^1)$. $L_X f(Y)=X.f(Y)-f([X,Y])$

若 $f\in Z^1$. 则 $f([X,Y])=X.f(Y)-Y.f(X)$. 于是 $L_X f(Y)=Y.f(X)$.

注意这是一个内导子. 即 $L_X Z^1\subseteq B^1\subseteq Z^1$. 所以 $Z^1$ 也是 $\mathfrak{g}$ 子模.

下面对 $Z^1$ 应用引理9. 于是 $Z^1=Z^1_r\oplus Z^1_n$. 上面的计算表明 $Z^1_n\subseteq B^1$. 所以只需再证明 $Z^1_r=0$. 若 $f\in Z^1_r$. 则对 $\forall X\in\mathfrak{g}$. $L_X f=0$. 即对 $\forall Y, X$.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$((L_x f)(Y) = X f(Y) - f([X,Y]) = 0$. 于是 $Y.f(X)=0$. 于是(交换 $X$, $Y$ 的角色)有 $f([X,Y])=0$. 注意 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 于是 $f=0$. 即 $Z_r^1=0$.

再看 $H^2(\mathfrak{g},V)$, 即证明 $Z^2=B^2$. 与~~前面~~类似. 若 $\delta f=0$. 则 $L_x f=(i_x\delta+\delta i_x)f=\delta(i_x f)\in B^2 \subseteq Z^2$. 所以 $Z^2$ 是 $\mathfrak{g}$ 模 且 $Z_r^2\subseteq B^2$

要证 $H^2=0$. 只需证 $Z_n^2\subseteq B^2$. 设 $f\in Z_n^2$. 则 $\delta f=0$. $L_x f=0$. 即

$$X f(Y,Z)+Y f(Z,X)+Z f(X,Y)=f([X,Y],Z)+f([Y,Z],X)+f([Z,X],Y)$$

$X f(Y,Z)=f([X,Y],Z)+f(Y,[X,Z])$. 相减得

$Y f(Z,X)+Z f(X,Y)=f([Y,Z],X)$. 轮换得

$X f(Y,Z)+Y f(Z,X)=f([X,Y],Z)$. 代入上上式得

$$Y f(Z,X)=f([X,Z],Y). \qquad (*)$$

注意 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. 所以上式说明 $f:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to V$ 的像落在 $V_r$ 中.

对 $\mathfrak{g}$ 模 $V_r$ 考虑上同调 $H^1(\mathfrak{g},V_r)=0$. $L_x f=0\Rightarrow \delta(i_x f)=0$. $i_x f\in Z^1$.

于是存在 $v_x\in V_r=C^0$, 使得 $i_x f=\delta(v_x)$ 或 $f(X,Y)=Y.v_x$.

对于一个 $X$. $v_x$ 是唯一的. 因为若有 $v_x^1, v_x^2$ 则 $Y(v_x^1-v_x^2)=0$ $\forall Y$, 所以 $v_x^1-v_x^2\in V_n\cap V_r=0$. 显然 $X\mapsto v_x$ 是线性的. 所以我们得到一个映射 $g:\mathfrak{g}\to V$. $X\mapsto v_x$. 满足 $f(X,Y)=Y.g(X)$. 将它代入$(*)$ 得 $Y.f(Z,X)=Y.g([X,Z])$. $\forall Y\in\mathfrak{g}$. 于是 $f(Z,X)=g([X,Z])$. 交换 $X$, $Y$ 的地位. 得 $f(X,Y)=-X.g(Y)$.

最后. $(\delta g)(X,Y)=X g(Y)-Y.g(X)-g([X,Y])$

$=-f(X,Y)$. 所以 $f=-\delta g$. 即 $f\in B^2$. □

Date:
Place:
Reminders

作业：证明 ～～ 部分（考虑映射
$V_1\oplus V_2 \to V,\ (v_1, v_2)\mapsto (i(v_1), s(v_2))$).

Date:
Place:
Reminders

~~注：① 若 $V$ 是 $\mathfrak{g}$ 的不可约模，则 $H^n(\mathfrak{g}, V)=0\ \forall n\geq 0$.~~
~~② 若 $V$ 是平凡模 $k^d$，则 $H^n(\mathfrak{g}, V) = (H^n(\mathfrak{g}, k))^d$.~~
~~而 $H^n(\mathfrak{g}, k)$ 当 $n\geq 3$ 时一般不为零。特别地~~
~~$\omega = \delta B$ 总是 $H^3(\mathfrak{g}, k)$ 中的非平凡元~~ 见后文。

## §2.9 Weyl 完全可约性定理

定理（Weyl）设 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数，$V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模，则存在 $V$ 的单子模 $V_1, \cdots, V_k$ 使 $V = V_1\oplus\cdots\oplus V_k$，且 $V_1\cdots V_k$ 在不记次序的意义下唯一。

以下总假设 $\mathfrak{g}$ 半单。

引理2. 设 $V_1, V_2, V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模，且 $0\to V_1 \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V_2 \to 0$.
则 $V \cong V_1\oplus V_2$.

证明：只需证存在 $\mathfrak{g}$ 模同态 $s: V_2\to V$ 使 $p\circ s = id_{V_2}$.
首先，$V\cong V_1\oplus V_2$（作为线性空间），所以不妨取 $V = V_1\oplus V_2$，然后考虑 $V$ 上可能的 $\mathfrak{g}$ 模结构。记 $\rho: \mathfrak{g}\to End(V)$，则

$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}$ 其中 $\rho_{ij}: \mathfrak{g}\to Hom(V_i, V_j)$.
再记 $\rho_i: \mathfrak{g}\to End(V_i)$，则应有 $\rho_i = \rho_{ii}$.

注意 $V_1$ 是子模，所以应有 $\rho_{21}\equiv 0$，于是 $V$ 上的子模结构完全由 $\rho_{12}$ 决定，记 $\pi=\rho_{12}:\mathfrak{g}\to \mathrm{Hom}(V_2,V_1)$，即是 $\mathfrak{g}$ ~~模~~ 的表示

$$\to \left[\begin{pmatrix}\rho_1(X) & \pi(X)\\ 0 & \rho_2(X)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\rho_1(Y) & \pi(Y)\\ 0 & \rho_2(Y)\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\rho_1([X,Y]) & \pi([X,Y])\\ 0 & \rho_2([X,Y])\end{pmatrix}.$$

于是有 $\pi([X,Y]) = \rho_1(X)\pi(Y)+\pi(X)\rho_2(Y)-\rho_1(Y)\pi(X)-\pi(Y)\rho_2(X)$.

注意 $\mathrm{Hom}(V_2,V_1)$ 也是 $\mathfrak{g}$ 模，$X$ 在 $f\in\mathrm{Hom}(V_2,V_1)$ 上的作用刚好是 $\rho_1(X)\circ f - f\circ\rho_2(X)$，记这个作用是 $L(X)$，那么有

$\pi([X,Y]) = L(X)(\pi)(Y) - L(Y)(\pi)(X)$，所以 $\pi\in Z^1(\mathfrak{g},\mathrm{Hom}(V_1,V_2))$.

因为 $\mathfrak{g}$ 半单，所以 $Z^1=B^1$，于是存在 $f\in\mathrm{Hom}(V_2,V_1)$，使 $\pi(X)=L(X)(f)$

即 $\pi(X)=\rho_1(X)\circ f - f\circ\rho_2(X)$，取 $s=(-f)\oplus \mathrm{id}_{V_2}$，则 $s$ 是 $\mathfrak{g}$ 模同态且 $p\circ s=\mathrm{id}_{V_2}$，于是 $V\cong V_1\oplus V_2$. □

引理3. 设 $V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模，且有两种不可约分解

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s = V_1'\oplus\cdots\oplus V_t'.$$

其中 $V_i, V_j'$ 都是单模（即没有非平凡子模），则 $s=t$，且存在 $\sigma:\{1,\dots,t\}\to\{1,\dots,s\}$ 使 $V_i'=V_{\sigma(i)}$.（留作作业）.

证明（定理1）：由引理2、3 显然. □

下面进一步考虑上同调.

Date:
Place:

Reminders

记 $\rho: \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$. 则 $\rho\neq 0$. 设 $K=\ker\rho$. 则 $\dim K<\dim\mathfrak{g}$.
设 $\mathfrak{g}'$ 是 $K$ 关于 $B_\rho$ 的正交补. 取 $\mathfrak{g}'$ 的基 $X_1,\cdots,X_m$. 取 $Y_1,\cdots,Y_m$ 关于 $B_\rho$ 的对偶基. 设 $w_\rho=\sum_{\alpha=1}^{m}\rho(X_\alpha)\rho(Y_\alpha)$. 则 $w_\rho$ 与所有 $\rho(z)$ ($z\in\mathfrak{g}$) 交换, 于是 $w_\rho$ 是数乘 (因为 $V$ 不可约). 因为 $tr_V(w_\rho)=\dim\mathfrak{g}'$. 所以 $w_\rho=\frac{\dim\mathfrak{g}'}{\dim V}>0$.

~~再取为~~ $X_{m+1}\cdots X_{m+m'}$
更好 (见下页)

~~记 $\rho: \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$. 则 $\rho\neq 0$. 设 $K=\ker\rho$. $\mathfrak{g}'=K^\perp$ (关于 $B_\rho$). 再取 $K$ 的基 $X'_1\cdots X'_{m'}$. 因为 $K$ 是理想. 所以半单. 所以其 Killing 型非退化. 取 $Y'_1\cdots Y'_{m'}$ 为 $X'_1\cdots X'_{m'}$ 的对偶基. 于是 $X_1\cdots X_m, X'_1\cdots X'_{m'}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基. 且关于 $B_K\oplus B_\rho$ 与 $Y_1\cdots Y_m, Y'_1\cdots Y'_{m'}$ 对偶. 取 $w=\sum X_\alpha Y_\alpha+\sum X'_\alpha Y'_\alpha$. 则 $\rho(w)=w_\rho$.~~

Date:
Place:

Reminders

引理4. 设 $V=V_1\oplus V_2$ (作为 $\mathfrak{g}$ 模). 则

$$H^n(\mathfrak{g},V)\cong H^n(\mathfrak{g},V_1)\oplus H^n(\mathfrak{g},V_2)$$

证明: 显然有 $C^n(\mathfrak{g},V)=C^n(\mathfrak{g},V_1)\oplus C^n(\mathfrak{g},V_2)$, 且这是 $\mathfrak{g}$ 模的直和. 所以 $\delta(C^n(\mathfrak{g},V_1))\subseteq C^{n+1}(\mathfrak{g},V_1)$. $\delta(C^n(\mathfrak{g},V_2))\subseteq C^{n+1}(\mathfrak{g},V_2)$. 于是 $Z^n=Z^n_1\oplus Z^n_2$. $B^n=B^n_1\oplus B^n_2$. 且 $B^n_i\subseteq Z^n_i$. □

所以只要对不可约模求出 $H^n(\mathfrak{g},V)$, 那么所有模的上同调就都知道了.

引理5 (Schur 引理). 设 $V$ 是不可约 $\mathfrak{g}$ 模. 若有 $\mathfrak{g}$ 模同态 $\varphi: V\to V$. 满足对 $\forall X\in\mathfrak{g}$, $[\varphi,\rho(X)]=0$. 则 $\varphi$ 是数乘.

证明: 设 $V_\lambda=\{v\in V \mid \varphi(v)=\lambda v\}$ 是 $\varphi$ 的某非零特征子空间. 则对 $\forall X\in\mathfrak{g}$. $\varphi(\rho(X)(v))=\rho(X)(\varphi(v))=\lambda\rho(X)(v)$. 所以 $V_\lambda$ 是子模. 因为 $V$ 不可约, 所以 $V_\lambda=0$ 或 $V$. 因为 $V_\lambda\neq 0$. 所以 $V_\lambda=V$. □

引理6. 设 $V$ 是非平凡不可约 $\mathfrak{g}$ 模. 则 $H^n(\mathfrak{g},V)=0$. $\forall n\geq 0$.

证明: 记 $\rho: \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$. 则 $\rho\neq 0$. 设 $K=\ker\rho$. $\mathfrak{g}'=K^\perp$
~~(关于 $B_\rho$). 取 $\mathfrak{g}'$ 的基 $X_1\cdots X_m$. 再取它们关于 $B_\rho$ 的对偶基 $Y_1\cdots Y_m$. 令 $w_\rho=\sum_{\alpha=1}^{m}\rho(X_\alpha)\rho(Y_\alpha)\in \mathrm{End}(V)$. 前面证明过 $w_\rho$ 与所有 $\rho(z)$ 交换, 且 $tr(w_\rho)=\dim\mathfrak{g}'$. 所以 $w_\rho$ 是数乘. 其数值是 $\frac{\dim\mathfrak{g}'}{\dim V}>0$.~~ 下面构造一个映射 $h: C^{n+1}\to C^n$.

Date:
Place:

Reminders

~~此处应取 $h$ 为 $h_m$! 这样 [illegible] 交换关系~~
~~$[X_\alpha, Z_i]$, $[Y_\alpha, Z_i]$ 未对. [illegible]~~

若 $Z_i \in K$, 则 $[X_\alpha, Z_i] = 0$, $[Y_\alpha, Z_i] = 0$. 所以 $W_i = 0$.
所以可假设所有 $Z_i \in \mathfrak{g}'$.

Date:
Place:

Reminders

对 $f \in C^{n+1}$. $h(f)(Z_1 \cdots Z_n) = \sum_{\alpha=1}^{m} \rho(X_\alpha)\left(f(Y_\alpha, Z_1 \cdots Z_n)\right)$.

引理: $\delta h + h\delta = \omega_\rho$.

证明: 取 $f \in C^n$.

$$\delta(h(f))(Z_1 \cdots Z_n) = \sum_i (-1)^{i+1} \rho(Z_i)\, h(f)(\hat{Z}_i) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} h(f)([Z_i Z_j], \hat{Z}_i, \hat{Z}_j)$$

$$= \sum_i (-1)^{i+1} \rho(Z_i) \left( \sum_\alpha \rho(X_\alpha) f(Y_\alpha, \hat{Z}_i) \right)$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \left( \sum_\alpha \rho(X_\alpha) f(Y_\alpha, [Z_i Z_j], \hat{Z}_i, \hat{Z}_j) \right)$$

$(i_{Y_\alpha}(\delta f) = L_{Y_\alpha} f - \delta(i_{Y_\alpha} f))$

$$h(\delta(f))(Z_1 \cdots Z_n) = \sum_\alpha \rho(X_\alpha)\, \underbrace{\delta(f)(Y_\alpha, Z_1 \cdots Z_n)}$$

$$= \sum_\alpha \rho(X_\alpha) \Big[ \rho(Y_\alpha)(f(Z_1 \cdots Z_n)) + \sum (-1)^i f([Y_\alpha, Z_i], \hat{Z}_i)$$

$$- \sum_i (-1)^{i+1} \rho(Z_i) f(Y_\alpha, \hat{Z}_i) - \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f(Y_\alpha, [Z_i Z_j], \hat{Z}_i, \hat{Z}_j) \Big].$$

$\Rightarrow (\delta h + h\delta)(f)(Z_1 \cdots Z_n) = \omega_\rho(f) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i W_i$. 其中

$$W_i = \sum_{\alpha=1}^{m} \Big[ [\rho(Y_\alpha), \rho(Z_i)]\, f(Y_\alpha, \hat{Z}_i) + \rho(X_\alpha) f([Y_\alpha, Z_i], \hat{Z}_i) \Big]$$

记 $[X_\alpha, Z_i] = \sum_\beta a_{\alpha\beta} X_\beta$. $[Y_\alpha, Z_i] = \sum_\beta b_{\alpha\beta} Y_\beta$. 则 $a_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha} = 0$.

$$W_i = \sum_{\alpha,\beta} \left( a_{\alpha\beta}\, \rho(X_\beta) f(Y_\alpha, \hat{Z}_i) + b_{\alpha\beta}\, \rho(X_\alpha) f(Y_\beta, \hat{Z}_i) \right) = 0.$$

□.

Date: 
Place: 

Reminders

大作业选题：$H^*(\mathfrak{g},\mathbb{k})$的计算

设$\mathbb{k}$是特征零的域，$\mathfrak{g}$是$\mathbb{k}$上的半单Lie代数。 以下简记$H(\mathfrak{g})=H^*(\mathfrak{g},\mathbb{k})$

① $H^*(\mathfrak{g},\mathbb{k})=\bigoplus_{n=0}^{\dim(\mathfrak{g})} H^n(\mathfrak{g},\mathbb{k})$ 是一个环。

② 若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ 则 $H^*(\mathfrak{g})\cong H(\mathfrak{g}_1)\otimes H(\mathfrak{g}_2)$

③ 设 $P_n=\dim H^n(\mathfrak{g},\mathbb{k})$ $P_{\mathfrak{g}}(t)=\sum_{n=0}^{\dim(\mathfrak{g})} P_n t^n$.

若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$，则 $P_{\mathfrak{g}}(t)=P_{\mathfrak{g}_1}(t)\cdot P_{\mathfrak{g}_2}(t)$

④ 若$\mathfrak{g}$是单的，则 $P_{\mathfrak{g}}(t)=(1+t^{2m_1+1})\cdots(1+t^{2m_\ell+1})$

其中 $1=m_1\le m_2\le\cdots\le m_\ell$ 是$\mathfrak{g}$的指数，$\ell$是$\mathfrak{g}$的秩。

证明有两种途径：拓扑的和代数的

拓扑证明(Hopf)：首先 $H^*(\mathfrak{g},\mathbb{k})$ 同构于 $H^*(G,\mathbb{k})$，其中$G$是以$\mathfrak{g}$为(紧)Lie代数的紧Lie群。其次，紧Lie群的上同调环同构于有限多个奇数维球面的上同调环的直积(Hopf定理)

代数证明：设 $I^n=\ker(L_x: C^n\to C^n)$，其元素叫做不变形式。则有 $H^n\cong I^n$ ~~接下来证明 $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}\cong I^{n+1}(\mathfrak{g})$ 最后利用Chevalley定理可证明 $S^*(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 同构于一个多项式~~

接着利用不变量理论的有关结果可以算出 $I^n$.

特别地，$\delta B$ 是 $H^3(\mathfrak{g})$ 的生成元.

(参考文献未知).

Date: 
Place: 

Reminders

对任何$V$，$V=V_n\oplus V_r$，由引理4,5,引理6.

$H^n(\mathfrak{g},V)=H^n(\mathfrak{g},V_n)=(H^n(\mathfrak{g},\mathbb{k}))^d$，其中 $d=\dim V_n$.

所以问题归结为求 $H^n(\mathfrak{g},\mathbb{k})$，这是一个非常不平凡的问题。

有兴趣的同学可以自行研究。

~~定理(Hopf) 设$\mathfrak{g}$是特征零域$\mathbb{k}$上的有限维半单Lie代数，则 $H^*(\mathfrak{g})$ 同构于~~

## §2.10 Levi分解定理

定义1：设$\mathfrak{g}$是Lie代数，若有满的Lie代数同态 $p:\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$，则称$\tilde{\mathfrak{g}}$为$\mathfrak{g}$的一个扩张。设 $\ker p=\mathfrak{h}$，则有短正合列

$$0\to\mathfrak{h}\to\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}\to 0$$

此时也称$\tilde{\mathfrak{g}}$是以$\mathfrak{h}$为核的一个$\mathfrak{g}$的扩张。

引理2. (a) $\mathfrak{g}$的(一)以$\mathfrak{h}$为核的扩张由以下映射决定：① $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}$ 是$\mathfrak{g}$到$\mathrm{Der}(\mathfrak{h})$的线性映射

② $\psi:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一反称映射，它们满足 (不必是同态!)

i) $[\varphi(x),\varphi(y)]=\varphi([x,y])+\mathrm{ad}_{\psi(x,y)}$.

ii) $\varphi(x)(\psi(y,z))+\varphi(y)(\psi(z,x))+\varphi(z)(\psi(x,y))=\psi([x,y],z)+\psi([y,z],x)+\psi([z,x],y)$.

证明：留作作业。(参见前面核扩张时的推导。 □

(b) $\tilde{\mathfrak{g}}$是平凡的 ⟺ 存在映射 $\alpha:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$，使得

$$[\alpha(x),\alpha(y)]+\varphi(x)\alpha(y)-\varphi(y)\alpha(x)+\psi(x,y)=\alpha([x,y]).$$

引理3. 若扩张 $0\to\mathfrak{h}\to\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}\to0$ 是直积.
则存在映射 $\alpha:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$, 使得
① $\varphi(x)=\mathrm{ad}_{\alpha(x)}$
② $\psi(x,y)=[\alpha(x),\alpha(y)]-\alpha([x,y])$.

引理4. 若 $\mathfrak{h}$ 半单 则 $0\to\mathfrak{h}\to\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}\to0$ 是直积.

(右边划掉的部分实际上给出上述两引理的证明.
这里给了下面那个更直接的证明. 且下面的证明更好, 因为
不必用到 $H^1(\mathfrak{g},V)=0$).

引理4. 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的半单理想 则存在 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的理想 $\mathfrak{a}$,
使 $\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{a}$.

证明: 设 $\mathfrak{r}=\mathrm{rad}(\tilde{\mathfrak{g}})$. 则 $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{r}=0$. 于是
$\mathfrak{h}\cong\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{r})\cong\mathfrak{h}+\mathfrak{r}/\mathfrak{r}$, 它若是 $\mathfrak{g}^{ss}=\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$ 中的半单理想.
于是存在 $\mathfrak{g}^{ss}$ 中的理想 $\bar{\mathfrak{a}}$. 使 $\mathfrak{g}^{ss}\cong(\mathfrak{h}+\mathfrak{r})/\mathfrak{r}\oplus\bar{\mathfrak{a}}$. 于是有 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中
包含 $\mathfrak{r}$ 的理想 $\mathfrak{a}$, 使 $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}\cong\bar{\mathfrak{a}}$. 因为 $(\mathfrak{h}+\mathfrak{r})/\mathfrak{r}\cap\bar{\mathfrak{a}}=0$. 所以
$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{r}$. 但 $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{r}=0$. 所以 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}=0$. 于是
$\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{a}$. (因为 $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{a}\cong(\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{r})\cong\mathfrak{g}^{ss}/\bar{\mathfrak{a}}\cong\mathfrak{h}$) □.

引理3. 若扩张 $0\to\mathfrak{h}\to\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}\to0$ 可裂. 则
存在线性映射 $\alpha:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$, 使得
① $\varphi(x)=\mathrm{ad}_{\alpha(x)}$
② $\psi(x,y)=[\alpha(x),\alpha(y)]-\alpha([x,y])$
证明: 若可裂. 则有映射 $s:\mathfrak{g}\to\tilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$. 它可能写为
$x\mapsto(x,-\alpha(x))$. 其中 $\alpha$ 需满足
① $[\mathrm{Im}(\alpha),\mathfrak{h}]=0$. ② $\alpha$ 使 $s$ 成为 Lie 代数同态.
由此可得 ① ②. ? □.

引理4. 若 $\mathfrak{h}$ 半单 则扩张 $0\to\mathfrak{h}\to\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}\to0$ 可裂.
证明: 设 $\varphi,\psi$ 为相应的映射. 对 $\forall x\in\mathfrak{g}$. $\varphi(x)$ 为 $\mathfrak{h}$ 上的导子.
但半单代数的导子都是内导子 ($H^1(\mathfrak{h},*)=0$). 所以存在 $\alpha(x)\in\mathfrak{h}$.
使 $\varphi(x)(a)=[\alpha(x),a]$. 于是 引理2 中的条件变为
$[\psi(x,y)+\alpha([x,y])-[\alpha(x),\alpha(y)],c]=0$. $\forall c\in\mathfrak{h}$.
注意 $Z(\mathfrak{h})=0$. 所以 $\psi(x,y)=[\alpha(x),\alpha(y)]-\alpha([x,y])$ 所以可裂. □

(见后补充) 引理5. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数. 则 "$\mathfrak{g}$ 的所有交换扩张可裂" 当且仅当 "$\mathfrak{g}$ 的所有扩张可裂".
证明: 设 $0\to\mathfrak{h}\xrightarrow{i}\tilde{\mathfrak{g}}\xrightarrow{\pi}\mathfrak{g}\to0$ 是扩张. 于是 $\dim\tilde{\mathfrak{g}}\geq\dim\mathfrak{g}$.
当 $\dim\tilde{\mathfrak{g}}=\dim\mathfrak{g}$ 时 由P薇知 [illegible]. 所以可裂.

此外有一误区：$\mathfrak{g}$ 半单时有 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$，但反过来，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$ 推不出 $\mathfrak{g}$ 半单。满足 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的 Lie 代数叫完美 Lie 代数 (perfect Lie algebra)。例如，$\mathfrak{g}$ 半单，$V$ 不可约 $\mathfrak{g}$ 模，则 $\tilde{\mathfrak{g}}=V\rtimes\mathfrak{g}$ 就是完美但不半单的 Lie 代数。我们有 $\mathrm{rad}(\tilde{\mathfrak{g}})=V$.

证明：半单 $\Rightarrow H^2(\mathfrak{g},V)=0 \Rightarrow \mathfrak{g}$ 的任一交换扩张可裂 $\Rightarrow \mathfrak{g}$ 的任一扩张可裂 □

下面对 $\dim\tilde{\mathfrak{g}}$ 归纳。假设对所有满足 $\dim\tilde{\mathfrak{g}}<n$ 的扩张引理成立，考虑 $\dim\tilde{\mathfrak{g}}=n$ 的情况。① 若 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=0$，则是交换扩张，于是可裂。② 若 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\neq 0$，设 $\bar{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}/[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$，$\bar{\mathfrak{g}}=\tilde{\mathfrak{g}}/[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$，则有正合列 $0\to\bar{\mathfrak{h}}\to\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}\to 0$。因为 $\dim[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]>0$，所以 $\dim\bar{\mathfrak{g}}<\dim\tilde{\mathfrak{g}}$，所以可裂，即存在 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的子代数同构于 $\mathfrak{g}$。于是存在 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的子代数 $\mathfrak{g}_1$，满足 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想，且 $\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=\mathfrak{g}$。因为 $\mathfrak{h}$ 可解，所以 $\dim[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]<\dim\mathfrak{h}$，则 $\dim\mathfrak{g}_1<\dim\tilde{\mathfrak{g}}$，于是 $\mathfrak{g}_1$ 可裂，于是又存在 $\mathfrak{g}_1$ 的子代数同构于 $\mathfrak{g}$。所以 $s:\mathfrak{g}\hookrightarrow\mathfrak{g}_1\hookrightarrow\tilde{\mathfrak{g}}$ 即为所求。 □

推论6. 若 $\mathfrak{g}$ 半单，则任何扩张 $\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$ 可裂 (即都是[illegible])

推论7 (Levi 分解定理) 对任一 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，存在 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数 $\mathfrak{s}$，使得 $\mathfrak{g}=\mathrm{rad}(\mathfrak{g})\rtimes\mathfrak{s}$

证明：设 $\mathfrak{g}^{ss}=\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$，则 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}^{ss})=0$，即 $\mathfrak{g}^{ss}$ 半单，且有正合列 $0\to\mathrm{rad}(\mathfrak{g})\to\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^{ss}\to 0$，于是存在 Lie 代数同态 $s:\mathfrak{g}^{ss}\to\mathfrak{g}$，取 $\mathfrak{s}=\mathrm{Im}(s)$ 即可 □

Levi 分解中的半单 Lie 子代数 $\mathfrak{s}$ 叫 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 因子。Levi 因子不是唯一的，不同的 Levi 因子相差一个自同构。

Date:
Place:

Reminders

此结果与引理5合并成"任一交换扩张可裂"⇔"任一扩张可裂"，于是推论6变成"半单的任一扩张可裂"

Date:
Place:

Reminders

即假设 $\mathfrak{g}=\mathrm{rad}(\mathfrak{g})\rtimes\mathfrak{h}_1=\mathrm{rad}(\mathfrak{g})\rtimes\mathfrak{h}_2$ 是两个Levi分解，则存在$\mathfrak{g}$的内自同构$\varphi$使$\mathfrak{h}_2=\varphi(\mathfrak{h}_1)$. $\mathfrak{g}$的任一半单子代数都包含在某一Levi因子中（更多性质参见Bourbaki or Jacobson）.

~~推论8：若$\mathfrak{g}$半单则任一扩张~~

~~$0\to\mathfrak{h}\to\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}\to0$ 可裂~~

~~证明：前面已经证明$\mathfrak{h}$可解和$\mathfrak{h}$半单的情形. 下面考虑一般情形. 设$\mathfrak{r}=\mathrm{rad}(\tilde{\mathfrak{g}})$. $\mathfrak{r}'=\mathfrak{h}\cap\mathrm{rad}(\tilde{\mathfrak{g}})$. 则$\mathfrak{h}+\mathfrak{r}/\mathfrak{r}\cong\mathfrak{h}/\mathfrak{r}'$是$\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$的理想. 注意$\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$半单所以$\mathfrak{h}/\mathfrak{r}'$半单. 考虑正合列~~

~~$0\to\mathfrak{h}/\mathfrak{r}'\to\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}'\to\mathfrak{g}\to0.$~~

~~因为$\mathfrak{h}/\mathfrak{r}'$半单. 所以可裂 所以存在$\tilde{\mathfrak{g}}$的子代数$\mathfrak{g}_1$包含$\mathfrak{r}'$，且$\mathfrak{g}_1/\mathfrak{r}'\cong\mathfrak{g}$，于是有 $0\to\mathfrak{r}'\to\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}\to0$. 但$\mathfrak{r}'$是可解的. 所以存在$\mathfrak{g}_1$的子代数同构于$\mathfrak{g}$.~~ □.

引理5补

~~推论8~~：设$\mathfrak{g}$是Lie代数 $\mathfrak{g}$的任一交换扩张可裂⇔$\mathfrak{g}$的任一扩张可裂

证明：它与引理5的区别是去掉了可解二字. 设

$0\to\mathfrak{h}\to\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}\to0$ 是$\mathfrak{g}$的任一扩张

取$\mathfrak{r}=\mathrm{rad}(\tilde{\mathfrak{g}})$. $\mathfrak{r}'=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{r}$. 则$\mathfrak{h}+\mathfrak{r}/\mathfrak{r}\cong\mathfrak{h}/\mathfrak{r}'$是$\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$的理想

于是半单. 所以 $0\to\mathfrak{h}/\mathfrak{r}'\to\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}'\to\mathfrak{g}\to0$ 可裂.

Date:
Place:
Reminders

$A$ 的自同构群

即 $B \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ 是群同态. 因为我们没有讲 $\mathrm{Aut}(A)$ →
所以此处避免这一概念.

作业: 证明这一论断. →

Date:
Place:
Reminders

于是存在 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{g}_1$, 包含 $\mathfrak{r}'$, 且 $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{r}' \cong \mathfrak{g}$. 于是

$$0 \to \mathfrak{r}' \to \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g} \to 0$$

正合. 因为 $\mathfrak{r}'$ 可解. 所以可裂. □

## §2.11. Lie 的第三结构定理.

定理1. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的 Lie 代数. 则存在一个单连通连通 Lie 群 $G$, 使 $\mathfrak{g}$ 是 $G$ 的 Lie 代数.

我们要利用 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 分解, 所以首先要考虑 Lie 群的半直积.

定义2. 设 $A, B$ 是连通 Lie 群. ~~$t: B \to \mathrm{Aut}(A)$ 是 $B$ 到 $A$ 的自同构群的同态~~ $t: A\times B \to A$ 是一个解析映射满足 i) 对任意的 $b\in B$. $t_b: A\to A$, $a \mapsto t(a,b)$ 是 Lie 群同构.
ii) 对 $\forall b_1, b_2 \in B$. $t_{b_1}\circ t_{b_2} = t_{b_1 b_2}$. iii) $t_{1_B} = \mathrm{id}_A$.

在 $G=A\times B$ 上定义两个运算

$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1 t_{b_1}(a_2), b_1 b_2).$$

$$(a,b)^{-1} = (t_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1})$$

以及 $1_G = (1_A, 1_B)$. 则 $(G, \cdot, ()^{-1}, 1_G)$ 构成一个连通 Lie 群, 叫做 $A, B$ 关于 $t$ 的半直积. 记为 $G = A \rtimes_t B$.

作业：证明 $A'$ 是正规的.

记 $a'=(a,1_B)$, $b'=(1_A,b)$. 则右式可写为

$$b'a'b'^{-1}=t_b(a)'$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\tau"] & GL(L(A)) \\ L(B) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r] & gl(L(A)) \arrow[u, "e"] \end{tikzcd}$$

故 $\sigma(Y)\in gl(L(A))$. 因为

所以 $e^{\sigma(Y)}=\tau_{\exp(Y)}$. 因为 $\tau_{\exp(Y)}$ 是 $L(A)$ 的自同构

所以 $[e^{\sigma(Y)}(a_1), e^{\sigma(Y)}(a_2)]=e^{\sigma(Y)}([a_1,a_2])$ 将 $Y$ 换成 $tY$, 并取导 $t=0$

得 $[\sigma(Y)(a_1), a_2]+[a_1,\sigma(Y)(a_2)]=\sigma(Y)([a_1,a_2])$. 所以 $\sigma(Y)$ 是 $L(A)$ 的导子



设 $A'=A\times\{1_B\}\subseteq G$, $B'=\{1_A\}\times B$. 则 $A'$ 是 $G$ 的闭正规子群, $B'$ 是 $G$ 的闭子群. 且有恒等式

$$(1_A,b)(a,1_B)(1_A,b)^{-1}=(t_b(a),1_B).$$

设 $G^*=A\times_t B$ 是 $A,B$ 的半直积. 则对 $\forall b\in B$, $t_b$ 是 $A$ 的自同构. 于是 $\tau_b=dt_b$ 是 $L(A)$ 的自同构. 且有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t_b"] & A \\ L(A) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\tau_b"] & L(A) \arrow[u, "\exp"] \end{tikzcd}$$

即对 $\forall X\in L(A)$, $t_b(\exp X)=\exp(\tau_b(X))$ (*)

~~因为 b 是同态 所以~~ 由 $t_b$ 满足的性质 且 $\tau_b$ 都是 $L(A)$ 的自同构,

可知 $b\mapsto\tau_b$ 是 $B$ 到 $GL(L(A))$ 的群同态. 由(*)可知这个映射 $\tau$ 是解析的. 设 $\sigma=d\tau$, 则对 $\forall Y\in L(B)$, $\sigma(Y)$ 是 $L(A)$ 上的导子. 于是我们得到一个同态 $\sigma: L(B)\to Der(L(A))$. 从而可定义 $L(A)\times_\sigma L(B)$.

定理3. $L(G)$ 同构于 $L(A)\times_\sigma L(B)$.

证明: 设 $L(A)=\mathfrak{a}$, $L(B)=\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\times_\sigma\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}'=L(G)$.
因为 $A'$, $B'$ 是 $G$ 的闭子群, 所以它们定义了 $\mathfrak{g}'$ 中的子代数 $\mathfrak{a}'$ 和 $\mathfrak{b}'$ 分别同构于 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$. 因为 $A'$ 正规, 所以 $\mathfrak{a}'$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的理想. 因为 $A'\cap B'=e$, 所以 $\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{b}'=0$. 因为 $A'B'=G$, 所以 $\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'=\mathfrak{g}'$. 即 $\mathfrak{g}'=\mathfrak{a}'\oplus\mathfrak{b}'$ 作为线性空间.

设 $X\mapsto X'$ $(Y\mapsto Y')$ 是 $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}'$ $(\mathfrak{b}\to\mathfrak{b}')$ 的同构.

定理4：若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\rtimes_{\sigma}\mathfrak{b}$. 且存在单连通Lie群A,B使 $\mathfrak{a}=L(A)$, $\mathfrak{b}=L(B)$. 则存在单连通Lie群G, 使 $\mathfrak{g}=L(G)$.

$a'=\exp X'$

在 $b'a'b'^{-1}=\tau_b(a)'$ 中取 $a=\exp X$. 则有

$$b'\exp(X')b'^{-1}=\tau_b(\exp X)'=\exp(\tau_b(X))'$$

将X换成tX, 并 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$ 得 $\tau_b(X)'=Ad_G(b')(X')$.

~~再对b微分~~ 将b换成 $\exp(tY)$, 并取 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$ 得

$\sigma(Y)(X)'=[Y',X']_{\mathfrak{g}'}$. 而在 $\mathfrak{g}$ 上同样有 $\sigma(Y)(X)=[Y,X]_{\mathfrak{g}}$

由此不难证明 $\mathfrak{g}'\cong\mathfrak{g}$. □

~~证明~~ 因为B单连通, 所以由Lie的第二结构定理, 存在Lie群同

~~定理4 设A,B是单连通连通Lie群. $\mathfrak{a}=L(A)$, $\mathfrak{b}=L(B)$. $\sigma:\mathfrak{b}\to Der(\mathfrak{a})$ 是Lie代数同态. 则存在唯一的~~ 构.

态 $\tau: B\to GL(\mathfrak{a})$, 且对 $\forall b\in B$, $\tau_b$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个Lie代数同

~~因此 $t_b$ 是A的Lie群同构的微分~~ 因为A单连通, 所以存在

唯一的Lie群同构 $t_b: A\to A$ 使 $dt_b=\tau_b$. t显然是解析

的. 于是可构造Lie群G, 使 $G=A\rtimes_t B$. □

~~定理5 证明(定理3)~~

引理5：若 $\mathfrak{g}$ 是可解Lie代数, 则存在一个单连通连通Lie群G, 使 $L(G)\cong\mathfrak{g}$.

证明：因为 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] < \mathfrak{g}$. 所以可取 $\mathfrak{g}$ 的余维 1 的理想 $\mathfrak{a}$, 满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$. 对 $\dim \mathfrak{g}$ 归纳. 若 $\dim \mathfrak{g} = 1$, 结论显然成立. 假设引理对 $\dim < n$ 的 $\mathfrak{g}$ 都成立. 考虑一个 $\dim(\mathfrak{g}) = n$ 的可解 Lie 代数. 因为 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$, 所以可取一个包含 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的余维 1 的子空间 $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ 显然是理想 (因为 $[\mathfrak{g},\mathfrak{a}] \subseteq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$). 取 $\mathfrak{a}$ 的一维补空间 $\mathfrak{b}$. 则 $\mathfrak{b}$ 显然是子代数 (因为 $[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] = 0$). 定义一个映射 $\sigma: \mathfrak{b} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$, $Y \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)$. 则 $\sigma(Y)$ 是 $\mathfrak{a}$ 的导子. 故可看出 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \rtimes_\sigma \mathfrak{b}$. 由归纳假设, 存在单连通 Lie 群 $A$ 和 $B$ 使 $L(A) \cong \mathfrak{a}$, $L(B) \cong \mathfrak{b}$. 于是, 由前面的构造, 存在 $G$, 使 $\mathfrak{g} \cong L(G)$. $\square$

引理6. 若 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数, 则存在单连通 Lie 群 $G$, 使 $\mathfrak{g} \cong L(G)$.

证明：因为 $Z(\mathfrak{g}) = 0$. 所以 $\ker(\mathrm{ad}) = Z(\mathfrak{g}) = 0$. 于是 $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是单射. 于是存在 $GL(\mathfrak{g})$ 的子群 $G'$, 使 $L(G') \cong \mathfrak{g}$. 设 $G$ 是 $G'$ 的万有覆盖群, 则 $G$ 单连通, 且 $L(G) \cong \mathfrak{g}$. $\square$

证明(定理1). 对 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 因为 $\mathfrak{g} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \rtimes \mathfrak{s}$, $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 可解, $\mathfrak{s}$ 半单, 所以由定理4, 引理5, 引理6 知, 存在单连通 Lie 群 $G$, 使 $L(G) \cong \mathfrak{g}$. $\square$

大作业选题：Ado定理

定理(Ado) 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$上的有限维Lie代数，$\mathfrak{n}$是$\mathfrak{g}$的Jacobson幂零根（即所有幂零理想之和），则存在$\mathfrak{g}$的忠实表示 $\rho: \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$，使得对$\forall x\in\mathfrak{n}$，$\rho(x)$是$V$上的幂零变换。

(Ref. GTM102 §3.17)

注：① 特征零的条件其实不是必须的，类似定理对特征p也适用，此时定理叫做Iwasawa定理，证明可参见Jacobson.

② Ado定理表明任何Lie代数都是某个 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{k})$ (over $\mathbb{k}$) 的子代数，于是存在$GL(n,\mathbb{k})$的子群$G'$，使$L(G')\cong\mathfrak{g}$。于是设$G$是$G'$的万有覆盖群，则$G$单连通且$L(G)=\mathfrak{g}$。所以这给出了Lie的第三定理的另一种证明。

③ 对任一Lie群$G$，设$\mathfrak{g}=L(G)$，则$\mathfrak{g}$是某一矩阵群的Lie代数，于是$G$局部同构于矩阵群，但一般来说，任一Lie群未必整体同构于矩阵群。例如 $G=SL(n,\mathbb{R})$，$\tilde{G}$是$G$的万有覆盖群，则$\tilde{G}$没有忠实表示。(Ref GTM102 练习15.)

第二章



~~Ado定理~~ Ch 3 复半单Lie代数.

## §3.1 Cartan子代数.

在本章中总假设 $\mathbb{k}=\mathbb{C}$，所有Lie代数及其模都是有限维的.

定义1：设$\mathfrak{h}$是一个Lie代数，$V$是一个$\mathfrak{h}$模（$\pi: \mathfrak{h}\to\mathrm{End}(V)$），对任意$\alpha\in\mathfrak{h}^*$，定义

$V_\alpha=\{v\in V \mid (\pi(H)-\alpha(H)\mathrm{id}_V)^n v=0,\ \forall H\in\mathfrak{h}, 和某个\ n=n(H,v)\}$.

若$V_\alpha\neq 0$，则称$V_\alpha$为一个广义权空间，$\alpha$为相应的权，$V_\alpha$的元素叫广义权向量.

命题1. 设$\mathfrak{h}$幂零，则存在$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathfrak{h}^*$，使得

i) $V_{\alpha_i}$是$V$的子模，且 ii) $V=\bigoplus_{i=1}^m V_{\alpha_i}$.

证明：i) 对固定的$H$，定义 $V_{\alpha,H}=\{v\in V \mid (\pi(H)-\alpha(H)\mathrm{id}_V)^n v=0,\ \text{for some } n\}$. 于是 $V_\alpha=\bigcap_{H\in\mathfrak{h}} V_{\alpha,H}$. 下证每个$V_{\alpha,H}$都是$\pi(\mathfrak{h})$不变的。定义 $\mathfrak{h}_{(m)}=\{Y\in\mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}_H^m(Y)=0\}$. 于是 $\mathfrak{h}_{(0)}\subseteq\mathfrak{h}_{(1)}\subseteq\cdots$ 且 $\mathfrak{h}=\bigcup_{m=0}^{\dim\mathfrak{h}}\mathfrak{h}_{(m)}$，下面归纳证对$\forall Y\in\mathfrak{h}_{(m)}$，有$\pi(Y)V_{\alpha,H}\subseteq V_{\alpha,H}$. 若$m=0$，则$\mathfrak{h}_{(m)}=0$，结论显然。下假设对$\forall Y\in\mathfrak{h}_{(m-1)}$，结论成立，考虑$Y\in\mathfrak{h}_{(m)}$，取$A=\pi(H)-\alpha(H)\mathrm{id}_V$，$B=\pi(Y)$，由归纳法易证 $A^l B=BA^l+\sum_{s=0}^{l-1}A^{l-1-s}[A,B]A^s$. 对于 $v\in V_{\alpha,H}$，存在$N$ ($2\dim V$) 使 $A^N v=0$. 取$l=2N$，于是 $A^{2N}Bv=\sum_{s=0}^{N-1}A^{2N-1-s}[A,B]A^s v$. 其中$A^s v\in V_{\alpha,H}$(定义)，$[A,B]A^s v\in V_{\alpha,H}$. ($[A,B]=\pi([H,Y])$，且$[H,Y]\in\mathfrak{h}_{(m-1)}$，所以由归纳假设，$V_{\alpha,H}$是$[A,B]$不变的)。$2N-1-s\geq N$. 于是 $A^{2N}Bv=0$，即$\pi(Y)v\in V_{\alpha,H}$.

Date:
Place:

Reminders

ii) 设 $H_1 \cdots H_r$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组基. $\pi(H_1)$ 的 Jordan 分解给出 $V$ 的广义特征子空间分解 $V = \bigoplus_{\lambda_1} V_{\lambda_1,H_1}$. 由 i) $V_{\lambda_1,H_1}$ 是 $\pi(\mathfrak{h})$ 不变的. 所以 $\pi(H_2)$ 又可在 $V_{\lambda_1,H_1}$ 上作广义特征子空间分解. 于是有

$$V = \bigoplus_{\lambda_1,\lambda_2} V_{\lambda_1,H_1} \cap V_{\lambda_2,H_2},$$

其中每个交都是 $\pi(\mathfrak{h})$ 不变的. 于是又可继续分解. 最后 $V = \bigoplus_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} (V_{\lambda_1,H_1} \cap \cdots \cap V_{\lambda_r,H_r})$. 对于每个使交 $V_{\lambda_1,H_1} \cap \cdots \cap V_{\lambda_r,H_r}$ 不空的 $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, 定义一个 $\alpha: \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, $\alpha(H_i) = \lambda_i$. 则 $V = \bigoplus_{\alpha} V_\alpha$. $\square$

命题3. 设 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数. $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数. 则 $\mathfrak{g}$ 可视为 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$ 模. 于是有相应的权空间分解.

a) $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$. $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}\,H - \alpha(H)\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^n X = 0.\ \forall H \in \mathfrak{h}$ 及某 $n\}$

b) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$  c) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ (若 $\alpha+\beta$ 不是权. 则 $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$)

证明: a) 由命题2. b). $\mathfrak{h}$ 幂零 $\Rightarrow \mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上幂零 $\Rightarrow \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$.

c) 由以前证过的恒等式即可证明

$$(\mathrm{ad}\,H - (\alpha(H)+\beta(H))\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^n [X, Y]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(\mathrm{ad}(H) - \alpha(H))\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^k X, (\mathrm{ad}(H) - \beta(H))\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{n-k} Y]$$ $\square$

推论: $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $(0+0=0)$.

定义4. $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 叫 Cartan 子代数, 如果 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.
CSA

Date:
Place:

Reminders

$\mathfrak{g}_{0,X}=\{Y\in\mathfrak{g} \mid ad_X^n(Y)=0，对某n\}$.

Date:
Place:

Reminders

命题5. $\mathfrak{h}$是CSA $\iff$ $\mathfrak{h}$幂零，且 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\{X\in\mathfrak{g} \mid [X,\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}\}=\mathfrak{h}$.

证明：首先显然有 $\mathfrak{h}\subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{g}$。所以 $\Rightarrow$ 显然。反之，若 ~~$\mathfrak{h}=N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$，且 $\neq\mathfrak{g}$~~ $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$。因为 $\mathfrak{h}$ 是 $ad_{\mathfrak{h}}$ 模 $\mathfrak{g}$ 的子模，考虑商模 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$，因为 $\mathfrak{h}$ 可解，所以存在 $X+\mathfrak{h}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$，使得 $X\notin\mathfrak{h}$，且 $X+\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的公共特征向量，即 $[H, X+\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$，即 $[H,X]\in\mathfrak{h}$，所以 $X\in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$。因为 $X\notin\mathfrak{h}$，所以 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\neq\mathfrak{h}$. □

定理6. 对任意$\mathfrak{g}$，存在一个CSA.

证明之前先引入一个概念。对 $\forall X\in\mathfrak{g}$，$ad_X\in End(\mathfrak{g})$，于是可定义 $ad_X$ 的特征多项式

$$f(\lambda)=\det(\lambda Id_{\mathfrak{g}}-ad_X)=\lambda^n+\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(X)\lambda^i$$

其中 $\alpha_i$ 是从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathbb{C}$ 的多项式映射，次数为 $n-i$。因为 $ad_X(X)=0$，所以 $X$ 是 $ad_X$ 的特征值为零的特征向量，所以所有 $ad_X$ 都至少有一个零特征值，即 $\alpha_0(X)\equiv0$。设 $i_0$ 是最小的 $i$，使得 $\alpha_i\not\equiv0$。则 $i_0$ 叫做 $\mathfrak{g}$ 的秩，记为 $rk(\mathfrak{g})$。若 $X\in\mathfrak{g}$ 满足 $\alpha_{rk(\mathfrak{g})}(X)\neq0$，则称 $X$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的正规元。（非正规元即 $\alpha_{rk(\mathfrak{g})}(X)$ 的零点集，所以是一个仿射簇，于是正规元构成一个开稠子集）.

定理6' 若 $X$ 正规，则 $\mathfrak{g}_{0,X}$ 是一个CSA.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

证明：首先证明 $\mathfrak{g}_{0,X}$ 幂零，若不然，定义

$A=\{z\in\mathfrak{g}_{0,X} \mid (\mathrm{ad}z|_{\mathfrak{g}_{0,X}})^{\dim\mathfrak{g}_{0,X}}\neq 0\}$，则 $A$ 非空(Engel定理)，且开。

$B=\{w\in\mathfrak{g}_{0,X}\mid \mathrm{ad}w|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{0,X}}$ 非退化$\}$，则 $B$ 非空(因为 $X\in B$)，且开稠。

于是 $A$，$B$ 一定有非空的交。设 $z\in A\cap B\subseteq \mathfrak{g}_{0,X}$，则

$(\mathrm{ad}z|_{\mathfrak{g}_{0,X}})^{\dim \mathfrak{g}_{0,X}}\neq0$，$(\mathrm{ad}z)|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{0,X}}$ 非退化。

于是 0 作为 $\mathrm{ad}z$ 的广义特征值的重数 $<\dim\mathfrak{g}_{0,X}$，即 $\dim\mathfrak{g}_{0,z}<\dim\mathfrak{g}_{0,X}$，这与 $X$ 正规矛盾。

因为 $\mathfrak{g}_{0,X}$ 幂零，所以可用它对 $\mathfrak{g}$ 做权空间分解。设 $\mathfrak{g}_0$ 是权为0的广义权空间，则有 $\mathfrak{g}_{0,X}\subseteq\mathfrak{g}_0=\bigcap_{Y\in\mathfrak{g}_{0,X}}\mathfrak{g}_{0,Y}\subseteq\mathfrak{g}_{0,X}$

所以 $\mathfrak{g}_{0,X}=\mathfrak{g}_0$。所以 $\mathfrak{g}_{0,X}$ 是CSA. □.

定理7. 若 $\mathfrak{g}$ 半单，$\mathfrak{h}$ 是CSA，则 $\mathfrak{h}$ 交换。

证明：$\mathfrak{h}$ 幂零，于是 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 的分解，于是可取基使 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$ 同时上三角化，对于上三角矩阵 $A,B,C$，有 $\mathrm{Tr}([A,B]C)=0$。于是对 $\forall H_1,H_2,H\in\mathfrak{h}$，有 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}[H_1,H_2]\,\mathrm{ad}H)=0$。

接下来，设 $\alpha$ 是 $\mathfrak{h}$-模 $\mathfrak{g}$ 的一个非零权，$X\in\mathfrak{g}_\alpha$ ($X\neq0$)，于是 $\mathrm{ad}H\,\mathrm{ad}X$ 将 $\mathfrak{g}_\beta$ 映到 $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，所以 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}H\,\mathrm{ad}X)=0$。取 $H=[H_1,H_2]$，有 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}[H_1,H_2],\mathrm{ad}X)=0$。

因为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\sum_{\alpha\neq0}\mathfrak{g}_\alpha$，因为 $\mathfrak{h}$ 是CSA，所以 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$，于是上述两等式说明 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}[H_1,H_2],\mathrm{ad}X)=0$ $\forall X\in\mathfrak{g}$。因为 $B$ 非退化，所以必

这里有一个遗漏的定理

定理8. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $End(V)$ 的某一半单子代数. 则对 $\forall x\in\mathfrak{g}$, $x_s$ 和 $x_n$ 都属于 $\mathfrak{g}$.

证明：设 $x=x_s+x_n$ 是 $x\in\mathfrak{g}$ 在 $End(V)$ 中的 JC 分解. 因为 $ad_x(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{g}$ 则 $ad_{x_s}(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{g}$, $ad_{x_n}(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{g}$. 换句话说, ~~$ad_{x_s}, ad_{x_n}\in$~~ $x_s, x_n\in N_{End(V)}(\mathfrak{g})=:N$. 若能证明 $N=\mathfrak{g}$ 则定理证完. 遗憾的是 $N$ 一般不等于 $L$ (例如 $N_{gl(V)}(sl(V))$ 包含数乘变换) 下面要证明 $x_s, x_n$ 在 $N$ 的一个更小的子代数里.

设 $W$ 是 $V$ 的子模. 定义 $\mathfrak{g}_W=\{y\in gl(V) \mid y(W)\subseteq W, Tr(y|_W)=0\}$. 因为 $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, 所以 $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{g}_W$. 设 $\mathfrak{g}'=N\cap\bigcap_W \mathfrak{g}_W$, 则 $\mathfrak{g}'$ 是 $N$ 的子代数. 且 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的理想. 若 $x\in\mathfrak{g}$. 则 $x_s, x_n\in\mathfrak{g}'$ (因为 $x_s, x_n$ 在所有 $\mathfrak{g}_W$ 中)

下证 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'$. $\mathfrak{g}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 模, 且 $\mathfrak{g}$ 是其中的子模. 因为 $\mathfrak{g}$ 半单. 所以 $\mathfrak{g}'$ 可分解为 $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}\oplus M$. 因为 $\mathfrak{g}'\subseteq N$. 所以 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}']\subseteq\mathfrak{g}$. 所以 $\mathfrak{g}$ 在 $M$ 上的作用平凡. 对于 $V$ 的任一不可约子模 $W$, 以及 $y\in M$, 因为 $[\mathfrak{g},y]=0$. 所以 $y$ 在 $W$ 上作用为标量 (Schur 引理). 因为 $y\in\mathfrak{g}_W$, 所以 $Tr(y|_W)=0$ 所以 $y$ 在 $W$ 上作用为零. 因为 $V$ 写为不可约子模的直和. 所以 $y$ 恒为零. 所以 $M=0$ 于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'$.

有 $[H_1,H_2]=0$. 于是 $\mathfrak{h}$ 交换. □

(Engel定理)

设 $\mathfrak{g}$ 半单, 则 $ad_x$ 不可能全是幂零的 所以至少有一个 $x\in\mathfrak{g}$, $ad_x$ 有半单部分. 由左边的引理 $ad_{x_s}\in\mathfrak{g}$ 且半单. 于是 $\mathfrak{g}$ 中存在半单元. 于是存在全由半单元组成的 Lie 代数 (例如 $Span\, x_s$). 这样的子代数叫圆环子代数.

引理9. $\mathfrak{g}$ 的圆环子代数是交换的.

证明：设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的圆环子代数. 要证明 $ad_{\mathfrak{h}}(x)=0$, 对所有 $x\in\mathfrak{h}$. 因为 $ad_{\mathfrak{h}}x$ 可对角化, 所以只需证 $ad_x$ 没有非零特征值. 假设 $[x,y]=ay$, $a\neq 0$, $y\in\mathfrak{h}$. 则 $[y,x]=-ay$ 是 $ad_{\mathfrak{h}}y$ 的以零为特征值的特征向量. 另一方面, 因为 $y$ 半单. 所以 $x$ 可写为 $y$ 的特征向量的线性组合, $x=\sum x_i$. 于是 $[y,x]=\sum\lambda_i x_i$, 其中每个 $\lambda_i$ 都非零. 这与前面的断言 ($[y,x]$ 是 $y$ 的特征值为零的特征向量) 矛盾. □

此处只证 $\Leftarrow$. $\Rightarrow$ 见§3.3.

定理10. 设 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 则 $\mathfrak{h}$ 是 CSA $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{h}$ 是一个极大圆环子代数

证明：设 $\mathfrak{h}$ 是极大圆环的 于是 $\mathfrak{h}$ 交换, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\bigoplus_{\alpha\neq 0}\mathfrak{g}_\alpha$. 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $ad_{\mathfrak{h}}$ 的权空间分解. 其中 $\mathfrak{g}_0$ 又可分解为 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}\oplus k$.

Date:
Place:
Reminders

(续前)

设 $\mathfrak{g}$ 半单，$X\in\mathfrak{g}$. 于是 $\mathrm{ad}X$ 是导子. 根据前面的某定理 $(\mathrm{ad}X)_s$ 和 $(\mathrm{ad}X)_n$ 都是导子. 因为 $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$. 于是 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}=\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$. 且 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 是同构. 所以存在 $X_s, X_n\in\mathfrak{g}$，使 $(\mathrm{ad}X)_s=\mathrm{ad}(X_s)$，$(\mathrm{ad}X)_n=\mathrm{ad}(X_n)$. 于是 $X=X_s+X_n$. 这叫做 $X$ 的抽象 JC 分解.

推论：若 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{End}(V)$ 的半单代数，则 $X\in\mathfrak{g}$ 的抽象 JC 分解和通常 JC 分解等价.

证明：设 $X=X_s+X_n$ 是通常 JC 分解. 则 $X_s, X_n\in\mathfrak{g}$. 且有 $\mathrm{ad}_X=\mathrm{ad}_{X_s}+\mathrm{ad}_{X_n}$. $\mathrm{ad}X_s$ 半单. $\mathrm{ad}X_n$ 幂零. $[\mathrm{ad}X_s,\mathrm{ad}X_n]=0$. 由 JC 分解的唯一性知，它们也是抽象 JC 分解. □

推论：若 $V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模，$\rho:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$. $X=s+n$ 是 $X$ 的抽象 JC 分解. 则 $\rho(X)=\rho(s)+\rho(n)$ 是 $\rho(X)$ 的通常 JC 分解.

证明：考虑 $\rho(\mathfrak{g})\subseteq\mathrm{End}(V)$. 它是半单的. $\rho(X)=\rho(s)+\rho(n)$ 是 $\rho(X)$ 在 $\rho(\mathfrak{g})$ 中的抽象 JC 分解. 于是也是通常 JC 分解.

推论：若 $\mathfrak{g}$ 半单，$V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模. $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的圆环子代数，则 $\mathfrak{h}$ 在 $V$ 上的作用半单. 即存在 $V$ 的基，使 $\mathfrak{h}$ 中的元素都是对角矩阵.

且 $[\mathfrak{h},\gamma]=0$.

只需证 $\gamma=0$. 假设 $X\in\gamma$，$X\neq0$. 则 $\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}X$ 是一个交换子代数. 且包含 $\mathfrak{h}$. 因为 $\mathfrak{h}$ 极大. 所以 $X$ 一定不是半单的. 现在对 $\mathfrak{h}$ 模 $\mathfrak{g}$ 再做权空间分解，$\mathfrak{g}=\bigoplus\mathfrak{g}_\beta$. 并把 $\mathrm{ad}X$ 分解为 $s+n$. 因为每个 $\mathfrak{g}_\beta$ 是 $\mathrm{ad}X$ 不变的，所以也是 $s$、$n$ 不变的. $s$ 的作用即标量乘 $\beta(X)$. 对于 $Y\in\mathfrak{g}_\beta$，$Z\in\mathfrak{g}_\gamma$，$s[Y,Z]=(\beta(X)+\gamma(X))[Y,Z]$
$=[s(Y),Z]+[Y,s(Z)]$. 于是 $s$ 是导子. 因此 $s=\mathrm{ad}I$，$I\in\mathfrak{g}$.

因为 $[\mathfrak{h},X]=0$. 所以 $[\mathfrak{h},I]=0$. 因为 $\mathfrak{h}$ 极大环半单，所以 $I\in\mathfrak{h}$.

由 $\mathrm{ad}X=\mathrm{ad}I+n$ 得 $n=\mathrm{ad}J$. $J=X-I\in\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}X$. 至此我们不妨假设 $X$ 一开始就使得 $\mathrm{ad}X$ 是幂零的. $\mathrm{ad}X$ 在 $\mathfrak{g}$ 上幂零 $\Rightarrow$ 在 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}$ 上幂零. 将 $X$ 替换成 $J$. 于是 $\mathrm{ad}X$ 幂零.

因为 $X$ 是任取的. 所以 $\mathfrak{g}_0$ 幂零. 用 $\mathfrak{g}_0$ 再对 $\mathfrak{g}$ 做分解. 则权为零的权空间不可能比用 $\mathfrak{h}$ 作分解时更大. 所以只能是 $\mathfrak{g}_0$ 自己. 于是 $\mathfrak{g}_0$ 是一个 CSA. 设 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{g}_0$ 的分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\bigoplus_{\alpha\neq0}\mathfrak{g}_\alpha$. 则对 $X_0\in\mathfrak{g}_0$，$B(X,X_0)=\sum(\dim\mathfrak{g}_\alpha)\alpha(X)\alpha(X_0)$. 因为 $\mathrm{ad}X$ 幂零，所以 $\alpha(X)\equiv0$. 于是 $B(X,X_0)=0$. 另一方面，对于 $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，$B(X,X_\alpha)=0$（见定理7证明），所以 $B(X,\mathfrak{g})=0$，于是 $X=0$，矛盾.

~~若 $\mathfrak{h}$ 是 CSA. 对 $\mathfrak{g}$ 作分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\neq0}\mathfrak{g}_\alpha$. 在每个分量中取基. 则易知 $\mathfrak{h}$ 是圆环的. 若有更大的 $\mathfrak{h}'$，则 $\mathfrak{h}'$ 交换. 于是 $[\mathfrak{h}',\mathfrak{h}]=0$. 于是 $\mathfrak{h}'\subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. 所以 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\neq\mathfrak{h}$. 所以 $\mathfrak{h}$ 不是 CSA.~~ □

Date:
Place:
Reminders

大作业选题：共轭定理。

1. 设 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群，则它是 Lie 群（因为 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 是 $GL(\mathfrak{g})$ 的闭子群，因而是 Lie 子群）。

2. 若 $x\in\mathfrak{g}$ 幂零，则 $e^{\mathrm{ad}x}\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$。$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 中这样的元素生成的子群记为 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$，它是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 的正规子群。

3. $x\in\mathfrak{g}$ 叫强幂零的，如果存在 $y\in\mathfrak{g}$ 以及 $\mathrm{ad}\,y$ 的非零特征值 $\alpha$ 使 $x\in\mathfrak{g}_{\alpha,y}$。若 $x$ 强幂零，则 $\mathrm{ad}\,x$ 幂零（考虑 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}=\mathbb{C}y$ 的权空间分解，$\mathfrak{g}=\bigoplus_\beta \mathfrak{g}_\beta$，则 $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{g}_\beta)\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，所以幂零）。强幂零的 $x$ 的 $e^{\mathrm{ad}x}$ 生成的子群记为 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$，它在 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ 中正规。若 $\mathfrak{g}$ 半单，则 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})=\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$。

4. 若 $\mathfrak{g}$ 可解，$\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个 CSA，则存在 $\sigma\in\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 使 $\mathfrak{h}_2=\sigma(\mathfrak{h}_1)$（此时也称 $\mathfrak{g}$ 的任意两个CSA关于 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 共轭）（Borel 子代数

5. 设 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，若 $\mathfrak{b}$ 极大可解，则称 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Borel 子代数。
① 若 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数，则 $\mathfrak{b}=N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})$。
② $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数与 $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 的 Borel 子代数一一对应。

6. $\mathfrak{g}$ 的任意两个 Borel 子代数关于 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 共轭。
推论：$\mathfrak{g}$ 的任意两个 CSA 关于 $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 共轭。

*7. 若 $\mathfrak{g}$ 半单，则 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})=\mathrm{Int}(\mathfrak{g})\rtimes\Gamma(\mathfrak{g})$，其中 $\Gamma(\mathfrak{g})$ 是所谓的图自同构构成的子群。

Ref. GTM9 §16. Jacobson Ch IX.

Date:
Place:
Reminders

设 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个 CSA，则存在 $\mathfrak{g}$ 的内自同构 $a$，使 $a(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$（证明用到：因为设 ~~自同构~~ 群 ……）

## §3.2 $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ 的结构和表示。

设 $n\geq 1$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid tr(X)=0\}$。

引理1. $\mathfrak{g}$ 是半单的。

证明：只需证 $B:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ 非退化。取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{h_1,\cdots,h_n, e_{kl}\,(k\neq l)\}$，其中 $H_i=e_{i,i}-e_{i+1,i+1}$，则 $[H_i,H_j]=0$，$[H_i,e_{kl}]=(\delta_{ik}-\delta_{il}-\delta_{i+1,k}+\delta_{i+1,l})e_{kl}$。
于是可计算 ~~$B(h_i,h_j)=2(n+1)tr(h_i h_j)$，$B(h_i,e_{kl})=0\ (k\neq l)$~~

$$B(H_i,H_j)=tr(\mathrm{ad}(H_i)\mathrm{ad}(H_j))=\sum_{k\neq l}(\delta_{ik}-\delta_{il}-\delta_{i+1,k}+\delta_{i+1,l})(\delta_{jk}-\delta_{jl}-\delta_{j+1,k}+\delta_{j+1,l})$$
$$=2(n+1)(2\delta_{ij}-\delta_{i+1,j}-\delta_{i,j+1})=2(n+1)\,tr(H_i\cdot H_j).$$
$$B(H_i,e_{kl})=B\Big(H_i,\frac{1}{1+\delta_{k+1,l}}[H_k,e_{kl}]\Big)=(1+\delta_{k+1,l})^{-1}B([H_i,H_k],e_{kl})=0.$$
$$=2(n+1)\,tr(H_i\cdot e_{kl})$$
$$B(e_{ij},e_{i'j'})=2(n+1)\cdot\delta_{ij'}\cdot\delta_{ji'}=2(n+1)\,tr(e_{ij}\cdot e_{i'j'})$$

所以有 $B(x,y)=2(n+1)\cdot tr(x\cdot y)$，这是非退化的。因为若 $B(x,y)=0,\forall y$。取 $y=h_1,\cdots,h_n$ 可知 $X$ 中无 $h_i$。假设 $X$ 的某 $(i,j)$ 分量非零 $(i\neq j)$，则取 $y=e_{ji}$，可得此分量必为零，推出 $x=0$。因为 $B$ 非退化，所以 $\mathfrak{g}$ 半单。□

引理2. $\mathfrak{h}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(H_1\cdots H_n)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 CSA。

证明：~~若 …… $X\in\mathfrak{h}$ ……~~
对于 $\forall X\in\mathfrak{g}$，若 $[X,\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$，假设某 $X_{kl}\neq 0\ (k\neq l)$，则 $[H_k,X]_{kl}=(1+\delta_{k+1,l})X_{kl}=0$，矛盾。所以所有 $X_{kl}\,(k\neq l)=0$，即 $X\in\mathfrak{h}$，即 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$，$\mathfrak{h}$ 显然幂零，所以是 CSA。□

Date:
Place:

Reminders

作业：① 证明：设 $\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$. $H_i' = \Lambda^i$ $(i=1\dots n)$.

则 $\mathfrak{h}' = \mathrm{Span}(H_1', \dots, H_n')$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的一个 CSA

② 求 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}'$ 的权空间分解

(提示：将 $\Lambda$ 对角化 $\Lambda = PJP^{-1}$. 然后解方程

$[J^i, X] = \lambda X$)

→

$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ $(i=1\dots n)$ 叫做根系 $\Phi = \{\alpha_{k\ell} \mid k\neq \ell\}$ 的一组基. 任何 $\alpha_{k\ell}$ $(k<\ell)$ 叫 $\Phi$ 的正根. 对于正根 $\alpha_{k\ell}$. 有

$\alpha_{k\ell} = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{\ell-1}$. 于是正根总可写为基的非负线性组合.

$\alpha_{k\ell}$ $(k>\ell)$ 叫负根. 负根可写为基的非正线性组合.

Date:
Place:

Reminders

引理3. $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的权空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{k\neq \ell} \mathfrak{g}_{\alpha_{k\ell}}. \quad \mathfrak{g}_{\alpha_{k\ell}} = \mathbb{C} e_{k\ell} \ (k\neq\ell).$$

其中 $\alpha_{k\ell} \in \mathfrak{h}^*$. $\alpha_{k\ell}(H_i) = \delta_{ik} - \delta_{i\ell} - \delta_{i+1,k} + \delta_{i+1,\ell}$.

若取 $\lambda_k$ $(k=1\dots n+1) \in \mathfrak{h}^*$. $\lambda_k(\sum u_i H_i) = u_k - u_{k-1}$ (规定 $u_0 = 0$, $u_{n+1}=0$)

则 $\alpha_{k\ell} = \lambda_k - \lambda_\ell$.

引理4. $\mathfrak{n} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_{ij} \mid i<j\}$. $\mathfrak{n}_- = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_{ij} \mid i>j\}$.

$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. 则 $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_-$ 幂零. $\mathfrak{b}$ 可解. $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ 叫 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解.

引理5. $\mathfrak{n}$ 可由 $E_i = e_{i,i+1}$ $(i=1\dots n)$ 生成 $\mathfrak{n}_-$ 可由 $F_i = e_{i+1,i}$ $(i=1\dots n)$

生成. 它们满足：① $[H_i, E_j] = a_{ij} E_j$ ② $[H_i, F_j] = -a_{ij} F_j$ ③ $[E_i, F_j] = \delta_{ij} H_i$

其中 $a_{ij}$ 为矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的第 $(i,j)$ 个元素.

另外还有 ④ $\mathrm{ad}_{E_i}^{1-a_{ij}}(E_j) = 0$ $(i\neq j)$ $\mathrm{ad}_{F_i}^{1-a_{ij}}(F_j) = 0$ $(i\neq j)$.

$\mathfrak{g}$ 可由 $\{E_i, F_i\}_{i=1}^n$ 生成. $\{E_i, H_i, F_i\}_{i=1}^n$ 叫 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 生成元.

$V_\lambda = \{v \in V \mid H.v = \lambda(H) v\}$

引理6. 设 $V$ 是 $\mathfrak{g}$ 模. 则 $\mathfrak{h}$ 在 $V$ 上对角, 即 $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$.

若 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 使 $V_\lambda$ 非零 则称 $\lambda$ 为 $V$ 的一个权.

引理7. $v\in V$. 以下等价

i) $v$是$\mathfrak{b}$的公共特征向量.

ii) $v$是$\mathfrak{h}$的公共特征向量且$\mathfrak{n}_+ v=0$.

这样的$v$叫$V$的本原元素.

引理8. 任意$\mathfrak{g}$模$V$都包含至少一个本原元素.

证明: $V$是$\mathfrak{g}$模$\Rightarrow V$是$\mathfrak{b}$模$\Rightarrow$存在公共特征向量(Lie定理) □.

引理9. 设$v$是$V$的本原元素, $\mathfrak{h}$关于$v$的权记为$\chi$.

设$V_1=U(\mathfrak{g})\cdot v$. 则(a) $V_1$是$V$的不可约子模. (b) 其权为如下形式

$\chi-\sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i$, 其中$m_i\geq 0$. (c) 若$v'\in V_1$也有权$\chi$, 则$v'=c\cdot v$ ($c\in\mathbb{C}$).

证明: (b) $U(\mathfrak{g})=U(\mathfrak{n}_-)\otimes U\mathfrak{b}$. $\mathfrak{b}$在$v$上是数乘. 所以$V_1=U(\mathfrak{n}_-)\cdot v$.

由PBW定理, $U(\mathfrak{n}_-)\cdot v$有基$M\cdot v$, 其中$M$是$e_{k\ell}$ $(k>\ell)$的单项式.

于是其权为$\chi$的权加上$M$中每个因子的权. 即$\chi-\sum_{\alpha为正根} q_\alpha\alpha$. 因为正根

可写为$\alpha_1\cdots\alpha_n$的非负线性组合, 所以权可写为$\chi-\sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i$ ($m_i\geq 0$).

(c) 若权为$\chi$, 则所有$q_\alpha=0$. 于是$M$只能是$U_0(\mathfrak{n}_-)$中的元素, 即$\mathbb{C}$.

(a) 若$V_1=V_1'\oplus V_1''$, 设$v=v'+v''$是相应的分解. 注意$(V_1)_\chi=(V_1')_\chi\oplus(V_1'')_\chi$.

于是$v'$与$v''$都是$v$的倍数. 但因为是直和, 所以或者$v'=0$, 或者$v''=0$. 所以$V_1$不可约 □.

引理10. 若$V$不可约, 则$V$中任意本原元素成正比, 其权叫

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

$V$的最高权. $V_1, V_2$同构 $\Leftrightarrow \chi_1, \chi_2$相等.

证明：设 $v, v'$是$V$的两本原元素, 其权为$\chi$和$\chi'$.

则 $\chi' = \chi - \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i$ $m_i \geq 0$. $\chi = \chi' - \sum_{i=1}^{n} m_i' \alpha_i$ $m_i' \geq 0$

注意 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关. 于是有 $m_i + m_i' = 0$. 所以只能有 $m_i = m_i' = 0$.

所以由前一引理的 $c$, $v' = c \cdot v$.

若 $V_1, V_2$是两个不可约模, 其本原元素为$v_1, v_2$, 权都为$\chi$.

则 $v = v_1 \oplus v_2$ 是 $V_1 \oplus V_2$ 中的本原元素, 且权为$\chi$. 于是 $U(\mathfrak{g})v = V$

是一个不可约模, 投影映射 $V \to V_i$ 是非零的, 因而是同构, 于是 $V_1 \cong V_2$. □

定理11. $\chi \in \mathfrak{h}^*$ 是某不可约模的最高权 $\Leftrightarrow \chi(H_i)$ 是非负整数, $i=1, \dots, n$

证明: $\Rightarrow$ 设$\chi$是$V$的最高权, 本原元素为$v$, 记 $v_i^m = \frac{1}{m!} F_i^m v$, $m \geq 0$.

则 i) $F_i v_i^m = (m+1) v_i^{m+1}$. ii) $H v_i^m = (\chi - m\alpha_i)(H) v_i^m$.

iii) $E_i v_i^m = (\chi(H_i) - m + 1) v_i^{m-1}$ (i). ii) iii) 留作作业).

因为$V$的权是有限的, 所以必存在$m$, 使 $v_i^m \neq 0$, $v_i^{m+1} = 0$.

此时有 $0 = E_i(v_i^{m+1}) = (\chi(H_i) - m) v_i^m$. 于是 $\chi(H_i) = m$.

$\Leftarrow$. $\chi(H_i)$ 是非负整数 $\Leftrightarrow \chi = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega_i$ 其中$\omega_i$是$H_i$的对偶基. 比如可取 $\omega_1 = \lambda_1$, $\omega_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \dots$ $\omega_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

引理: 若 $\chi, \chi'$ 是不可约模 $V, V'$ 的最高权, 则 $\chi + \chi'$ 是 $V \otimes V'$ 的某不可约模的最高权.

证明: 由 $V \otimes V'$ 上$\mathfrak{g}$作用的定义可知 $v \otimes v'$ 是 $V \otimes V'$ 的

留作作业.

$v_0, v_1, \dots, v_m$ 叫 $V_m$ 的标准基.

作业：若取 $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 则 $E(u)=0$. $H(u)=u$. $F(u)=v$. $E(v)=u$. $H(v)=-v$. $F(v)=0$. 设 $S=\mathbb{C}[u,v]=\bigoplus_{m\geq 0} S^m(V_1)$

取 $E=u\frac{\partial}{\partial v}$, $H=u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}$, $F=v\frac{\partial}{\partial u}$. 则 $S$ 成为 $\mathfrak{g}$ 模. 上述直和分解就是 $S$ 作为 $\mathfrak{g}$ 模的不可约分解. $S^m(V_1)$ 的最高元素可由 $u^m$ 给出. $e_k^{(m)}=\frac{1}{k!}F^k u^m=\binom{m}{k}v^k u^{m-k}$ $k=0\dots m$ 构成 $S^m(V_1)$ 的标准基.



权为 $\lambda+\lambda'$ 的最高元素. 所以由它生成的不可约子模具有最高权 $\lambda+\lambda'$. □

引理：记 $V_1=\mathbb{C}^{n+1}$. 它具有自然的 $\mathfrak{g}$ 模结构. 其权为 $\omega_1$.

定义 $V_k=\wedge^k(V_1)$. 则 $V_k$ 是权为 $\omega_k$ 的不可约模. $(k=1\dots n)$

~~证明：设 $e_1\dots e_n$ 是 $V$ 的基. $v_i=e_1\wedge\dots\wedge e_i$, 则易证 $v_i$ 是 $V_i$ 的最高元素. 且权为 $\pi_i$. 另外, 任取 $F_\alpha$ 的单项式作用在 $v_i$ 上可知, 任何形如 $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$ $(i_1<\dots<i_k)$ 的元素都可得到. 于是 $V_k=U(n^-)v_i$. 所以不可约.~~

有了前面两引理. 则 $\lambda=\sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i$ 是 $V_1^{\otimes m_1}\otimes\dots\otimes V_n^{\otimes m_n}$ 的某不可约子模的最高权 □.

例：若 $n=1$. $\mathfrak{g}=\mathrm{Span}(E,H,F)$. $E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. $F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. $\mathfrak{h}^*=\mathbb{C}\alpha_1$. $\alpha_1(H)=2$. $\pi_1(H)=1 \Rightarrow \pi=\frac{1}{2}\alpha$. 于是不可约 $\mathfrak{g}$ 模的最高权都是 $m\pi$ 的形式. 设 $V_m$ 是权为 $m\pi$ 的不可约模. $v_0$ 是其最高元素. $v_k=\frac{1}{k!}F^k v_0$. 则 $Fv_k=(k+1)v_{k+1}$. $Hv_k=(m-2k)v_k$. $Ev_k=(m-k+1)v_{k-1}$. $Ev_{m+1}=0$. 注意 $v_{m+1}$ 是最高元素. 所以它必是 $v_0$ 的倍数. 但它们属于不同的权空间. 所以只有 $v_{m+1}=0$. 于是 $V_m=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(v_0,\dots,v_m)$. 事实上可证明 $V_m\cong S^m(V_1)$.

注意. $V_m$ 的权是对称分布的. 从 $m, m-1, \dots, -(m-1), -m$. $V_m$ 是权为 $-m$ 的非零元. $-m$ 也叫最低权. 只要取 $E'=-F$. $H'=-H$. $F'=-E$. 那么最低权就变成最高权. (这是 $\mathfrak{sl}_2$ 的一个自同构, 叫 Chevalley 对合).

Date: ..................
Place: ..................

Reminders

由定义可推出 $H_\alpha + H_{-\alpha} = 0$. →

Date: ..................
Place: ..................

Reminders

## §3.3 根系

在本节中，$\mathfrak{g}$ 总是 $\mathbb{C}$ 上的半单Lie代数. $\mathfrak{h}$ 是它的一个 CSA. $B$ 是它的 Killing 型. $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的非零广义权叫做根. 根的全集构成 $\mathfrak{h}^*$ 的一个有限子集. 记为 $\Phi$, 叫做 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根系. 于是有广义权空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha. \qquad (*)$$

它叫做 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根空间分解. $\mathfrak{g}_\alpha$ 中的元素叫做根 $\alpha$ 的根向量.

~~Lem~~ 引理1. (a) 若 $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$, 且 $\alpha+\beta \neq 0$, 则 $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

(b) 若 $\alpha \in \Phi \cup \{0\}$, 则 $B$ 在 $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 上非退化.

(c) 若 $\alpha \in \Phi$, 则 $-\alpha \in \Phi$

(d) $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ 是非退化的. 于是对每个根 $\alpha$, 存在唯一的 $H_\alpha$ 使得对 $\forall H \in \mathfrak{h}$, 有 $\alpha(H) = B(H_\alpha, H)$.

(e) $\Phi$ 张成 $\mathfrak{h}^*$

证明: (a) $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_\alpha\,\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_\beta$ 将 $\mathfrak{g}_\gamma$ 映入 $\mathfrak{g}_{\gamma+\alpha+\beta}$. 若取关于分解 $(*)$ 的基, 当 $\alpha+\beta\neq 0$ 时, $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_\alpha\,\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_\beta$ 的对角线一定为零, 于是 $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

(b) 设 $X \in \mathfrak{g}_\alpha$. 由 (a), 仅当 $\beta = -\alpha$ 时 $B(X, \mathfrak{g}_\beta)$ 非零. 因为 $B$ 非退化. 所以 $B|_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{-\alpha}}$ 非退化. (c)(d) 由 (b) 立知.

(e) 只需证若 $\alpha(H) = 0\ \forall \alpha \in \Phi$, 则 $H = 0$. 此时, $\mathrm{ad}\,H$ 是幂零的, 因为 $\mathfrak{h}$ 交换. 所以对 $\forall H' \in \mathfrak{h}$, 有 $\mathrm{ad}\,H\,\mathrm{ad}\,H'$ 幂零. 于是 $B(H, H') = 0$. 由 (d) 知 $H = 0$. □

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

对于$\alpha\in\Phi$，因为$\mathfrak{h}$作用在$\mathfrak{g}_\alpha$上，由Lie定理，$\mathfrak{g}_\alpha$中存在$\mathfrak{h}$的公共特征向量，即存在$E_\alpha\neq 0\in\mathfrak{g}_\alpha$ s.t. $[H,E_\alpha]=\alpha(H)E_\alpha$ $\forall H\in\mathfrak{h}$.
我们对每个$\alpha\in\Phi$取这样一个$E_\alpha$.

引理2. (a) 若$\alpha\in\Phi$，$X\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$，则$[E_\alpha,X]=B(E_\alpha,X)H_\alpha$.
(b) 若$\alpha,\beta\in\Phi$，则$\beta(H_\alpha)$是$\alpha(H_\alpha)$的有理数倍.
(c) 若$\alpha\in\Phi$，则$\alpha(H_\alpha)\neq 0$.

证明：(a) 首先$[E_\alpha,X]\in\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$. 对于$\forall H\in\mathfrak{h}$，有

$$B([E_\alpha,X],H)=-B(X,[E_\alpha,H])=B(X,[H,E_\alpha])=\alpha(H)B(X,E_\alpha)$$
$$=B(H_\alpha,H)B(E_\alpha,X)=B(B(E_\alpha,X)H_\alpha,H).$$

由$B$在$\mathfrak{h}$上的非退化性知$[E_\alpha,X]=B(E_\alpha,X)H_\alpha$.

(b) 由引理1的(b)一定存在$X\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$使$B(E_\alpha,X)\neq 0$，于是可取$X_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$，使$B(E_\alpha,X_{-\alpha})=1$. 此时有$[E_\alpha,X_{-\alpha}]=H_\alpha$. 对于取定的$\beta\in\Phi$，定义$\mathfrak{g}'=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$. 它在$\mathrm{ad}_{H_\alpha}$作用下不变. 下面计算$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}'}(\mathrm{ad}_{H_\alpha})$. 首先$\mathrm{ad}_{H_\alpha}$在每个$\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$上有广义特征值$\beta(H_\alpha)+n\alpha(H_\alpha)$，所以$\mathrm{ad}_{H_\alpha}$在$\mathfrak{g}'$上的迹为$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\beta(H_\alpha)+n\alpha(H_\alpha))\dim\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$. 另一方面，$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}'}(\mathrm{ad}_{H_\alpha})=\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}'}(\mathrm{ad}E_\alpha\,\mathrm{ad}X_{-\alpha}-\mathrm{ad}X_{-\alpha}\,\mathrm{ad}E_\alpha)=0$. 所以$\beta(H_\alpha)$是$\alpha(H_\alpha)$的有理数倍.

(c) 若$\alpha(H_\alpha)=0$，则对$\forall\beta\in\Phi$，$\beta(H_\alpha)=0$. 由引理1的e，$H_\alpha=0$. 这与引理1的(d)矛盾. $\square$

Date:
Place:
Reminders

引理3. 若 $\alpha\in\Phi$, 则 $\dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$, 且 $n\alpha\in\Phi\ (n\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow n = \pm 1$.

证明：与引理2(b)类似，可设 $X_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使 $[E_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$，且 $B(E_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$. 取 $\mathfrak{g}'' = \mathbb{C}E_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha \oplus \bigoplus_{n<0}\mathfrak{g}_{n\alpha}$ 它在 $\mathrm{ad}\,H_\alpha$ 和 $\mathrm{ad}\,E_\alpha$ 作用下不变，它也在 $\mathrm{ad}\,X_{-\alpha}$ 作用下不变. 因为 $H_\alpha = [E_\alpha, X_{-\alpha}]$，所以 $\mathrm{ad}\,H_\alpha$ 在 $\mathfrak{g}''$ 上的迹为零. 另一方面，直接计算可得

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}''}(\mathrm{ad}\,H_\alpha) = \alpha(H_\alpha) + 0 + \sum_{n<0} n\alpha(H_\alpha)\dim(\mathfrak{g}_{n\alpha}) = 0.$$

因为 $\alpha(H_\alpha)\neq 0$. 所以有 $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\dim(\mathfrak{g}_{-n\alpha}) = 1$. 因此只能有 $\dim(\mathfrak{g}_{-\alpha}) = 1$, $\dim\mathfrak{g}_{(n\alpha)} = 0\ (n\geq 2)$. 将 $-\alpha$ 替换为 $\alpha$ 即得证. □

由引理3，根空间实际上都是特征子空间，即

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X\in\mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_H(X) = \alpha(H)X\}.$$

即不需要考虑广义特征子空间. ~~(做为推论…)~~ 于是 $\mathrm{ad}_H$ 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用可对角化，于是一个CSA总是极大阿贝尔子代数.

推论：对于 $H, H'\in\mathfrak{h}$，有 $B(H, H') = \sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(H)\alpha(H')$.

推论：对于 $\alpha\in\Phi$ (于是 $-\alpha\in\Phi$)，$E_\alpha$ 和 $E_{-\alpha}$ 可重新归一化，使得

$B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 2$. 于是 $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$.

所以对每个 $\alpha\in\Phi$，$\mathrm{span}\{E_\alpha, H_\alpha, E_{-\alpha}\}$ 构成一个子代数，同构于 $\mathfrak{sl}_2$.

于是 $\mathfrak{g}$ 可视为这个 $sl_2$ 的模，再分解为不可约表示的直和。$\mathfrak{g}$ 的结构即编码在这些可能的分解中。

设 $\alpha \in \Phi$，$\beta \in \Phi \cup \{0\}$，则集合 $(\Phi \cup \{0\}) \cap \{\beta + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 叫做过 $\beta$ 的 $\alpha$ 链。另外，$\mathfrak{h}$ 上的非退化双线性型 $B$ 诱导了 $\mathfrak{h}^*$ 上的非退化双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$，$\langle\psi,\varphi\rangle := B(H_\psi, H_\varphi) = \varphi(H_\psi) = \psi(H_\varphi)$.

引理 4. 设 $\alpha \in \Phi$，$\beta \in \Phi \cup \{0\}$

(a) 过 $\beta$ 的 $\alpha$ 链有如下形式 $\{\beta + n\alpha \mid -p \le n \le q\}$，其中 $p, q \ge 0$.

因有 $p - q = 2\langle\beta,\alpha\rangle / \langle\alpha,\alpha\rangle$，从而 $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$.

(b) 若 $\{\beta + n\alpha\}$ 不含 0，定义 $sl_2^{(\alpha)} = \mathrm{Span}\{E_\alpha, H_\alpha, E_{-\alpha}\}$.

$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$，则 $\mathfrak{g}'$ 是不可约 $sl_2^{(\alpha)}$ 模.

证明：若 $\beta + n\alpha = 0$ 则由引理 3，$\beta$ 只能是 $0, \pm\alpha$，此时 (a)(b) 都成立。所以以下可假设 $\beta + n\alpha$ 永不为零.

首先将 $E_\alpha, H_\alpha, E_{-\alpha}$ 标准化为

$$E'_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} E_\alpha, \quad H'_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha, \quad E'_{-\alpha} = E_{-\alpha}.$$ 则有

$$[H'_\alpha, E'_\alpha] = 2E'_\alpha, \quad [H'_\alpha, E'_{-\alpha}] = -2E'_{-\alpha}, \quad [E'_\alpha, E'_{-\alpha}] = H'_\alpha.$$

$\mathrm{ad}_{H'_\alpha}$ 在 $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ 上的作用是有特征值

$$(\beta+n\alpha)(H'_\alpha) = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle}(\beta+n\alpha)(H_\alpha) = \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} + 2n$$

所以 $\mathfrak{g}'$ 的 $\mathrm{ad}_{H'_\alpha}$ 不变子空间一定是某些 $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ 的和.

设 $V$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的一个 $sl_2^{(\alpha)}$ 子模，于是它是 $\mathrm{ad}_{H'_\alpha}$ 不变的.

Date:
Place:


推论：设 $\alpha\in\Phi$，则 $c\alpha\in\Phi$ $(c\in\mathbb{C}) \Leftrightarrow c=0,\pm1$.

证明：设 $\mathfrak{g}'=\bigoplus_{c\in\mathbb{C}}\mathfrak{g}_{c\alpha}$，考虑 $\mathfrak{sl}_2^{(\alpha)}$ 在 $\mathfrak{g}'$ 上的作用，取同样的归一化，则 $\mathrm{ad}H_\alpha$ 在 $\mathfrak{g}'$ 上的特征值都是整数。于是 $c\alpha(H_\alpha)=2c\in\mathbb{Z}$，所以 $c=\frac{1}{2}\mathbb{Z}$。若 $c=\frac{1}{2}$，即 $\frac{\alpha}{2}$ 是根，则由引理3，$\alpha=2(\frac{\alpha}{2})$ 不是根，矛盾。所以 $c\neq\frac{1}{2}$。若 $c=\frac{1}{2}+k$，$k>0$，则由根链的不间断性，$\frac{1}{2}$ 必然在过 $c\alpha$ 的 $\alpha$ 链中，于是又得矛盾。所以 $c\in\mathbb{Z}$，于是 $c=0,\pm1$. □

Date:
Place:


设 $-p$ 和 $q$ 是最小和最大的 $n$，使 $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ 是 $V$ 的直和因子。则由 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示论，$\mathrm{ad}H_\alpha$ 在 $V$ 上的特征值为 $N-2i$，$i=0,\dots,N$。其中 $N=\dim V-1$。所以任何 $-p$ 和 $q$ 之间的 $n$ 都使得 $\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ 是 $V$ 的因子。另一方面，我们有

$$N=\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+2q,\qquad -N=\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}-2p.$$

于是 $p-q=\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$.

由完全可约性，$\mathfrak{g}'$ 可分解为不可约子模的直和。设 $V'$ 是另一个不可约分量，相应的有 $p'$ 和 $q'$，则同样有 $p'-q'=\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$. 于是 $p'-q'=p-q$。另一方面，$-p$ 到 $q$ 和 $-p'$ 到 $q'$ 中的整数 $n$ 只会出现一次（因为 $\dim\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}=1$），所以或者 $-p<q<-p'<q'$，或者 $-p'<q'<-p<q$。但这两者都与 $p'-q'=p-q$ 矛盾。所以 $\mathfrak{g}'$ 只能有一个不可约分量 $V$。这就证明了 (a) 和 (b)。 □

推论：设 $E=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Phi)$，则 ($\dim_{\mathbb{R}}E=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}$，且 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $E$ 上的正定二次型。

证明：对于 $\forall\varphi,\psi\in E$，有

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\sum_{\beta\in\Phi}\beta(H_\varphi)\beta(H_\psi)=\sum_{\beta\in\Phi}\langle\beta,\varphi\rangle\langle\beta,\psi\rangle.$$

特别地，若取 $\varphi=\psi=\alpha\in\Phi$，则

$$\langle\alpha,\alpha\rangle=\sum_{\beta\in\Phi}\langle\beta,\alpha\rangle^2=\sum_{\beta\in\Phi}\left((p_\alpha-q_\alpha)\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle}{2}\right)^2.$$

由此可得

$$\langle\alpha,\alpha\rangle=\frac{4}{\sum_{\beta\in\Phi}(p_\beta-q_\beta)^2}\in\mathbb{Q}_+,$$

接下来，因为 $\mathfrak{h}^*=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\Phi$，所以存在 $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\in\Phi$，使得它们构成 $\mathfrak{h}^*$ 的基。于是

$l=\dim E$ 叫 $\Phi$ 的秩.

$O(E)$ 中由 $S_\alpha$ 生成的群叫 $\Phi$ 的 Weyl 群.

$H_{\alpha_1},\cdots,H_{\alpha_l}$ 构成 $\mathfrak{h}$ 的一组基. 取 $\omega_1,\cdots,\omega_l$ 是 $H_{\alpha_1},\cdots,H_{\alpha_l}$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 中的对偶基. 注意 $2\langle\beta,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle\in\mathbb{Z}$, $\langle\alpha,\alpha\rangle\in\mathbb{Q}_+$. 于是 $\langle\beta,\alpha\rangle\in\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\beta(H_\alpha)\in\mathbb{Q}$. 所以 $\Phi\subseteq\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\omega_1,\cdots,\omega_l)$.

因此 $E=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Phi)=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\omega_1,\cdots,\omega_l)$. 于是 $\dim_{\mathbb{R}}E=l$.

对于 $E$ 中任一元素 $\varphi$, $\langle\varphi,\varphi\rangle=\sum_{\beta\in\Delta}\varphi(H_\beta)^2$. 因为 $\varphi(H_\beta)\in\mathbb{R}$, 所以 $\langle\varphi,\varphi\rangle\geq 0$. 于是 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 $E$ 上正定. □

现在我们得到一个 $l$ 维欧氏空间 $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, 且 $\Phi\subseteq E$. 对于 $\alpha\in\Phi$, 定义 $S_\alpha: E\to E$, $\varphi\mapsto\varphi-\frac{2\langle\varphi,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$. 则 $S_\alpha$ 是正交变换. 且 $S_\alpha^2=\mathrm{id}_E$. 且有:

引理5. $S_\alpha(\Phi)=\Phi$.

证明: 对于 $\beta\in\Phi$, 令 $p,q$ 为过 $\beta$ 的 $\alpha$ 链中的 $p,q$. 则有

$$S_\alpha(\beta)=\beta-\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha=\beta-(p-q)\alpha=\beta+(q-p)\alpha.$$

因为 $-p\le q-p\le q$, 所以 $\beta+(q-p)\alpha\in\Phi\cup\{0\}$. 注意 $S_\alpha^2=\mathrm{id}$. 所以 $S_\alpha(\beta)\neq 0$. 所以 $S_\alpha(\beta)\in\Phi$. 因此 $S_\alpha(\Phi)=\Phi$. □

定义6. 设 $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是欧氏空间. $\Phi\subseteq E$ 叫作根系, 如果

(R1) $\Phi$ 有限. $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Phi)=E$. $0\notin\Phi$.

(R2) 若 $\alpha\in\Phi$, 则 $\Phi\cap\{n\alpha\mid n\in\mathbb{R}\}=\{\alpha,-\alpha\}$.

(R3) 若 $\alpha\in\Phi$, 则 $S_\alpha(\Phi)=\Phi$.

(R4) 若 $\alpha,\beta\in\Phi$, 则 $\frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}$.

作业：对 $q=0,1,2,3$，继续讨论得出如图的 4种根系.（提示：考虑 $\alpha,\beta$ 的夹角）. →

Date:
Place:
Reminders

例：① $l=1$. 设 $E=\mathbb{R}e$. $\langle e,e\rangle=A>0$.

则 $\Phi=\{\overset{\alpha}{ae},\ -\overset{\alpha}{ae}\}$ 是根系 $(a\neq 0)$. 且所有 rank 1 的根系都为这个形式. 若将 $\alpha$ 归一化为 $(\alpha,\alpha)=2$. 则本质上只有一种根系.

② $l=2$. 不妨设 $\alpha,\beta$ 是 $\Delta$ 中两线性无关向量. 于是 $E=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\langle\alpha,\beta\rangle$.

设 $G$ 是 $(\ ,\ )$ 在基 $\alpha,\beta$ 下的 Gram 矩阵. 则 $G$ 正定.

$G=\begin{pmatrix}(\alpha\alpha) & (\alpha\beta)\\ (\beta\alpha) & (\beta\beta)\end{pmatrix}$. 即 $(\alpha\alpha)(\beta\beta)>(\alpha\beta)(\beta\alpha)=(\alpha\beta)^2\geq 0$.

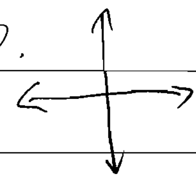
另一方面. 由 (R4) 知

$\dfrac{2(\beta\alpha)}{(\alpha\alpha)}$, $\dfrac{2(\alpha\beta)}{(\beta\beta)}\in\mathbb{Z}$. 所以若设 $q=\dfrac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}$.

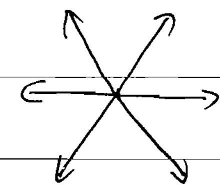
则 $0\leq q<1$. $4q\in\mathbb{Z}$.

所以 $q$ 只能取 $0,1,2,3$. 接下来不难看出, 在这4种情况下, 本只能是如下情形.

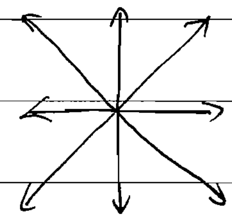
$q=0$.



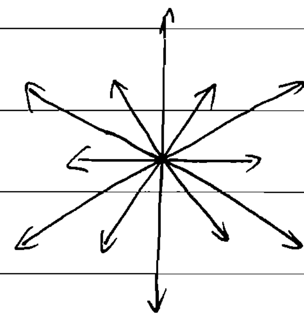
$q=1$



$q=2$



$q=3$.



它们中的每个都对应一个复半单 Lie 代数. 更一般地. 对根系分类即可得到对复半单 Lie 代数的分类.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

定义7. 设$(E,(\cdot,\cdot))$是欧氏空间. $\Phi\subseteq E$是根系. $\Phi$叫做可约的如果它可分为两个子集的不交并 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$. 且$(\Phi_1,\Phi_2)=0$.

定理8. 设$\mathfrak{g}$是复半单Lie代数. $\Phi$是它的根系. 则$\Phi$不可约 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}$是单的.

证明: $\Rightarrow$ 若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g}''$. 设$\alpha$是$\mathfrak{g}$的一个根. $\overbrace{E_\alpha}^{E_\alpha\text{是}\mathfrak{g}_\alpha\text{的基}}=E_\alpha'\oplus E_\alpha''$
是相应的分解. 对于$H\in\mathfrak{h}$, 有

$$0=[H,E_\alpha]-\alpha(H)E_\alpha=([H,E_\alpha']-\alpha(H)E_\alpha')+([H,E_\alpha'']-\alpha(H)E_\alpha'')$$

因为$\mathfrak{g}',\mathfrak{g}''$都是理想, 所以$[H,E_\alpha']-\alpha(H)E_\alpha'\in\mathfrak{g}'$. $[H,E_\alpha'']-\alpha(H)E_\alpha''\in\mathfrak{g}''$.
又因为$\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{g}''=0$. 所以$[H,E_\alpha']=\alpha(H)E_\alpha'$. $[H,E_\alpha'']=\alpha(H)E_\alpha''$.
但是$\mathfrak{g}_\alpha$是一维的. 所以必有 $E_\alpha'=E_\alpha$. $E_\alpha''=0$ 或 $E_\alpha'=0$. $E_\alpha''=E_\alpha$.
即 $\mathfrak{g}_\alpha\subseteq\mathfrak{g}'$ 或 $\mathfrak{g}_\alpha\subseteq\mathfrak{g}''$. 定义

$$\Phi'=\{\alpha\in\Phi \mid \mathfrak{g}_\alpha\subseteq\mathfrak{g}'\}.\quad \Phi''=\{\alpha\in\Phi \mid \mathfrak{g}_\alpha\subseteq\mathfrak{g}''\}.$$

则$\Phi$可写为$\Phi'$与$\Phi''$的不交并. 对于$\alpha'\in\Phi'$. $\alpha''\in\Phi''$.

$$\alpha'(H_{\alpha''})E_{\alpha'}=[H_{\alpha''},E_{\alpha'}]=[[E_{\alpha''},E_{-\alpha''}],E_{\alpha'}]\subseteq[\mathfrak{g}'',\mathfrak{g}']=0.$$

所以 $\alpha'(H_{\alpha''})=(\alpha',\alpha'')=0$. 所以$\Phi'$与$\Phi''$正交. 即$\Phi$可约.
$\Leftarrow$ 假设$\Phi=\Phi'\cup\Phi''$. 定义

$$\mathfrak{g}'=\sum_{\alpha\in\Phi'}(\mathbb{C}H_\alpha+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}).\quad \mathfrak{g}''=\sum_{\alpha\in\Phi''}(\mathbb{C}H_\alpha+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha})$$

则 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g}''$ (做为线性空间). $\mathfrak{g}'$与$\mathfrak{g}''$显然都是子代数.
下证它们都是理想. 设$\alpha'\in\Phi'$. $\alpha''\in\Phi''$.

则 $[H_{\alpha'}, E_{\alpha''}] = \alpha''(H_{\alpha'})E_{\alpha''} = 0$. $[g_{\alpha'}, g_{\alpha''}] \subseteq g_{\alpha'+\alpha''}$.
注意 $\alpha'+\alpha''$ 既不和$\Phi'$正交，也不和$\Phi''$正交. 所以它既不在$\Phi'$中. 也不在$\Phi''$中. 于是不是根. 于是 $g_{\alpha'+\alpha''}=0$. 因此有 $[g', g_{\alpha''}]=0$.
于是$g'$是理想. 同理$g''$也是理想. □

定义8. 设 $\Phi_1 \subseteq E_1$, $\Phi_2 \subseteq E_2$ 是两个根系. 若有映射 $\varphi: E_1 \to E_2$. 满足: i) $\varphi$是$\Phi_1$到$\Phi_2$的双射. ii) $\varphi$保持所有整数 $2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$. 则称$\varphi$是$\Phi_1$到$\Phi_2$的一个同构.

由此定义. 秩为1的根系只有1个(记它为$A_1$). 秩为2的根系有4个. 记为 $A_1\times A_1$. $A_2$. $B_2$, $G_2$ 其中$A_1\times A_1$是可约的. 其它不可约.
下面的任务就是对不可约根系做分类. 然后证明 i) $g_1\cong g_2 \Leftrightarrow \Phi_1\cong\Phi_2$.
ii) 对每个$\Phi$, 存在$g$. 由此完成复半单Lie代数的分类.

§3.4 单根与Weyl ~~chamber~~ 群.

设 $\Phi\subseteq E$ 是一个根系. $W$是其Weyl群.

定义1. $\Phi$的子集$\Delta$叫做一个基. 如果
i) $\Delta$是$E$的基. ii) 每个$\beta\in\Phi$可写为 $\sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$. 其中 $k_\alpha\in\mathbb{Z}$ 全都非负或全都非正.

Date:
Place:

Reminders

作业1 验证 ~ 部分.

Date:
Place:

Reminders

基Δ中的根叫单根. 因此, Δ也叫单根系. 若 $\beta=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha\alpha$, 则定义 $ht(\beta)=\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha$, 叫做β关于Δ的高度. 若所有 $k_\alpha\geq 0$, 则称β为关于Δ的正根. 若 $k_\alpha\leq 0$, 则称β为负根. 正根全体记为$\Phi^+$. 负根全体记为$\Phi^-$ (显然 $\Phi^-=-\Phi^+$) 若 $\alpha,\beta\in\Phi^+$ 且 $\alpha+\beta\in\Phi$, 则 $\alpha+\beta\in\Phi^+$. ~~因此可知Δ定义了E的一个偏序~~ 事实上, Δ定义了E上一个偏序: 对于 $\lambda,\mu\in E$, 定义 $\mu\prec\lambda$, 若 $\lambda-\mu$ 可写为Δ中元素的非负线性组合. 按此种记号, $\beta\in\Phi^+\Leftrightarrow\beta\succ 0$.

基的存在性是一个非平凡的事实. 下面我们来证明它.

引理2. 若Δ是基, 则对 $\forall\alpha,\beta\in\Delta$, $\alpha\neq\beta$, 有 $(\alpha,\beta)\leq 0$, 且 $\alpha-\beta$ 不是根.

证明: $\alpha-\beta$ 显然不是根, 因为根只能写成Δ中元素的非负线性组合或非正线性组合. 若 $(\alpha,\beta)>0$. 注意β一定不等于$-\alpha$. 考虑 $E_2=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\alpha,\beta\}$. 则 $\Phi_2=\Phi\cap E_2$ 构成$E_2$中的秩为2的根系. 对于所有秩为2的根系, 引理结论都成立. 于是引理证完. □

定理3. 任一根系存在基.

我们的证明过程实际上给出一种具体的构造基的办法, 并且可以证明所有的基都可由此构造.

首先, 对于任一 $\gamma\in E$, 可定义 $P_\gamma=\{\beta\in E\mid(\gamma,\beta)=0\}$. 即与γ垂直的超平面. 它把空间E分为两部分: 与γ同方向的, 与γ反方向的. 我们定义 $\Phi^+(\gamma)=\{\alpha\in\Phi\mid(\gamma,\alpha)>0\}$.

$\Phi^-(\gamma)=\{\alpha\in\Phi\mid(\gamma,\alpha)<0\}$.

Date:
Place:
Reminders

若 $P_\gamma$ 与 $\Phi$ 不交，则有 $\Phi=\Phi^+(\gamma)\cup\Phi^-(\gamma)$. 这样的 $\gamma$ 叫正规的. 它的等价说法是 $\gamma\in E\setminus\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$. 若 $\gamma$ 不正规，则称为奇异的. 此时 $\gamma$ 落在某个(或某些) $P_\alpha$ 上. 因为 $E$ 是 $\mathbb{R}$ 线性空间. 所以 $\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$ 不可能盖满整个 $E$ (事实上它是一个余维一的实代数簇 $\{\gamma\in E \mid f(\gamma)=0\}$. 其中 $f(\gamma)=\prod_{\alpha\in\Phi}(\gamma,\alpha)$. 所以正规元素构成 $E$ 的开稠子集. 以下总假设 $\gamma$ 正规.

对于 $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$. 若存在 $\alpha_1,\alpha_2\in\Phi^+(\gamma)$, 使 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. 则称 $\alpha$ 可分解. 否则称 $\alpha$ 不可分解. 不可分解正根的全体记为 $\Delta(\gamma)$.

定理3. 设 $\gamma\in E$ 正规. 则 $\Delta(\gamma)$ 是 $\Phi$ 的一组基. $\Phi$ 的每个基都可如此得到.

证明: 分五步.

(1) $\Phi^+(\gamma)$ 中的根是 $\Delta(\gamma)$ 中根的非负线性组合. 假设 $\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ 不满足此条. 且不妨设 $\alpha$ 是所有不满足此条件的 $\Phi^+(\gamma)$ 的元素中使 $(\gamma,\alpha)>0$ 最小的那个. 于是 $\alpha$ 自己一定不在 $\Delta(\gamma)$ 中. 于是 $\alpha$ 可分解为 $\alpha_1+\alpha_2$. 其中 $\alpha_1,\alpha_2\in\Phi^+(\gamma)$. 于是 $(\gamma,\alpha)=(\gamma,\alpha_1)+(\gamma,\alpha_2)$. 因为 $(\gamma,\alpha_1)$, $(\gamma,\alpha_2)$ 都是正的. 于是它们都应比 $(\gamma,\alpha)$ 小. 于是它们一定是 $\Delta(\gamma)$ 中元素的非负线性组合. 于是 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ 也是 $\Delta(\gamma)$ 中元素的非负线性组合.

(2) 若 $\alpha,\beta\in\Delta(\gamma)$. 且 $\alpha\neq\beta$. 则 $(\alpha,\beta)\le 0$. 若 $(\alpha,\beta)>0$. 则 $\alpha-\beta$ 是一个根. 于是 $\beta-\alpha$ 也是. 若 $\alpha-\beta$ 在 $\Phi^+(\gamma)$ 中, 则 $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$

作业：证明这样的 $\gamma$ 是存在的，即 $\bigcap_{\alpha\in\Delta} E^+(\alpha)$ 非空。
其中 $E^+(\gamma)=\{\beta\in E \mid (\gamma,\beta)>0\}$ 对 $\gamma\in E$。

Date: Place: Reminders

于是 $\alpha$ 可分解。若 $\beta-\alpha\in\Phi(\gamma)$，则 $\beta=(\beta-\alpha)+\alpha$，即 $\beta$ 可分解。
这都与 $\alpha,\beta\in\Delta(\gamma)$ 矛盾。

(3) $\Delta(\gamma)$ 是线性无关的。设 $\sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} r_\alpha\alpha=0$，$r_\alpha$ 有正有负。
将正的和负的分开，于是有 $\sum_{\alpha\in\Delta_1} s_\alpha\alpha=\sum_{\beta\in\Delta_2} t_\beta\beta$，其中 $s_\alpha, t_\beta>0$。
设 $\varepsilon=\sum s_\alpha\alpha=\sum t_\beta\beta$，于是 $(\varepsilon,\varepsilon)=\sum s_\alpha t_\beta(\alpha,\beta)\le 0$。因为 $(\,,\,)$ 正定，所以 $\varepsilon=0$。于是 $0=(\gamma,\varepsilon)=\sum s_\alpha(\gamma,\alpha)$，由此得 $s_\alpha=0$。同理有 $t_\beta=0$。所以 $\Delta(\gamma)$ 线性无关。

(4) $\Delta(\gamma)$ 是 $\Phi$ 的基。由 (1), (3) 基的定义的两条都满足。

(5) 每个基 $\Delta$ 都是某个 $\Delta(\gamma)$，其中 $\gamma$ 在 $E$ 中正规。只要选 $\gamma\in E$ 满足 $(\gamma,\alpha)>0$ 对 $\forall\alpha\in\Delta$。于是 $\gamma$ 是正规的。（若 $(\gamma,\beta)=0$，$\beta$ 或正或负。若 $\beta\in\Phi^+$，则 $0=(\gamma,\beta)=\sum_{\alpha\in\Delta} \overset{\ge 0}{m_\alpha}\overset{>0}{(\gamma,\alpha)}$ 迫使 $m_\alpha=0$，负情况同理）
且 $\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$，$\Phi^-=\Phi^-(\gamma)$。（若 $\beta=\sum m_\alpha\alpha$ $(m_\alpha\ge 0)$，则 $(\gamma,\beta)\ge 0$。
于是 $\beta\in\Phi^+(\gamma)$，即 $\Phi^+\subseteq\Phi^+(\gamma)$。同理 $\Phi^-\subseteq\Phi^-(\gamma)$。因为 $\Phi=\Phi^+\cup\Phi^-=\Phi^+(\gamma)\cup\Phi^-(\gamma)$。所以必有 $\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$，$\Phi^-=\Phi^-(\gamma)$）。现在 $\Delta\subseteq\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$。$\Delta$ 中的元素显然是不可分解的（因为若 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，将 $\alpha_1,\alpha_2$ 写成 $\Delta$ 中元素的非负线性组合，则有 $\sum_{\beta\in\Delta}(m_\beta^{(1)}+m_\beta^{(2)})\beta=\alpha$，由 $\Delta$ 的线性无关性，必有 $m_\alpha^{(1)}+m_\alpha^{(2)}=1$，其它 $m_\beta=0$。于是 $m_\alpha^{(1)}=1$，$m_\alpha^{(2)}=0$ 或反过来，此时 $\alpha_1=0$ 或 $\alpha_2=0$）于是 $\Delta\subseteq\Delta(\gamma)$。
又因为 $|\Delta|=|\Delta(\gamma)|=\dim E$，所以 $\Delta=\Delta(\gamma)$。 □

正规元素构成的集合为 $E-\bigcup_{\alpha\in\Delta} P_\alpha$，其它的每个连通分支都是一个

作业: 证明 $C(\gamma)=C(\gamma')\iff\Delta(\gamma)=\Delta(\gamma')$.

关于单根系和Weyl群的一些有用的性质.

① 若$\alpha$是正根但不是单根, 则存在单根$\beta$使$\alpha-\beta$是正根.

② 每个$\beta\in\Phi^+$可写为$\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ ($\alpha_i\in\Delta$, 不必不同) 的形式, 满足对每个$1\le i\le k$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_i$都是根.

③ 若$\alpha\in\Delta$, 则$s_\alpha$置换$\Phi^+\setminus\{\alpha\}$.

④ 设$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+}\beta$, 则$s_\alpha(\delta)=\delta-\alpha$ $\forall\alpha\in\Delta$.

$\delta$叫半根和. 在表示论中非常重要.

关于不可约根系的一些有用的性质.

① $\Phi$中元素关于偏序$\succ$(依赖$\Delta$)有唯一的极大元. (称为关于$\Delta$的最高根)

② $E$是不可约$W$模. 特别地, 对$\forall\alpha\in\Phi$, $W\alpha$张成$E$.

③ $\Phi$中元素至多有两种长度. 且相同长度的元素在一个轨道里.

④ 最高根总是长根.

开的凸的锥. 这样的一个连通分支叫一个Weyl锥. 每个正规的$\gamma$属于一个Weyl锥, 记为$C(\gamma)$. 若$C(\gamma)=C(\gamma')$, 则$\Delta(\gamma)=\Delta(\gamma')$. 所以基与Weyl锥一一对应. 我们会记$C(\Delta)$或$\Delta(C)$为$\Delta$对应的Weyl锥或$C$对应的基.

Weyl群作用在$E$上, 保$\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$. 于是它作用在所有Weyl锥上. 于是也作用在所有基上. 这个作用实际上是可迁的. 并且可以证明$W$就由$\{s_\alpha|\alpha\in\Delta\}$生成. (因时间关系, 略去)

§3.5 根系的分类.

在本节中, $\Phi$是一个不可约根系. $l=\mathrm{rank}(\Phi)$. $W$是其Weyl群. $\Delta$是一个基.

对$\Delta$中元素编一个序$\Delta=\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$. 定义矩阵$A=(a_{ij})_{i,j=1}^{l}$, 其中$a_{ij}=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)$, 叫做$\Phi$的Cartan矩阵.

Lem 1. Cartan矩阵只依赖于$\Delta$中元素的编号, 不依赖于$\Delta$的选取.

证明: 因为基在$W$作用下可迁, 而$W$作用保$(\,,\,)$. □

$A$的对角线元素都是2. 非对角元素则是$\le 0$的整数. 通过rank为2的根系的讨论, 应有$a_{ij}a_{ji}=0,1,2,3$. 对每个$A$, 我们定义一个图. 它有$l$个顶点, 编号为$1,\dots,l$. 若$a_{ij}a_{ji}=k$, 则在$i,j$顶点之间添加$k$条边. 若$k=2$或3.

$(k=0,1,2,3)$

一个简单的事实：Φ不可约 ⟺ Dynkin图连通.

因为 $C_2 \cong B_2$，所以 $C_l$ 的 $l$ 从3开始.

因为 $D_3 \cong A_3$，所以 $D_l$ 的 $l$ 从4开始.

$A_l, B_l, C_l, D_l$ 称为典型的(classical)

$E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ 称为例外的(exceptional).

$A_l, D_l, E_{6,7,8}$ 称为单链的(simple-laced) BCFG 为非单链.

则或者 $a_{ij}=-1,\ a_{ji}=-k$，或者 $a_{ij}=-k,\ a_{ji}=-1$.

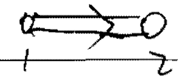
若是前者，则在 $i,j$ 之间的边上添加一个指向 $i$ 的箭头，反之则指向 $j$.

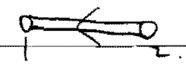
例. ① $l=1$ 时. $A=(2)$. 图为 ∘.

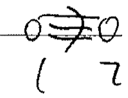
② $l=2$ 时.

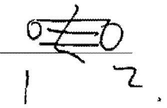
$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$. 

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ 

注意编号 $A=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&2\end{pmatrix}$ 

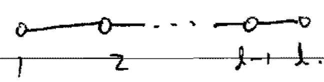
$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix}$ 

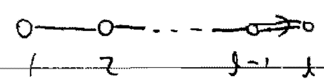
$A=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$. 

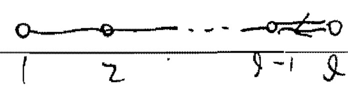
$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$ 

这个图叫Φ的Dynkin图. 若忽略箭头，则称为Coxeter图.

定理2. 若Φ是秩为 $l$ 的不可约根系，则它的Dynkin图只能是以下9种：

1. $A_l\ (l\geq 1)$:  . $A=\begin{pmatrix}2&-1&&0\\-1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&-1\\0&&-1&2\end{pmatrix}$.

2. $B_l\ (l\geq 2)$  $A=\begin{pmatrix}2&-1&&\\-1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&-2\\&&-1&2\end{pmatrix}$.

3. $C_l\ (l\geq 3)$  $A=\begin{pmatrix}2&-1&&\\-1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&-1\\&&-2&2\end{pmatrix}$.

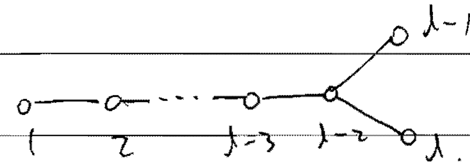
Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

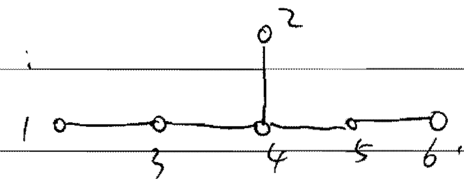
Reminders

4. $D_l\ (l \geq 4)$.



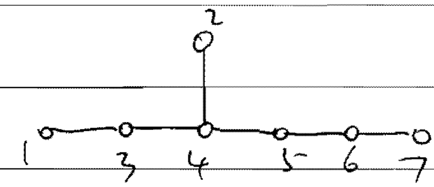

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & -1 & 0 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. $E_6$:



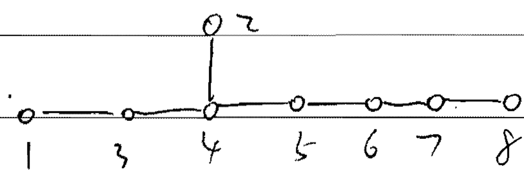

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. $E_7$



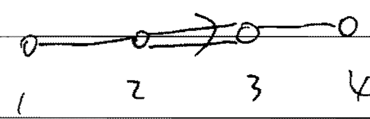

$A$ 略.

7. $E_8$:



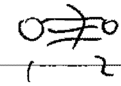

$A$ 略.

8. $F_4$:




$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. $G_2$:




$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

说明：注意在这些图中若将~~[illegible]~~箭头反向得到的还是这九个图.

所以我们只需考虑Coxeter图的线，即只需考虑 $a_{ij}\cdot a_{ji}$ 的值，不必关心 $a_{ij}$ 和 $a_{ji}$ 到底谁等于 $-1$，谁等于 $-k$。

设 $\Delta=\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$ 是不可约根系 $\Phi$ 的一个基，取 $\varepsilon_i=\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$。

则有 $a_{ij}\cdot a_{ji}=\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\frac{2(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=4(\varepsilon_i,\varepsilon_j)^2=0.1.2.3.$

且 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\leq 0$（对于 $i\neq j$），$(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=1$。另外 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ 线性无关。E中满足这些条件的一组向量 $(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)$ 叫允许的。下面就是对允许的向量集进行分类，图记为 $\Gamma$。

① 若忽略一些 $\varepsilon_i$，剩下的 $\{\varepsilon_i\}$ 仍是一个允许集（显然），相应的图就是原图删去这些 $\varepsilon_i$ 和与它们相连的边。

② 满足 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\neq 0$ 的无序对 $(i,j)$ 的个数严格小于 $n$。

取 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$，则 $\varepsilon\neq 0$（因为 $\varepsilon_i$ 线性无关），于是 $(\varepsilon,\varepsilon)>0$。另一方面，$(\varepsilon,\varepsilon)=n+2\sum_{i<j}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$。注意 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)^2=\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}$，所以 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\sqrt{3}}{2}$

于是 $2(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\leq -1$，所以使 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\neq 0$ 的 $(i,j)$ 的个数 $<n$。

③ $\Gamma$ 不含圈，因为圈的边数大于或等于顶点数。

④ 每个顶点上的边的个数不大于4。

设 $\varepsilon$ 是允许集中的点，$\eta_1\cdots\eta_k$ 是与它相连的其它向量，即 $(\varepsilon,\eta_i)<0$。由③知 $(\eta_i,\eta_j)=0$。取 $\eta_0$ 是 $\mathrm{Span}(\varepsilon,\eta_1\cdots\eta_k)$ 中与 $\eta_1\cdots\eta_k$ 正交的单位向量，于是 $\varepsilon=\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon,\eta_i)\eta_i$，且 $(\varepsilon,\eta_0)\neq 0$，于是 $1=\sum_{i=0}^{n}(\varepsilon,\eta_i)^2$，所以有 $\sum_{i=1}^{k}4(\varepsilon,\eta_i)^2<4$。左边，根据 $\Gamma$ 的定义，正是顶点 $\varepsilon$ 上边的个数。

⑤ 唯一含三重边的连通图是 。(因为两个顶点都不能加边)

⑥ 若Γ包含了圈 则将它编号后,仍是允许的. 设了圈的顶点依次为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k$. 定义 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i$, 则 $=(中-\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k\})\cup\{\varepsilon\}$.

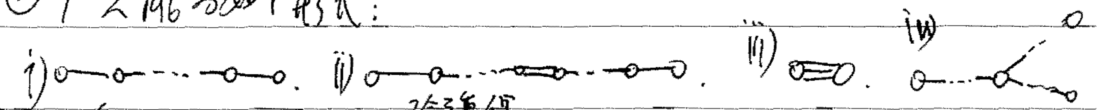
线性无关性是显然的. $(\varepsilon,\varepsilon)=k+2\sum_{i<j}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=k+2(-\frac{1}{2})\cdot(k-1)=1$.

任何其它的顶点η至多与 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k$ 中一个相连(因为不能有圈). 所以

$(\eta,\varepsilon)=0$ 或 $(\eta,\varepsilon)=(\eta,\varepsilon_i)$. 于是另外的条件也满足.

⑦ Γ 不含两个 或 . (因为由⑥可收缩节点, 则得度≥4的顶点).

⑧ Γ只能为如下形式:

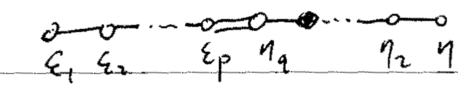



若含三重边, 由⑤知为iii). 若含二重边(不含三重边), 则只能是ii), 不能分叉是因为那样

同时包含 与 , 与⑦矛盾. 若是单链的, 则由⑦, 分叉点只能

有一个, 即iv) 或没有, 即i).

⑨ 若为ii), 则只能是 $B_n(C_n)$ 或 $F_4$. 将顶点编号:




再定义 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{p}i\varepsilon_i$, $\eta=\sum_{i=1}^{q}i\eta_i$.

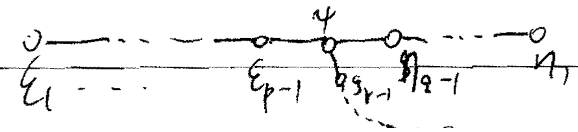
则 $(\varepsilon,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{p}i^2-\sum_{i=1}^{p-1}i(i+1)=p(p+1)/2$. $(\eta,\eta)=q(q+1)/2$. 因为 $4(\varepsilon_p,\eta_q)^2=2$

所以 $(\varepsilon,\eta)^2=p^2q^2(\varepsilon_p,\eta_q)^2=\frac{1}{2}p^2q^2$. 由 Cauchy 不等式 (注意 ε, η 不成比例)

$\frac{1}{2}p^2q^2<\frac{1}{4}p(p+1)q(q+1)\Rightarrow(p-1)(q-1)<2$. 于是只能有 $p=1$, $q$ 任意.

或 $p=q=2$.

⑩ 若为iv), 则只能是 $D_n$ 或 $E_6, E_7, E_8$. 同样地先编号



Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

再设 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{p-1} i\varepsilon_i$，$\eta=\sum_{i=1}^{q-1} i\eta_i$，$\zeta=\sum_{i=1}^{r-1} i\zeta_i$，则它们相互正交，线性无关。且 $\varepsilon,\eta,\zeta,\psi$ 线性无关。与①类似可得 $(\varepsilon,\varepsilon)=p(p-1)/2$，$(\eta,\eta)=q(q-1)/2$，$(\zeta,\zeta)=r(r-1)/2$。设 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 是 $\psi$ 与 $\varepsilon,\eta,\zeta$ 的夹角，则 $\cos^2\theta_1=\frac{(\varepsilon,\psi)^2}{(\varepsilon,\varepsilon)(\psi,\psi)}=\frac{(p-1)^2(\varepsilon_{p-1},\psi)^2}{(\varepsilon,\varepsilon)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)$，同理

$\cos^2\theta_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)$，$\cos^2\theta_3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)$。因为 $\psi$ 不在 $\mathrm{Span}(\varepsilon,\eta,\zeta)$ 中，所以 $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3<1$，于是 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$。若 $p,q,r$ 中有一个为1，则退化为 $A$ 型。若全大于或等于3，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\leq 1$，不可能。所以最小的一个一定是2。若再有一个2，~~则~~ 不管第三个是多少，条件都成立，于是得 $D_n$ 型。若第二小的是3，则第三个能取 3, 4, 5。由此得 $E_6, E_7, E_8$。 $\square$

定理3. 对每种 Dynkin 图 P 的确存在一个不可约根系 $\Phi$，使 $P(\Phi)=P$。

证明（略，见 GTM9，§12）。

## §3.6 ~~...~~ 同构定理与存在性定理

设 $\mathfrak{g}$ 是单Lie代数，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个CSA，$\Phi$ 是相应的根系，$\Delta$ 是 $\Phi$ 的一个基。对于 $\alpha\in\Delta$，取 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，$F_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$，使 $[E_\alpha,F_\alpha]=H_\alpha$。

Date:
Place:
Reminders

③定理：设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ 是两Lie代数. $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ 是其Cartan子代数. $\Phi, \Phi'$ 是相应的根系. 若有根系的同构 $\Phi\to\Phi'$, $\alpha\mapsto\alpha'$. 则能扩充为 $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}'$ 的同构 $\pi_{\mathfrak{h}}$. ~~对任一~~ ~~…~~ 设 $\Delta$ 是 $\Phi$ 的一个单根系. 于是 $\Delta'$ 是 $\Phi'$ 的基. 对任一 $\alpha\in\Delta$, 以及 $\alpha'\in\Delta'$, 取一线性空间同构 $\pi_\alpha: \mathfrak{g}_\alpha\to\mathfrak{g}_{\alpha'}$. 则存在唯一的同构 $\pi: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$. 使得 $\pi|_{\mathfrak{h}}=\pi_{\mathfrak{h}}$. $\pi|_{\mathfrak{g}_\alpha}=\pi_\alpha$.

证明：$\pi$ 的唯一性是显然的. 因为给定 $\pi_\alpha$ 后就给定了 $\pi$ 在 $\mathfrak{n}$ 上的作用. 给定 $\pi_\alpha$ 与 $\pi_{\mathfrak{h}}$ 后, $\pi_{-\alpha}$ 也由此确定. 于是 $\pi_{\mathfrak{n}}$ 也确定. 存在性略复杂. 要用到较多根系的知识. 此处略. 可参见 GTM9 §14.2. □

Date:
Place:
Reminders

引理1. $\mathfrak{g}$ 可由 $\{E_\alpha, F_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ 生成. $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}^+$.

证明：$[E_\alpha, F_\alpha]=H_\alpha$. 所以 $\mathfrak{h}$ 可生成. 设 $\mathfrak{g}=$ ~~…~~ 其中 $\mathfrak{g}^\pm=\bigoplus_{\alpha\in\Phi^\pm}\mathfrak{g}_\alpha$. 下证 $\mathfrak{g}^+$ 可由 $\{E_\alpha\}$ $(\{F_\alpha\})$ 生成. 对于任一正根 $\beta$. 由根系性质. $\beta$ 可写为 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k$. ($\alpha_i\in\Delta$ 不必不同) 使得对每个 $1\le i\le k$. $\alpha_1+\cdots+\alpha_i$ 都是根. 利用事实：若 $\alpha, \beta, \alpha+\beta\in\Phi$. 则 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ 不难证明 $\mathfrak{g}_\beta=[[[\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}], \mathfrak{g}_{\alpha_3}], \dots, \mathfrak{g}_{\alpha_k}]$. 负根情形同理. □

$\{E_\alpha, F_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ 或 $\{E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ 叫 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 生成元.

引理2. ~~g 的 Weyl 生成元满足~~ 对 $\Delta$ 中单根编序 $\Delta=\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. 相应的 Weyl 生成元为 $\{E_i, H_i, F_i\}_{i=1}^{l}$. 则它们满足

$(S_1)$ $[H_i, H_j]=0$

$(S_2)$ $[E_i, F_j]=\delta_{ij}H_i$.

$(S_3)$ $[H_i, E_j]=a_{ji}E_j$. $[H_i, F_j]=-a_{ji}F_j$.

$(S_{ij}^+)$ $(\mathrm{ad}_{E_i})^{1-a_{ji}}(E_j)=0$.

$(S_{ij}^-)$ $(\mathrm{ad}_{F_i})^{1-a_{ji}}(F_j)=0$.

证明：$(S_1)$ 显然. $(S_2)$ 因为 $\alpha_i-\alpha_j\notin\Phi$. $(S_3)$ 显然. $(S_{ij}^+)$ 因为 $\alpha_j-\alpha_i\notin\Phi$. 所以过 $\alpha_j$ 的 $\alpha_i$ 链只能是 $\alpha_j, \alpha_j+\alpha_i, \dots$

这里正负号的选法是个有趣的问题. 结论是, 可以在某些对 $(\alpha,\beta)$ 上随意指定, 然后其它对上的符号便唯一决定了. 具体可参看 Samelson 的《Notes on Lie algebra》(有电子版) 或 Kac 的《Infinite ⋯》 →



$\alpha_j+q\alpha_i$. 其中 $-q=a_{ji}$. 因此有 $(S_{ij}^+)$. $(S_{ij}^-)$ 同理. □

存在性定理 (Serre) 设 $\Phi$ 是一不可约根系 (rank 为 $l$), 取定一个基 $\Delta$, 于是有 Cartan 矩阵 $A=(a_{ij})$. 设 $\mathfrak{g}$ 是由生成元 $\{E_i, H_i, F_i\}_{i=1}^{l}$ 以及关系 $(S_1)(S_2)(S_3)(S_{ij}^\pm)$ 确定的 Lie 代数. 则 $\mathfrak{g}$ 是单的. $\mathfrak{h}=\mathrm{Span}(H_i)$ 是其 CSA, 相应的根系即为 $\Phi$. (证明见 GTM9 §18.) □

Chevalley 证明了如下定理.

定理 (Chevalley 基) 设 $\mathfrak{g}$ 是单 Lie 代数, $\mathfrak{h}$ 是 CSA. 设 $\Delta=\{\alpha_1\cdots\alpha_l\}$ 是 $\Phi$ 的基. $h_i=h_{\alpha_i}$. 则存在 $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha\in\Phi)$ 的适当的基 $x_\alpha$, 使得:

(a) $[h_i,h_j]=0$. (b) $[h_i,x_\alpha]=\alpha(h_i)x_\alpha=\frac{2(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}x_\alpha$.

(c) $[x_\alpha,x_{-\alpha}]=h_\alpha$ 是 $h_1\cdots h_l$ 的整线性组合.

(d) 若 $\alpha,\beta$ 是线性无关的根, 且过 $\beta$ 的 $\alpha$ 链是 $\beta-p\alpha,\cdots,\beta+q\alpha$,

则 $[x_\alpha,x_\beta]=\begin{cases}0 & q=0\ (\text{即}\ \alpha+\beta\notin\Phi)\\ \pm(r+1)x_{\alpha+\beta} & q\neq0\ (\text{即}\ \alpha+\beta\in\Phi)\end{cases}$

这样的基 $\{h_1\cdots h_l, x_\alpha(\alpha\in\Phi)\}$ 叫 $\mathfrak{g}$ 的 Chevalley 基. 它们在 Lie 代数的具体计算中非常有用.

有限单群分类定理：设G是有限单群，则G同构于以下四类之一：

~~$A_n$ ($n\geq5$) 阶数≥5的交错群~~

① 素数阶循环群：$\mathbb{Z}_p$

② 五阶以上交错群：$A_n$ ($n\geq 5$).

③ Lie型单群（或者叫 Chevalley 群）

④ 散在单群（即不属于以上分类的单群，共26个）.



Chevalley基的存在性意味着每个复单Lie代数都是一个$\mathbb{Z}$上的Lie代数与系数域$\mathbb{C}$张量积得到的。这个$\mathbb{Z}$上的Lie代数可记为$\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$. $= \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{h_i, x_\alpha\}$. 对于任给的域$k$，可定义$\mathfrak{g}(k) = k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$，由此得到$k$上的Lie代数。除了一些例外情况以外（小特征或小秩），这样的Lie代数总是单的。

更进一步地，可以证明对于$\alpha\in\Phi$，$e^{\mathrm{ad}\,x_\alpha}$是$\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$的自同构。且$e^{\mathrm{ad}\,cx_\alpha}$ ($c\in\mathbb{Z}$)生成一个群，其矩阵元都是整数。若张量积上一个有限域，则可得有限域上的单矩阵群。这种群大都是单的，它们被称为Lie型单群。它们提供了有限单群中很大的一类。以上内容可进一步参见Carter的 Simple groups of Lie type.

利用Chevalley基，也可给出同构定理和存在定理的证明，但是比较复杂。

下面看一些例子。

首先，$A_n$型Lie代数即$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Date:
Place:
Reminders

其次. $B_n \cong SO_{2n+1}(\mathbb{C})$. $C_n \cong Sp_{2n}(\mathbb{C})$. $D_n \cong SO_{2n}(\mathbb{C})$.

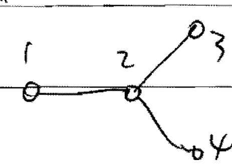
这些天然的矩阵实现实际上在计算上很不方便. 更常用的取法是利用表示论的有关构造来取基. 然后 $\mathfrak{g}$ 的矩阵会有比较好的形状. 对于单Lie代数 $\mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 叫做支配的如果 $\lambda(H_i) \geq 0$. 叫整的如果 $\lambda(H_i) \in \mathbb{Z}$. 与 $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ 的情形类似, $\mathfrak{g}$ 的有限维不可约模与其支配整权一一对应. 满足 $\omega_i(H_j) = \delta_{ij}$ 的 $\omega_i$ $(i = 1, \dots, l)$ 叫基本权. $\mathfrak{g}$ 的所有有限维不可约模都可以在 $\omega_1, \dots, \omega_l$ 的张量积的不可约子模中找到. $\omega_1$ 一般取为维数最低的不可约表示对应的基本权. 设 $v$ 是 $V$ 的最高权向量. $\mathfrak{n}_- v = V_1$, $\mathfrak{n}_-$ 中元素可按 $F_1 \cdots F_l$ 的字典序排列. 于是 $V_1$ 中可取相应的基. 在这个基下, $H_i$ 都是对角矩阵(因为每个这样的基都在某权空间中), $E_i$ 是上三角的. $F_i$ 是下三角的. 若考虑到正权与负权的对称性, 还可取基, 使 $\mathfrak{n}_\pm$ 中的元素关于两条对角线具有某种对称性.

例(D4). 若按上述方法取基. 则 $\mathfrak{g} = \{A \in M_8(\mathbb{C}) \mid A + SA^{\tau}S^{-1} = 0\}$. 其中 $S = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, -1, \cancel{1}, -1, 1)$. $A^{\tau}$ 表示沿反对角线的转置.

$E_1 = e_{12} + e_{78}$. $E_2 = e_{23} + e_{67}$. $E_3 = e_{34} + e_{56}$. $E_4 = e_{35} + e_{46}$

$\cancel{F_1 = e_{21} + e_{87}.\ F_2 = e_{32} + e_{76}.\ F_3 = e_{43} + e_{65}.\ F_4 = e_{53} + e_{64}}$

$F_i = E_i^t$. $H_i = [E_i, F_i]$, 不难算出相应的Cartan矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. 于是为



Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

若取 $X_{\alpha_i}=E_i$, $X_{-\alpha_i}=F_i$ $(i=1,2,3,4)$. 其它Chevalley基可按如下方式构成(以正根为例):

⑤ $X_{\alpha_1+\alpha_2}=[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}]$, ⑥ $X_{\alpha_3+\alpha_2}=[X_{\alpha_3}, X_{\alpha_2}]$, ⑦ $X_{\alpha_4+\alpha_2}=[X_{\alpha_4}, X_{\alpha_2}]$

⑧ $X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}=[X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{\alpha_3}]=[X_{\alpha_3+\alpha_2}, X_{\alpha_1}]$

⑨ $X_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}=[X_{\alpha_3+\alpha_2}, X_{\alpha_4}]=[X_{\alpha_4+\alpha_2}, X_3]$

⑩ $X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}=[X_{\alpha_4+\alpha_2}, X_{\alpha_1}]=[X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{\alpha_4}]$

⑪ $X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}=[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}]=[X_3, X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}]=[X_4, X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}]$

⑫ $X_{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}=[X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, \alpha_2]=[X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}]$
$=[X_{\alpha_3+\alpha_2}, X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}]=[X_{\alpha_4+\alpha_2}, X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}]$

12正根+12负根+4基 $=28=\frac{1}{2}\times 8(8-1)$.

若定义根系上的自同构 $\sigma(\alpha_1)=\alpha_3$, $\sigma(\alpha_2)=\alpha_2$, $\sigma(\alpha_3)=\alpha_4$, $\sigma(\alpha_4)=\alpha_1$, 则它保持Dynkin图不动. 于是可诱导根系上的一个自同构, 进而诱导$\mathfrak{g}$上的自同构. 表现在Chevalley基上即为: $X_1\to X_3\to X_4\to X_1$. $X_2\to X_2$.

$X_5\to X_6\to X_7\to X_5$, $X_8\to X_9\to X_{10}\to X_8$, $X_{11}\to X_{11}$, $X_{12}\to X_{12}$.

这个自同构的不动点集构成一个Lie子代数, 它就是型为$G_2$的单Lie代数. 具体地说, 它可由 $\tilde{E}_1=E_1+E_3+E_4$, $\tilde{E}_2=E_2$, $\tilde{F}_1=F_1+F_3+F_4$, $\tilde{F}_2=F_2$

Date:

Place:

Reminders

实形 其 Chevalley 基不能从 $D_4$ 的 Chevalley 基及其在 $\sigma$ 下的作用得到. 这种构造是研究 $G_2$ 型 Lie 代数时一种常用的构造.

大作业截止日期：2014年1月17日晚12:00以前.

要求：

① LaTeX制作的中文PDF文件.（推荐texlive+ctexart+xelatex模板）

② 邮寄到 linsq@tsinghua.edu.cn.