Date:
Place:
Reminders

数学分析（一）

§0 引言

数学分析研究的是实数集及实函数的性质. 它是进入现代数学的"入口". 因此, 它和线性代数一起构成数学系本科第一学年的两门基础课.

为什么说数学分析是现代数学的"入口"? 现代数学是一些高度抽象的数学理论构成的一个体系. 对于大一学生来说, 一下就进入抽象的世界是很难学会现代数学的. 必须循序渐近, 按照符合认知规律的方式进入才有可能学好现代数学. 这个进入的地方必须是比较具体的, 学生熟悉的东西. ~~实数与实函数~~ 数学分析就是这样的东西.

从历史上看, 古典数学的很大一部分内容都属于数学分析. 这是因为数学分析研究的问题比较贴近现实世界. 一方面人类的生产和生活需要解决这类问题. 另一方面这类问题也比较容易为当时的人类所接受. 所以数学分析才成为一个这样的入口. 可以说, 它是连接现实世界与抽象世界的一座桥梁.

Date:
Place:
Reminders

远古时代：数与形 ⟶ 小学数学. →

古典时代：代数与几何 ⟶ 初中数学.

近代：坐标系，函数，微积分，集合，逻辑，概率… ⟶ 高中数学.

现代：数学分析，线性代数 ⟶ 大学一年级.

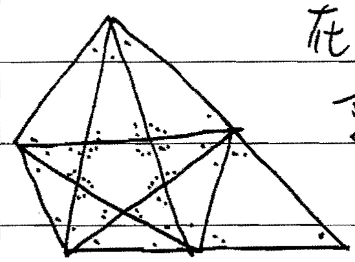
Date:
Place:
Reminders

从学生的角度看，大学数学及之前的数学~~发展~~其实~~从某种意义上说~~就是在重复古典数学的发展历史，因为这样的学习路径是符合人类认知习惯的。在大学，数学也应该按照某种与历史发展相符的方式来讲授，才能取得最好的效果.

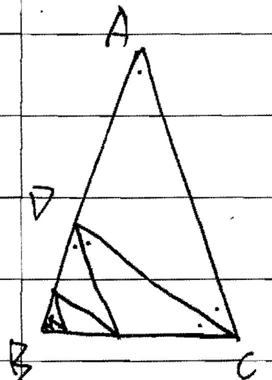
因此，要学好数学分析，首先要了解一下它的历史，这种了解并不是要事无巨细地掌握所有细节，而是要知道一些重大的事件，一些可以明白使人为什么数学分析是今天这个样子的事件。这样的重大事件其实只有三件，就是历史上著名的三次数学危机。每一次数学危机都提出了严峻的问题，为了解决这些问题，人类必须将它们看待世界的方式做出重大的改变，一旦做出了这种改变，人类看待世界和数学的眼光就不同，接下来往往导致数学的一次长足的进步，甚至会进一步影响整个世界.

1. 第一次危机是无理数的发现。在没有文字记载的年代，人类就已经认识了自然数，接下来则是正有理数，例如各种时间单位和度

为什么是黄金分割？常见的数学书中此处一般都用$\sqrt{2}$，证明则是奇偶分析。这里用α是因为，据考证，当年毕达哥拉斯学派最初发现的其实是α，而不是$\sqrt{2}$。古希腊人很喜欢摆弄五角星和正五边形



在这个图形中有一个基本的三角形就是顶角为36°的等腰三角形，由等腰三角形的性质可知，它的两底角相等，都为72°，于是做出角平分线后可证明 AD=DC=BC。由相似性可知



$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB-BC}{BC}$$ 这就是黄金分割α的由来。

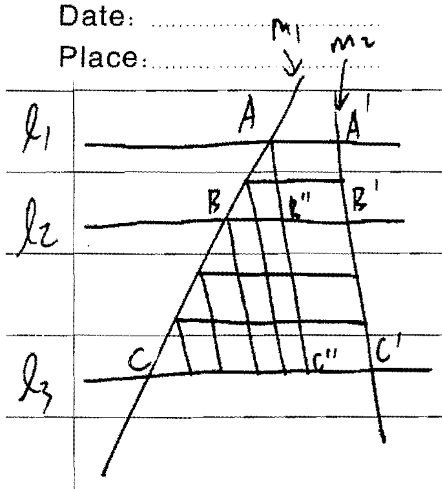
再做$\angle CDB$的角平分线又可得到类似的图形，这样的平分线可以无穷无尽的做下去，而且我们知道这样的平分线永远都不会到达B点，因为每一步都是相似的，所以只要第一步没到，以后永远不会到。但是另一方面，若α是~~整数~~有理数，于是BC，AB可取为~~某~~某单位线段的整数倍，上述做图法将给出无穷多比BC，AB小的正整数，这是不可能的。所以一定不存在这样的单位线段，也即$\alpha\notin\mathbb{Q}$。这就是古希腊人最初的论证。$\sqrt{2}$的无理性最初也像这样用几何方法证明的。

量衡等制度的确定都需要有正有理数的帮助才能做到。负数和零是后来才出现的，因为它们比较抽象，不够具体。紧接着正有理数被发现的是正无理数，或者说正实数。

→ 定理1. 黄金分割 $\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618033988 74989\ldots$ 是无理数。

证明：α是方程 $x^2+x=1$ 的正根。它又可定义为 $\alpha=\frac{1-\alpha}{\alpha}$，$\alpha>0$。若$\alpha=p/q$，~~不妨设这~~ $p,q\in\mathbb{N}$。我们可假设这样的(p,q)是使q最小的一个。因为$\alpha<1$，所以$p<q$。由α的方程知 $\frac{p}{q}=\frac{1-\alpha}{\alpha}=\frac{q-p}{p}$，于是我们得到另一个$\alpha$的表达式 $\alpha=\frac{q-p}{p}$，它的分母更小，这与我们对(p,q)的假设矛盾。因此不存在$p,q\in\mathbb{N}$，使$\alpha=p/q$。□

Date:
Place:
Reminders



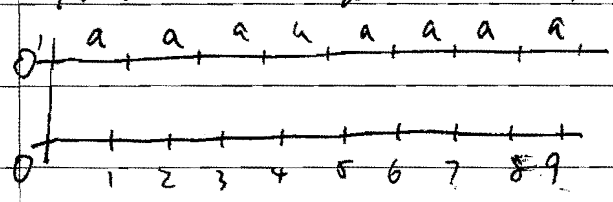
设 $l_1 // l_2 // l_3$，m_1, m_2 → 交 l_1, l_2, l_3 于 A, B, C，A', B', C'

则有 $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

若已知 $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. $p, q \in N$.

则可将 AB p等分. BC q等分 然后通过全等三角形证明

欧多克斯比例论经后人化简可~~表~~表述为如下形 → 式. 设有两线段 a. b. 不妨设 b 为单位. 我们关心 a/b 做为一个实数如何用有理数来逼近.



画两条平行线. 并做一条公垂线, 设它们交点为0, 0'

从0出发向右边截取 b, 2b, 3b, … 从0'出发向右边截取 a, 2a, 3a, … 于是可以发现. 对每个 n. na 都落在某两个 $p_n b$ 和 $(p_n+1)b$ 之间(若可公度 则某一na会正好落在 $p_n b$ 上), 于是有 $\frac{p_n}{n} < \frac{a}{b} < \frac{p_n}{n} + \frac{1}{n}$. 或者可写为 $0 < \frac{a}{b} - \frac{p_n}{n} < \frac{1}{n}$ 所以只要掌握了 $p_1, p_2, \cdots$ 这些信息 就可以无限逼近 $\frac{a}{b}$ 这个无理数.

Date:
Place:
Reminders

在发现无理数之前 希腊人认为"数"都可化为两~~数~~自然数之比. 于是像平行线截线段成比例这样的定理就可通过 ~~移~~ 取单位线段 然后分割, 然后利用全等三角形来证明 但是. 若线段之比不一定是有理数 上述方法就行不通了. 这样基本的定理都无法证明的话, 相似三角形等更有用的定理就更无从谈起了.

为了解决这个问题. 欧多克斯发现了一套比例理论. 解决了如何用有理数逼近无理数的问题. 这个理论被收录在欧几里得的《原本》第五卷中. 成为后续各章特别是相似形理论的基础.

后世一般认为《原本》第五卷是《原本》中最重要的一卷. 因为它第一次给出"实数"的一种正确的定义. 这个定义与现近代戴德金的定义已经很接近了.

2. 第一次危机解决后, 欧几里得的《原本》成为了严密思维的典范, 并在欧洲充当了一千多年数学教科书. ~~[illegible]~~ 这一千年来, 欧洲发生了很多重

大的历史事件. 而对人类影响最大的, 莫过于文艺复兴与大航海时代的来临.

文艺复兴的重要内容就是人文主义的兴起以及对基督教信仰的质疑. 当时的哲学家和神学家们都热衷于用各种思辨的方式去证明上帝存在. 但是, 把上帝是否存在当成一个问题来研究, 本身就已经或多或少地背离了基督教的根本信条. 在英国, 经验主义影响很大, 所以, 牛顿能够发明微积分也就不奇怪了.

事实上, 微积分中最重要的微积分基本定理, 即牛顿-莱布尼兹公式已经出现在牛顿的老师巴罗的专著中, 只不过以一种非常隐晦的形式. 巴罗~~[illegible]~~的研究兴趣是主要在神学, 特别是年代学, 即通过历史文献等资料考证圣经中的历史事件的年代. 例如, 根据埃及的历史文献, 有一位法老竟然是公元前六千年的, 而上帝在公元前四千年创世. 牛顿发表了一篇论文指出, 这个法老~~[illegible]~~年代~~[illegible]~~考证错了, 应该是公元前两千年才对. 他也因此得到巴罗的赏识. 在当时, 伽利略刚发明望远镜不久, 巴罗意识到, 可以通

Date:
Place:
Reminders

透镜焦距公式 $\frac{1}{f}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ 就是巴罗发现的 →

有人认为如果阿基米德没有被士兵杀死，他可 →
能早在希腊时代就发明了微积分。但是通过考察牛顿与莱布尼兹的动机，我们可以知道阿基米德是不太可能发明微积分的。因为在他那个时代没有这种需要。另外，阿基米德时代玻璃的制造工艺还很粗糙，不可能满足光学透镜的需要。第三个原因是阿基米德时代没有坐标的概念，所以切线斜率与曲边梯形面积这些概念都无从谈起，所以不可能出现牛顿－莱布尼兹公式。

Date:
Place:
Reminders

过比对天象记录来精确地确定年代。所以他把很大的精力投入到望远镜的研制上。为了研制望远镜，就得研究透镜。于是又得进一步研究透镜表面的切线（因为折射定律），透镜的横截面积当然也是重要的。巴罗在研究这些问题时发现，某些形状的透镜的切线斜率和另一些透镜的横截面积之间存在某种对偶关系。这种关系翻译成数学公式就是牛顿－莱布尼兹公式。巴罗还发现了其它一些关系，正对应于定积分换元法。

巴罗的这些发现都写在他的《光学讲义》中。这份讲义据说只有100页，却有180幅图，无人能懂。只有牛顿深入进去，将图象转换为数学计算，并由此发明了微积分。

微积分的另一位发明者莱布尼兹对年代学兴趣不大，但他是物理学家惠更斯的朋友，惠更斯的主要兴趣就在光学。这主要是受大航海的影响。只要研究透镜，就免不了与切线和面积打交道，于是莱布尼兹也由此发明了微积分。

微积分的发明主要是时代的需要。这个，

某个伯努力曾写信给欧拉，劝他在处理无穷级数的一
时候要慎重，~~并举了下面的例子~~ 并举了一些例子。下面
这个例子可能不是伯努力的，但更著名一些。

例：$1+2+3+\cdots = -\frac{1}{12}$

"证明"：设 $S_1 = 1+2+3+4+5+6+\cdots$，则

$$4S_1 = \quad 4 \quad + 8 \quad + 12 \quad + \cdots$$，相减得

$$-3S_1 = 1-2+3-4+5-6+\cdots =: S_2$$

$$S_2 = 1-2+3-4+5-6+\cdots$$

$$S_2 = \quad 1-2+3-4+5-6+\cdots$$ 相加得

$$2S_2 = 1-1+1-1+1-1+\cdots =: S_3$$

$$S_3 = 1-1+1-1+1-\cdots$$ 相加得 $2S_3 = 1$. 于是

$$S_3 = \quad 1-1+1-1+\cdots$$ $S_3 = \frac{1}{2}$、$S_2 = \frac{1}{4}$、$S_1 = -\frac{1}{12}$ □

注意，上述算式和证明在数学分析中是错的。但在
更高级的课程，如渐近分析、发散级数理论中，
左边无穷和的值有另外的定义。那时，上面的算式就
是正确的了。但证明 ~~[illegible]~~ 仍然是错的。

还是因为时代的需要（工业革命等），它得到迅猛
的发展。在早期，大家主要关心计算结果，计算过程是否
严密根本不予考虑（以欧拉为代表），所以积累
了很多问题。第二次危机就是关于微积分到底
是像欧氏几何一样严密的数学，还是某种魔术
的争论。在柯西、魏尔斯特拉斯等人的努力
下，极限这一概念有了正确的定义，于是
微积分中其它概念也都可以相应地定义，第二次危
机得以解决。

3. 第二次危机解决得并不彻底，因为人们还没能找
到实数的正确定义。随着微积分、实分析的发展，
特别是无穷集 → 人们越来越需要研究实数集的性质。于是
康托尔发明了集合论。在集合论的早期，人们只是
根据自己的直觉使用集合这一概念。但是很快
地，人们发现集合论中存在矛盾。这就是第三次危机。

第三次危机远比第一次的天真和第二次的毛躁严重，
因为它表明了人类的直觉是多么地不可靠。要排除
这一危机，一直以来赖以生存 必须从最基础的地方

例1：康托尔的朴素集合论只有一条概括原则，即对任何含变量x的命题$P(x)$，可以定义一个集合$S=\{x|P(x)\}$

下面我们考虑这样的命题，对于集合变量x，$P(x)$="$x\notin x$"

显然对任何集合x，$P(x)$或真或假，所以的确给出一个命题。

此时$S=\{x|x\notin x\}$就是那些不是自身元素的集合构成的集合。现在考虑$P(S)$，若$P(S)$为真，即$S\notin S$，则由S定义应有$S\in S$矛盾。反之若$P(S)$为假，则$S\in S$，于是$S\notin S$，又矛盾。所以$P(S)$这个命题既不真也不假(或者说既真又假)，这就是罗素悖论。

为了说明布尔巴基的风格，我们可以举一个例子。→

在布尔巴基的书中，自然数是通过集合论定义的。为了定义自然数，集合论中还需要其它的一些准备工作，这些准备工作大概占用了一百多页。在这一百多页中，因为尚未定义自然数，所以所有的页面都是没有页码的……（这种写法对读者实在是一种折磨，所以在英译本中，页码又加了回来）。

希尔伯特的几何基础出~~[illegible]~~更早。

开始分析，找出导致问题的原因，然后在此基础上重建整个数学大厦。

集合论中之所以有矛盾，主要原因是人们定义集合时太随意了，用任何性质都可以定义集合，使得"集合"这个名字被赋予太多太广的情况。为了解决这一问题，需要严格地限制对"集合"这个词的使用，限制构造集合的方法，由此得到的新的集合论即公理化集合论。因为这些公理最初由策梅罗和弗兰克尔提出，所以一般称之为ZF公理系统。

集合论自身的问题解决之后，数学大厦的重建工作由布尔巴基完成。布尔巴基不是一个人，而是一批法国青年数学家的共同笔名。他们的初衷是要写本数学分析教材，但是他们发现，要定义实数，首先要有一套完善的集合论、代数学、拓扑学理论，所以他们按照最严谨的风格重写了集合论等预备知识，然后才写出一元微积分。接下来，他们又继续按这种风格重写了现代数学的很多其它分支，可以说，现代数学的书写风格就是由布尔巴基缔造的。后来，布尔巴基虽然未能完成重写整个现代数学这个目标，但他们已经深深地影响了整个现代数学。

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

我们的高中课程基本上相当于第三次数学危机前的数学. 所以, 数学分析这门课就相于在讲授布尔巴基对数学分析乃至现代数学的看法.

布尔巴基把现代数学建立在集合论的基础上. 他们认为各种数学结构都是在集合之上赋予一些基本结构得到的. 布尔巴基认为有三种结构最为基本, 分别是代数结构, 拓扑结构和序结构. 代数结构就是在集合上赋以运算, 拓扑结构则是赋以满足一定性质的子集用来定义邻域等位置关系. 序结构则赋以某种大小关系. 例如在~~基本的~~数学分析中, 这三种结构都会出现, 但不会太复杂. 只研究各种代数结构的就是代数学. 只研究拓扑结构的就是拓扑学. 各种分析学都会使用大量的不等式, 所以序结构在其中起着重要的作用. 用代数方法研究拓扑学就是代数拓扑. 用分析方法研究数论则得到解析数论. 拓扑和分析相结合则可得到各种几何学.

我们的数学分析不会按布尔巴基的讲法来讲, 因为那实在不适合初学者. 但是为了尽可能快地进入

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

…现代数学，我们在结构上还是沿用布尔巴基的框架，只不过在逻辑、集合、代数、拓扑等预备知识上从简，只讲最小的、最易于接受的部分，~~我们也要像法国教材那样自立起，所有结论都给出证明，所以一些不易证~~ 具体来说，本课程大致分这样几部分：

Part I：一元微积分：

1. 预备知识：数学语言、逻辑、量词、集合论、函数、序集…
2. 实数理论：域、序域、完备化、表示法、基本定理们…
3. 极限论：数列、极限、柯西准则、单调准则、…
4. 连续函数：定义、性质、各种定理…
5. 微分学：导数、性质、计算法、中值定理、泰勒公式…
6. 单调函数与凸函数：间断点、有界变差、导数、…
7. 积分学：定义、性质、可积性条件、计算方法、应用、…

Part II：多元微积分：

1. $\mathbb{R}^n$ 的拓扑
2. 多元微分学
3. 多元积分学
4. 曲面与微分形式
5. 场论初步

Part III：Fourier 分析

1. 函数项级数
2. Fourier 级数
3. 含参积分
4. Fourier 变换
5. 渐近分析

Date:
Place:
Reminders

按照语言学的术语，数学符号可以是能指，没有所指→

Date:
Place:
Reminders

~~第一章~~ §1. 预备知识

§1.1 数学语言

第三次危机的教益是：人类的直觉是不可靠的，在严肃的数学研究中必须将直觉的影响剔除出去。希尔伯特以欧氏几何为例示范了如何做到这一点。

一直以来，欧氏几何被认为是严格数学的典范。它从五条基本的公设出发，推出了一切几何定理。希尔伯特仔细考察了欧几里得的所有证明，发现他隐含地使用了很多在人类看来不言自明的性质。希尔伯特将这些性质提炼出来，得到五组共二十多条公理。接下来，希尔伯特断言，现在即使由人类以外的智慧物种或计算机程序也可由这五组公理推出全部欧氏几何了。在这个新的公理系统中，虽然也有点、直线等概念，但它们现在只是一些名字，没有直观上的内涵。人们可以把它们替换成任何别的名字，如苹果和桔子，并不会改变任何定理。

为了理解这种脱离内涵的形式推理，我们来看一个来自侯世达的《哥德尔、埃舍尔、巴赫》的有趣的游戏。

不是. 因为规则1.2.3.4可以推出好词中I的个数一定不是3的倍数. 所以

例: MU谜题. 假设我们的字母表只有三个字母M. I. U. 由它们构成的有限序列叫做词. 现在规定.

~~0. MI是好词.~~

~~1. 若一个好词以I结尾. 则W U也是好词~~

~~2. 若一个好词以M开头. 则~~

0. MI是好词.

1. 若 xI 是定理, 则 xIU 也是定理.

2. 若 Mx 是定理, 则 Mxx 也是定理.

3. 若 $xIIIy$ 是定理, 则 xUy 也是定理.

4. 若 $xUUy$ 是定理, 则 xy 也是定理.

问题: MU是否是定理? 若MI是定理

在现代数学的形式语言中, 公理就像MI, 各种逻辑推理规则则类似于替换规则1.2.3.4. 数学问题则总是问从给定的一些公理出发, 利用替换规则能否得到某个感兴趣的定理.

注意上述类比不能过度解读为数学已经没有人类什么事了, 纯粹就是字符替换游戏. 这种类比只是要说明, 如何将数学证明中基于直觉的部分剥离, 得到可靠的形式证明. 在数学

Date:
Place:
Reminders

设P.Q是命题，

$P\wedge Q$ 表示 P且Q

$P\vee Q$ 表示 P或Q

$\neg P$ 表示 非P.

$P\Rightarrow Q$ 表示 P蕴含Q.

$P\Leftarrow Q$ 表示 Q蕴含P.

$P\Leftrightarrow Q$ 表示 P.Q等价.

设x是变量，$P(x)$ 是依赖x的命题.

$\forall x\, P(x)$ 表示对任意x，$P(x)$ 都成立.

$\exists x\, P(x)$ 表示存在x使 $P(x)$ 成立.

Date:
Place:
Reminders

实践中，证明总是基于~~某种直觉~~多种符号的直观含义才能找到的. 如果靠计算机暴力搜索，只能找到大量的废话.

下面我们就来介绍数学的形式语言. 它也有字母表，词，替换规则，等概念.

I. 字母表：数学语言的字母可分为两类：逻辑符号和非逻辑符号.

1. 逻辑符号：

- 逻辑连接符：$\wedge$. $\vee$. $\neg$, $\Rightarrow$. $\Leftarrow$. $\Leftrightarrow$.
- 量词符号：$\forall$, $\exists$.
- 变量：a.b. c,d, … • 标点：(.). [.] …

2. 非逻辑符号：非逻辑符号是数学的具体内容. 它们可以分两类，一类可以充当名词，一类则作谓语.

- 名词型有常数 ($1.0.\pi.\frac{1}{2},\phi,\cdots$) 和各种函数 ($1+1$. $\sin 30^\circ$, $\cos x$, $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$).
- 谓语型的也有常数 (True. False) 和依赖变量的 ($x=y$. $1>0$, $\phi\in S$, $a+b>c$, $(x>1)\wedge(x<2)$, …).

它们都可写为 $f(x_1,\cdots x_n)$ $(n\geq 0)$ 或 $P(x_1,\cdots,x_n)$ $(n\geq 0)$ 的形式，名词型的f是一个函数，谓语型的P则是某种命题.

Date: ....
Place: ....

Reminders

补充一个符号":=", 表示赋值(或定义). 如 $f(x):=x^2+1$ 就是把 x^2+1 的值赋给 $f(x)$, 或者说定义了一个函数 f, 它在 x 上的值是 x^2+1. 赋值号并不是数学理论必须的符号, 它只是在书写数学时一种简化记号的手段.

当 $n=0$ 时, 这一条推出常数都是项. →

补一条: · 只有经有限次使用上述规则得到的东西才叫项.

Date: ....
Place: ....

Reminders

II 构成规则: 并不是字母的任何组合都是合法的. 如 $\sin(+)=2(($, 所以必须规定哪些组合是合法的数学表达式.

合法的数学表达式也像非逻辑符号一样分为名词型和谓语型两类.

1. 名词型表达式也叫项(term). 它由如下规则递归地定义:
   - 每个变量都是项.
   - 若 f 是一个 n 元名词型非逻辑符, $t_1, \dots, t_n$ 是项, 则 $f(t_1,\dots,t_n)$ 是项.

2. 谓语型表达式也叫公式(formula), 它的定义如下:
   - 若 P 是 n 元谓语型非逻辑符, $t_1, \dots, t_n$ 是项, 则 $P(t_1,\dots,t_n)$ 是公式.
   - 若 φ 是公式, 则 $(\neg\varphi)$ 是公式.
   - 若 φ, ψ 是公式, 则 $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\to\psi)$, $(\varphi\leftarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ 都是公式.
   - 若 φ 是公式, x 是变量, 则 $\forall x\varphi$ 和 $\exists x\varphi$ 也是公式.
   - 只有经有限次使用上述规则得到的东西才叫公式.

Date:

Place:

Reminders

~~III. 推理规则. 基本的推理规则只有一条.~~
~~若P蕴含Q, 且P, 则Q.~~ ~~$P \Rightarrow Q, P \longrightarrow Q$.~~

III 推理规则. 基本的推理规则只有一条:

$$P \Rightarrow Q,\ P \longrightarrow Q.$$

即若P蕴含Q, 且P成立, 则Q成立.

IV 公理: ~~所有理论都遵循相同的~~ 公理分逻辑公理和非逻辑公理, 所有数学理论都遵循相同的逻辑公理, 但不同的理论可以有不同的非逻辑公理(如欧氏几何和非欧几何的公理就不同, 但它们都是好的数学理论).

在这里我们就不去罗列逻辑公理了, 因为它们都是很直观的一些规则. 我们的目的并不是研究数理逻辑, 所以关于语言的介绍就到这里.

§1.2 集合论(1): 公理.

~~罗素悖论表明, 康托尔的内涵公理.~~
~~公理(内涵) 对性质P存在集合 $X=\{x \mid P(x)\}$ 是错的.~~

在这一节中我们定义什么是集合. 这并不容易. 康托尔引入集合这一概念时只是说集合是具有相同性质的元素的汇集. 用数学符号来写就是对于依赖变量x的谓词$P(x)$, 存在一个集合 $S=\{x \mid P(x)\}$. 罗素悖论说明这一公理其实是自相矛盾的. 所以必须避免.

事实上, 上一定义还有一个问题. 注意最后一个词"汇集", 这其实就是"集合"的同义反复. 所以是一个循环定义, 因此并不是一个合理的定义. 事实上, 集合是现代数学的第一个概念, 在它之前没有任何其它概念存在. 所以任何涉及其它术语的定义都是不对的.

为了解决上述问题, 希尔伯特等人引入了公理化方法. 这一方法的要点在于, 我们不去谈论集合"是什么", 而是谈论集合应该具有什么性质. 从前面说的形式主义观点看, "是什么"~~的问题~~是人们如何理解数学概念的问题. 它对数学本身来说并不是必须的.

~~下面我们将逐条考察中学时学过的关于集合的各种性质, 并用形式化的语言重写它们, 使之成为公理.~~

I. 外延公理.

集合的最基本性质是① 集合中的元素不计顺序. ② 集合中

Date:
Place:
Reminders

若有重复的元素，则可以去掉多余的。举例来说，$\{x,y\}=\{y,x\}$，$\{x,x\}=\{x\}$ 这两条性质都可以如下公理中推出：

<u>外延公理</u>：若集合 X，Y 拥有相同的元素，则 $X=Y$。

$$\forall u(u\in X \Leftrightarrow u\in Y) \Rightarrow X=Y.$$

它的逆命题：$X=Y \Rightarrow \forall u(u\in X \Leftrightarrow u\in Y)$ 是“$=$”的性质：~~若X=Y，则~~ 若 $X=Y$，则关于 X 的性质对 Y 也一定成立。所以我们有 $\forall u(u\in X \Leftrightarrow u\in Y) \Leftrightarrow X=Y$。

推论：~~证明~~ $\{x,y\}=\{y,x\}$。

证明：只需证对任意的 u，$u\in X \Leftrightarrow u\in Y$。若 $u\neq x$ 且 $u\neq y$，则 $u\notin X$，此时同样有 $u\notin Y$。所以上式成立。若 $u=x$ 或 $u=y$，则 $u\in X$，此时同样有 $u\in Y$，所以也成立。以上两种情况必居其一，所以 $\{x,y\}=\{y,x\}$。 □

练习：求证 $\{x,x,y\}=\{x,y\}$。

II 配对公理。对于任何 x，y 存在集合 $\{x,y\}$。

$$\forall x\,\forall y\,\exists S\,\forall u(u\in S \Leftrightarrow (u=x)\vee(u=y)).$$

推论：对任何 x 存在集合 $\{x\}$。

证明：因为 $\{x,x\}=\{x\}$。 □

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

推论：由满足上述条件的 S 是唯一的。 $(a=1,2)$

证明：假设存在 S_1, S_2 都满足 $\forall u(u\in S_a \Leftrightarrow u=x \vee u=y)$.

则有 $\forall u(u\in S_1 \Leftrightarrow u\in S_2)$. 由外延公理，$S_1=S_2$. □.

在数学中除了无序的集合以外，我们还要经常处理有序的一组数据。这种结构可通过如下方式定义

定义：$(a,b):=\{\{a\},\{a,b\}\}$.

引理：$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow (a=c)\wedge(b=d)$.

证明：$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$.

1. 若 $a=b$. 则 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\}\}$.

于是 $\{c\}=\{c,d\}=\{a\}$. 所以 $c=a$. $d=a$. 得证.

2. 若 $a\neq b$. 则 $\{a\}\neq\{a,b\}$ (因为 $b\in\{a,b\}\wedge b\notin\{a\}$)

① 若 $\{a\}=\{c\}$. 则 $a=c$. 于是 $\{a,b\}=\{c,d\}$. 因为 $b\neq a=c$.

所以 $b\in\{c,d\}\Rightarrow b=d$. 得证.

② 若 $\{a\}=\{c,d\}$ 则 $c=d=a$. $\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{c\}\}$.

于是 $\{a,b\}=\{c\}$. 所以 $b=c=a$ 矛盾. 所以这种情况不可能. □

类似地，我们还可定义更多有序元组

$(a,b,c):=((a,b),c)$.

$(a,b,c,d):=((a,b,c),d)$, $(a_1,\cdots a_{n+1}):=((a_1,\cdots,a_n),a_{n+1})$

练习：$(a_1,\cdots a_n)=(b_1,\cdots b_n) \Leftrightarrow a_1=b_1\wedge\cdots\wedge a_n=b_n$.

Date:
Place:
Reminders

Ⅲ. 分离公理. 这条公理是对之前错误的内涵公理的修正. 它的要点是将变量的取值范围限定在一个给定的集合内.

分离公理: 设 X 是集合, $p_1\cdots p_n$ 是变量, φ 是依赖变量 u 和 $p_1\cdots p_n$ 的命题, 则存在集合 $Y=\{u\in X\mid \varphi(u,p_1\cdots p_n)\}$.

$$\forall X\,\forall p_1\cdots\forall p_n\,\exists Y\,\forall u\,(u\in Y\Leftrightarrow u\in X\wedge\varphi(u,p_1\cdots p_n)).$$

利用分离公理可以定义两集合的交和差:

定义: 设 X, Y 是集合. 定义

$$X\cap Y=\{u\in X\mid u\in Y\}\qquad X-Y=\{u\in X\mid u\notin Y\}.$$

$X-Y$ 有时也写为 $X\setminus Y$.

推论: 若至少存在一个集合, 则存在空集.

证明: 设 X 是集合, 则存在 $\varnothing=\{u\in X\mid u\neq u\}$. □

后面的无穷公理会保证至少有一个集合. 所以空集的确是存在的.

两个集合 X, Y 叫做不交的, 如果 $X\cap Y=\varnothing$.

对任意多的集合也可谈论交. 设 C 是以集合为元素的集合. 不妨设 $X\in C$. 定义

$$\bigcap C=\{u\in X\mid \forall Y\,(Y\in C\Rightarrow u\in Y)\}.$$

~~[illegible]~~ $X\cap Y=\bigcap\{X,Y\}$.

例如.

Date:
Place:
Reminders

若 $C=\varnothing$, 规定 $\bigcap C=\varnothing$ →

Date: ....

Place: ....

Reminders

Date: ....

Place: ....

Reminders

IV 并集公理：设 C 是以集合为元素的集合，则存在集合 $S=\cup C$.

$\forall C \exists S \forall u(u\in S \Leftrightarrow \exists x(x\in C \wedge u\in x))$.

由此公理，我们可定义 $X\cup Y=\cup\{X,Y\}$, $X\cup Y\cup Z=(X\cup Y)\cup Z$ 等等.

另外，还可定义 $\{a,b,c\}=\{a,b\}\cup\{c\}$, $\{a_1,\cdots,a_n\}=\{a_1\}\cup\cdots\cup\{a_n\}$.

V 幂集公理. 对集合 X, 它的所有子集构成一个集合 $P(X)$. (叫做 X 的幂集)

$\forall X \exists Y \forall u(u\in Y \Leftrightarrow u\subseteq X)$.

其中子集的概念可由下式定义

$U\subseteq X := \forall z(z\in U \Rightarrow z\in X)$.

若 $U\subseteq X$ 且 $U\neq X$, 则称 U 为真子集, 记 $U\subset X$. (不常用)

利用幂集可以定义更多结构.

1. 设 X, Y 是集合, 定义它们的笛卡尔积为

$X\times Y := \{(x,y) \mid x\in X, y\in Y\}$.

上式右边的确是一个集合, 因为它等于

$\{c\in P(P(X\cup Y)) \mid \exists a \exists b(a\in X \wedge b\in Y \wedge c=(a,b))\}$.

类似地, 还可定义 $X\times Y\times Z$, $X_1\times\cdots\times X_n$, $X^n=\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n个}$ 等.

2. 函数. 首先回顾一下中学对函数的定义: 设 X, Y 是集合, f 是一个关系, 使得对任意 $x\in X$ 都有唯一的 $y=f(x)\in Y$

Date:
Place:

Reminders

因为 $(a_1,\cdots,a_n):=((a_1,\cdots,a_{n-1}),a_n)$，所以n元关系可以看为二元关系.
下面可假设 $n=2$.

① 若集合 R 的元素都是n元有序对，则称R为一个n元关系

② 定义 $\mathrm{dom}(R)=\{u \mid \exists v((u,v)\in R)\}$. （若R为n元关系，则 $\mathrm{dom}(R)$ 为n-1元关系）
$\mathrm{ran}(R)=\{v \mid \exists u((u,v)\in R)\}$.
注意 $\mathrm{dom}(R)\subseteq \bigcup\bigcup R$. $\mathrm{ran}(R)\subseteq\bigcup\bigcup R$. 所以它们都的确是集合.

③ 一个二元关系f叫函数如果 $((x,y)\in f \wedge (x,z)\in f)\Rightarrow y=z$.
这个y叫f在x处的值，记为 $y=f(x)$.

④ f叫X上的函数如果 $\mathrm{dom}(f)=X$. f叫X到Y的函数如果 $\mathrm{dom}(f)=X$, $\mathrm{ran}(f)\subseteq Y$.

其它函数操作:
① 限制：设 $f:X\to Y$ 是函数. $Z\subseteq X$. 则可定义f在Z上的限制
$f|_Z=\{(x,y)\in f \mid x\in Z\}$.
② 复合：设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$. 则可定义 $g\circ f:X\to Z$.

~~单射 满射 双射 逆 反像 等性质~~

Date:
Place:

Reminders

对应，则f叫做一个函数". 这个定义实际上是有问题的，因为它用到两个词"关系"和"对应". "关系"是在这里没有定义. 而"对应"则是"函数"的同义反复. 所以这也是一个循环定义，而且还不完整. 下面我们将首先定义什么叫"关系"，然后给出正确的定义.

定义 ① 设X,Y是集合. 则 $X\times Y$ 的子集叫X,Y之间的关系
② 设 $R\subseteq X\times Y$ 是一个关系. 定义
$\mathrm{dom}(R)=\{x\in X \mid \exists y(y\in Y\wedge (x,y)\in R)\}$.
$\mathrm{ran}(R)=\{y\in Y \mid \exists x(x\in X\wedge (x,y)\in R)\}$.
③ 设 $f\subseteq X\times Y$ 是一个关系. 若 i) $\mathrm{dom}(f)=X$.
ii) $(x,y)\in f\wedge (x,z)\in f\Rightarrow y=z$.
则称f为一个函数关系.
在这个定义里, ③.i) 确保对每个 $x\in X$ 都有函数值. ③.ii) 则保证这个值是唯一的. 我们把这个唯一的 $y\in Y$ 叫做f在x上的值. 并记 $y=f(x)$.

幂 设X,Y是集合. 定义
$Y^X:=\{f\in P(X\times Y) \mid f是从X到Y的函数\}$.
例如，若 $Y=\{0,1\}$，则 Y^X 与X的子集一一对应，所以 Y^X 与 $P(X)$ 等势.

Date:
Place:
Reminders

~~定义: 设 f 是~~

⑤ 函数 f 叫单的, 如果 $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$.

⑥ 函数 $f: X\to Y$ 叫满的, 如果 $\mathrm{ran}(f)=Y$.

⑦ 函数 $f: X^n\to X$ 叫 X 上的 n 元运算

⑧ 设 f 是函数, X 是 dom(f) 的子集. 定义

$f|_X=\{(x,y)\in f \mid x\in X\}$

则 $\mathrm{dom}(f|_X)=X$, $f|_X$ 叫 f 在 X 上的限制

⑨ ~~设 X 是集合 f 是~~ 设 f 是函数, X 是 dom(f) 的子集,

定义 $f(X)=\{y\in \mathrm{ran}(f) \mid \exists x(x\in X \wedge y=f(x))\}$

⑩ 设 f 是函数, Y 是 ran(f) 的子集.

定义 $f^{-1}(Y)=\{x\in \mathrm{dom}(f) \mid f(x)\in Y\}$.

⑪ 既单又满的函数叫双射.

⑫ 设 R 是关系. 定义

$R^{-1}=\{(x,y) \mid (y,x)\in R\}$. 则 $\mathrm{dom}(R^{-1})=\mathrm{ran}(R)$, $\mathrm{ran}(R^{-1})=\mathrm{dom}R$

⑬ 设 R_1, R_2 是关系. 定义

$R_2\circ R_1=\{(x,z) \mid \exists y((x,y)\in R_1\wedge (y,z)\in R_2)\}$

性质: ① 若 $f: X\to Y$ 是双射, 则 $f^{-1}: Y\to X$ 也是函数, 并且是双射.

② 若 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ 是函数, 则 $g\circ f: X\to Z$ 也是函数.

③ 若 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ 是双射, 则 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

Date:
Place:
Reminders

~~命题: 设 X, Y, Z 是集合, 则~~

3. 等价关系. 等价关系是另一种重要的关系. 设 R 是 X 与自身的一个关系, 即 $R\subseteq X\times X$. R 叫做一个等价关系如果,

i) (自反性) $\forall x(x\in X\Rightarrow (x,x)\in R)$.

ii) (对称性) $\forall x\forall y(x\in X\wedge y\in X\Rightarrow ((x,y)\in R\Leftrightarrow (y,x)\in R))$.

iii) (传递性) $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in X\Rightarrow ((x,y)\in R\wedge (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R))$

(i) $\Delta\subseteq R$. ii) $R^{-1}=R$. iii) $R\circ R\subseteq R$).

我们引入一种简写记号:

$\forall_{x\in X}(\cdots) := \forall x(x\in X\Rightarrow(\cdots))$.

$\exists_{x\in X}(\cdots) := \exists x(x\in X\wedge(\cdots))$.

另外, 将 $(x,y)\in R$ 简记为 xRy 则上述条件可写为

i) $\forall_{x\in X}(xRx)$. ii) $\forall_{(x,y)\in X^2}(xRy\Leftrightarrow yRx)$.

iii) $\forall_{(x,y,z)\in X^3}(xRy\wedge yRz\Rightarrow xRz)$.

设 ~ 是 X 上的一个等价关系. 对于 $x\in X$, 定义 x 的等价类为

$[x]:=\{y\in X \mid x\sim y\}$. 由等价关系定义可知, 若 $x\not\sim y$, 则

$[x]\cap[y]=\emptyset$. 于是 X 中元素可按 ~ 划分成一个个的等价类. 定义 $X/\sim=\{[x]\in P(X) \mid x\in X\}$. 叫做 X 关于等价关系 ~ 的商集 ~~这里我们用到了……性质~~

Date: VII 替换公理. $\forall S=\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $F: Sets\to Sets$. $\exists\{F(X_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.

Place:

Reminders

VIII 正规公理. 这条公理主要为了排除 $x\in x$ 或 $x_0\in x_1\in\cdots\in x_n\in x_0$ 这种集合. 它们是造成各种悖论的元凶.

正规公理: $\forall S(S\neq\emptyset \Rightarrow \exists x\in S(S\cap x=\emptyset))$.

推论: 不存在如下形式的无穷序列: $x_0\ni x_1\ni x_2\ni\cdots$ 其中 x_i 都是集合. 证明: 假设有这样的序列. 考虑集合 $S=\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$ ~~(S的存在性由…自然数的定义和一个我们…讲的替换公理)~~. 那么对 $\forall x_k\in S$. 至少有 $x_{k+1}\in S\cap x_k$. 与正规公理矛盾. □

练习: ① 若 R 是偏序, 则 R^{-1} 也是. →

② $R\circ R\subseteq R$. 你能举出 $R\circ R\neq R$ 的例子吗?

IX 选择公理: 粗略地说, 给定一个集合构成的集合 S. 可以从 S 的每个元素(也是集合)中挑一个元素构成一个新的集合.

选择函数经常用来从等价类中选代表: $X\xrightarrow{\pi}X/\sim$, $X/\sim\xrightarrow{s}X$. s.t. $\pi\circ s=id_{X/\sim}$

$\forall S\exists f(f$ 是 S 上的函数 $\wedge\ \forall x\in S(f(x)\in x))$.

将 X 的元素视为点. 将关系 $(x,y)\in R$ 画成箭头 $x\to y$. 则 i) 说明没有 自环, ii) 说明没有圈.

全序说明所有 x 在一条线上. 所以全序也叫线性序.

Date:

Place:

Reminders

VI 无穷公理. 这一公理的目的是为了确保至少存在一个无穷集. 它有多种表述. 例如下面这种

$\exists S(\emptyset\in S\wedge\forall_{x\in S}(x\cup\{x\}\in S))$.

这里定义自然数集的一个关键性质. ($0:=\emptyset$, $x+1:=x\cup\{x\}$. $1:=\{0\}$, $2:=\{0,1\}$, $3:=\{0,1,2\},\cdots$)

~~VIII 正规性公理. 这个其…一些公理我们略去不说.~~

§1.3 集合论(2): 序关系

定义 ① 设 X 是集合. X 上的二元关系 R 叫做一个偏序, 如果

i) $\forall_{x\in X}((x,x)\notin R)$. $(\Delta\not\subseteq R)$

ii) 若 $(x,y)\in R$, $(y,z)\in R$, 则 $(x,z)\in R$. $(R\circ R\subseteq R)$

由 X 和它上面的偏序构成的对 (X,R) 叫一个偏序集. 偏序经常写作 $<$. $(x,y)\in R$ 经常写作 xRy.

② 设 (X,R) 是一个偏序集. R 叫全序, 如果对 $\forall x,y\in X$, 有 $(xRy)\vee(x=y)\vee(yRx)$. $((x<y)\vee(x=y)\vee(x>y))$.

例: ① 设 X 是集合. $Y=P(X)$. 在 Y 中定义二元关系 R

$y_1Ry_2:=(y_1\subsetneq y_2)$

另外，有时 $x<y$ 也写做 $y>x$ 为了书写顺畅.

练习：若 $x\le y$, $y\le x$, 则 $x=y$.

证明：记 $A=$"$x<y$", $B=$"$x=y$", $C=$"$y<x$".

$(A\vee B)\wedge(C\vee B)=(A\wedge C)\vee(B\wedge C)\vee(A\wedge B)\vee(B\wedge B)$

$A\wedge C\Rightarrow x<y<x$ 不可能. $A\wedge B\Rightarrow x<y=x$ 也不可能. $B\wedge C$ 同理

所以只能有 $B\wedge B=B$, 即 $x=y$. □

若 $<$ 是全序, 则 极大 $\Leftrightarrow$ 最大. 极小 $\Leftrightarrow$ 最小.

元与界的区别在于: 元总在 X 中, 界可以在外面.

~~所以, 若上确界存在且在 X 中, 那么上确界就是最大元~~

~~练习: ① 最大元, 最小元 公唯一 ② 若 $\sup(X)\in X$~~

练习 ① 最大元, 最小元是唯一的.

② 上确界 下确界是唯一的.

③ 若 a 是 X 的上界且 $a\in X$, 则 $a=\max(X)=\sup(X)$.

Date:
Place:
Reminders

则 R 是一个偏序. 若 X 包含不止一个元素, 则 R 一定不是全序 (考虑 $y_1=\{x_1\}$, $y_2=\{x_2\}$)

② 设 X 是有理数集, 则 $R=<$ 和 $R=>$ 都是全序.

下面为了记号方便, 我们总把偏序 R 记为 $<$. 注意它只是记号, 并不说明 $<$ 左边的东西一定比右边小 (~~因为这里小是大于关系~~). 例如上面例子中 $R=>$ 的情况. 再定义两个符号 $x\le y := (x<y)\vee(x=y)$. $x\nless y := \neg(x<y)$.

注意, 若序不是全序, 则 $x\nless y$ 不一定等价于 $y\le x$.

例如上面例子中 $y_1\nless y_2$. 但 $y_2\nless y_1$. $y_2\nless y_1$.

定义: 设 $(P,<)$ 是偏序集, X 是 P 的非空子集, $a\in P$.

① a 叫 X 的极大元, 如果 $a\in X\wedge\forall x\in X(a\nless x)$.

② a 叫 X 的极小元, 如果 $a\in X\wedge\forall x\in X(x\nless a)$.

③ a 叫 X 的最大元, 如果 $a\in X\wedge\forall x\in X(x\le a)$. 记 $a=\max(X)$

④ a 叫 X 的最小元, 如果 $a\in X\wedge\forall x\in X(a\le x)$. 记 $a=\min(X)$.

⑤ a 叫 X 的一个上界, 如果 $\forall x\in X(x\le a)$.

⑥ a 叫 X 的一个下界, 如果 $\forall x\in X(a\le x)$.

sup = supremum. inf = infimum.

一些简单的事实：若 a 是 X 的上界，$a<b$，则 b 也是 X 的上界，所以才要问最小的上界是谁。同理，若 a 是 X 的下界，$b<a$，则 b 也是 X 的下界，所以才要看最大下界。基于同样的理由，我们不会去问最大上界或最小下界这种问题，因为这只能得到集合 P 的最大元或最小元，与我们定义的集合 X 无关。

⑦ a 叫 X 的上确界，如果 a 是 X 的上界中最小的。记 $a=\sup(X)$.

⑧ a 叫 X 的下确界，如果 a 是 X 的下界中最大的。记 $a=\inf(X)$.

例 ① 设 $P=\mathbb{Q}$，$<$ 就是 $<$，$X=\{q\in P \mid 0\le q\le 1\}$. 则 X 的最大元、极大元都是 1，最小元、极小元都是 0。任何大于或等于 1 的有理数都是 X 的上界，任何小于或等于 0 的有理数都是 X 的下界。于是 X 的上确界为 $\{q\in P \mid q\ge 1\}$ 的最小元，即 1。X 的下确界为 $\{q\in P \mid q\le 0\}$ 的最大元，即 0.

② 若定义上例中的序取为 $>$，则大小、上下互易。例如 X 的最大元是 0，最小元是 1。虽然听起来奇怪，但这是对的。因为"大"、"小"只是由关系 R 规定出来的，不要与它们在自然语言中的含义相混淆。

③ 若定义 $X=\{q\in P \mid 0<q<1\}$，则 X 没有极大、极小、最大、最小，但它仍有上下确界。

④ 若定义 $X=\{q\in P \mid q^2<2\}$，则 X 连上下确界都没有了。因为 $\sqrt{2}\notin P$.

定理-定义：设 $(X,<)$ 是全序集，则以下性质等价

i) X 的每个非空有上界子集一定有上确界

ii) X 的每个非空有下界子集一定有下确界

Date:
Place:
Reminders

iii) 若 X 的非空子集 A, B 满足 $\forall a\in A\ \forall b\in B\ (a\le b)$, 则存在 $c\in X$ 使得 c 是 A 的上界, B 的下界.

具有这样性质的全序集叫戴德金完备的, 简称序完备.

证明: i) $\Rightarrow$ ii). 设 B 是 X 的非空有下界子集. 定义 $A=\{a\in X \mid a$ 是 B 的下界$\}$, 则 A 非空(因为 B 的确有下界), A 有上界(因为 B 非空). 所以由 i) 知, A 有上确界, 记之为 $c=\sup(A)$. 因为每个 B 的元素都是 A 的上界, 而 c 是所有 A 的上界中最小的, 所以对 $\forall b\in B$, 有 $c\le b$. 即 c 是 B 的下界, 于是 $c\in A$. 因为 c 是 A 的上确界, 所以 c 就是 A 的最大元. 所以, 由下确界的定义, $c=\inf(B)$.

ii) $\Rightarrow$ iii), 取 $a\in A$ (A 非空, 所以 a 存在), 则 a 是 B 的下界, 于是由 ii), B 有下确界, 记之为 $c=\inf(B)$. 因为 A 中所有元素都是 B 的下界, 而 c 是 B 的下界中最大的, 所以 c 是 A 的上界.

iii) $\Rightarrow$ i) 设 A 是非空有上界集合. 定义 $B=\{b\in X \mid b$ 是 A 的上界$\}$. 则 B 非空(因为 A 有上界) 且 A, B 满足 iii) 的条件, 于是存在 $c\in X$ 它既是 A 的上界又是 B 的下界. 于是 $c\in B$, 于是 c 就是 B 的最小元. 根据上确界的定义, 有 $c=\sup A$. □

前面的例子表明 $\mathbb{Q}$ 不是序完备的. 在下一章我们将证明, 可以在 $\mathbb{Q}$ 中添加一些元素, 使得由此构造的新集合是序完备的.

Date:
Place:
Reminders

card = cardinal 基数 →

例. ① 若 X, Y 是有限集, 则 $\mathrm{card}(X)$, $\mathrm{card}(Y)$ 可以 → 理解为它们的元素个数 (这正是自然数的定义之一)

② $X = \mathbb{N}$. ~~$Y=2\mathbb{N}\subset X$~~. $Y = \{n\in X \mid n$ 是偶数$\}$.
则可定义 $f: X\to Y$ $m\mapsto 2m$. 这是一个双射. 所以 $\mathrm{card}X = \mathrm{card}Y$. 但 Y 是 X 的真子集. 无穷集可与自己的真子集等势, 但有限集不行, 有人把这作为无穷的一种定义.

③ $X=\mathbb{N}$. $Y=\mathbb{Q}$. 我们要构造从 X 到 Y 的双射. 即将有理数不重不漏地排成一列 $r_1, r_2, \cdots$. 对于任意 $r\in\mathbb{Q}$. 把它写为 $r=\frac{p}{q}$. 其中 $p\in\mathbb{Z}$. $q\in\mathbb{N}$. $q>0$. 且 $(p,q)=1$. 这种写法是唯一的. 定义一个函数 $h:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$, $h(r)=|p|+q$. 注意 $|p|\geq 0$. $q\geq 1$. 所以满足 $h(r)=k$ ($k>0$) 的有理数只能有有限多个. 记这些个数是 N_k. 并将它们由小到大排成 $r_{k,1}, r_{k,2}, \cdots, r_{k,N_k}$.
那么所有有理数可排成 $r_{1,1}, r_{2,1}, r_{2,2}, r_{3,1}, r_{3,2}, r_{3,3}, r_{3,4}, \cdots$
$=\{0, -1, 1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3, -4, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \cdots\}$

Date:
Place:
Reminders

§1.4. 集合论(3): 集合的势

~~定义: ① 设 X, Y 是集合. 若存在 X 到 Y 的双射, 则称 X 与 Y 等势. 记为 $\mathrm{card}X=\mathrm{card}Y$~~
~~② 若 X 与 Y 的某一子集等势, 则称 X 的基数不大于 Y 的基数. 记为 $\mathrm{card}X\leq\mathrm{card}Y$ 或 $\mathrm{card}Y\geq\mathrm{card}X$.~~

定义: 设 X, Y 是非空集合. 我们记
$\mathrm{card}X\leq\mathrm{card}Y$, $\mathrm{card}X=\mathrm{card}Y$, $\mathrm{card}X\geq\mathrm{card}Y$
如果存在 $f: X\to Y$ 是单、双、满的. 另外, $<$ = "$\leq\wedge\neq$".
$>$ = "$\geq\wedge\neq$".

定理: ① $\mathrm{card}X\leq\mathrm{card}Y \iff \mathrm{card}Y\geq\mathrm{card}X$.
(Cantor-Bernstein) → ② 若 $\mathrm{card}X\leq\mathrm{card}Y$, $\mathrm{card}Y\leq\mathrm{card}X$, 则 $\mathrm{card}X=\mathrm{card}Y$.
(Zermelo) → ③ 对任意集合 X, Y 或有 $\mathrm{card}X\leq\mathrm{card}Y$ 或 $\mathrm{card}X\geq\mathrm{card}Y$.

证明: ① "$\Rightarrow$" 设 $f: X\to Y$ 是单射. 取 $x_0\in X$. 定义映射
$g: Y\to X$, $g(y)=\begin{cases} f^{-1}(y) & 若\ y\in \mathrm{ran}(f) \\ x_0 & 若\ y\notin \mathrm{ran}(f)\end{cases}$, 则 g 满. 所以
$\mathrm{card}X\leq\mathrm{card}Y \Rightarrow \mathrm{card}Y\geq\mathrm{card}X$.

~~"$\Leftarrow$" 设 $f: X\to Y$ 满. 定义集合 $S=\{f^{-1}(y) \mid y\in Y\}$.~~
~~则 S 的每个元素都不是空集. 由选择公理, 存在一个 S 上的选择函数 h, 使得 $h(f^{-1}(y))\in f^{-1}(y)$. 定义 $g: Y\to X$.~~

Date:
Place:

Reminders

若 $g: Y\to X$ 满. 定义 Y上的关系: $y_1\sim y_2 \Leftrightarrow g(y_1)=g(y_2)$ 则这是一个等价关系. 记 $\tilde{Y}=Y/\sim$. 定义映射 $\tilde{g}: \tilde{Y}\to X$. $[y]\mapsto g(y)$. ($\tilde{g}$不依赖于代表元y的选取) 则 $\tilde{g}$是双射(若 $\tilde{g}([y_1])=\tilde{g}([y_2])$, 则 $g(y_1)=g(y_2)$, 于是 $[y_1]=[y_2]$. 所以单. 对于每个 $x\in X$, 存在 y 使得 $g(y)=x$. 于是 $x=\tilde{g}([y])$. 所以满) 所以满射总意味着 X"是"Y关于某等价关系的商.

对偶地. 若 $f: X\to Y$ 单. 则 $\tilde{f}: X\to f(X)$ 是双射. 所以 X总"是"Y的某个子集.

Date:
Place:

Reminders

~~$g(y)=h(f^{-1}(y))$. 注意, 若$y_1\neq y_2$, 则 $f^{-1}(y_1)\cap f^{-1}(y_2)=\phi$. 所以 $g(y_1)\neq g(y_2)$. 于是 g是单的. 所以 card~~

$\Leftarrow$ 设 $g: Y\to X$ 满. 定义 $S=\{g^{-1}(x)\mid x\in X\}$. 于是对于 $x_1\neq x_2$. 一定有 $g^{-1}(x_1)\cap g^{-1}(x_2)=\phi$. 且每个$g^{-1}(x)$都不空(因为$g$满). 由选择公理, 存在 S上的选择函数 h, 使得 $h(g^{-1}(x))\in g^{-1}(x)$ ($\subseteq Y$). 定义映射 $f: X\to Y$. $f(x)=h(g^{-1}(x))$, 则 f是单射. 所以

$\mathrm{card}\,Y\geq \mathrm{card}\,X \Rightarrow \mathrm{card}\,X\leq \mathrm{card}\,Y$.

② 设 $f: X\to Y$, $g: Y\to X$ 都是单射. 考虑X中的一个点 x. 若 $x\in g(Y)$, 则可定义 $g^{-1}(x)$ ($\in Y$), 它是唯一的. 若 $g^{-1}(x)\in f(X)$ 则又可定义 $f^{-1}(g^{-1}(x))$ ($\in X$), 它也是唯一的. 对$f^{-1}(g^{-1}(x))$又可进行类似的讨论, 这个过程不断进行下去, 我们会遇到三种情况. 第一种是无限进行下去. 第二种是终结于某个 $X-g(Y)$ 中的点(比如x本身). 第三种是终结于 $Y-f(X)$中的某个点(比如$g^{-1}(x)$).

我们定义集合 ~~X_1, X_2, X_3~~ $X_k=\{x\in X\mid$ 对于x, 上述过程属于第k种情况$\}$. 那么显然有 $X_1\cup X_2\cup X_3=X$, 且 $X_i\cap X_j=\phi$ $(i\neq j)$.

Y也可做同样的分划, 得 Y_1, Y_2, Y_3 (Y_1无限进行, Y_2终结于$X-g(Y)$, Y_3终结于$Y-f(X)$).

考虑映射 $f_1 (=f|_{X_1}): X_1\to Y$. 我们首先断言 $f_1(X_1)\subseteq Y_1$.

因为若有 $x\in X_1$, $y=f(x)\in Y_2$, ~~对y进行上述讨论~~, $f^{-1}(y)=x\in X_1$, 于是上述过程可无限进行(X_1的定义). 但$y\in Y_2$说明此过

~~接下来可以说明 $f_1: X_1 \to Y_1$ 是满的. 若不满, 即存在 $y \in Y_1$, 使得 $\forall x \in X_1$, $f(x) \neq y$. 注意 y 一定在 f 的像中, 否则上述过程的第一步 $y \to f^{-1}(y)$ 就走不动了. 于是 $y \in Y_3$. 设 $y = f(x)$, 考虑 x 的位置. 若 x 在 X_2 中, 则过程应中止于 X. 所以 $y \in Y_2$. 同理, 若 $x \in X_3$, 则 $y \in Y_3$. 这都和 $y \in Y_1$ 矛盾. 所以只能有 $x \in X_1$.~~

接下来说明 $f_1: X_1 \to Y_1$ 满. ~~若存在 $y \in Y_1$ 不在 f_1 的像~~ 注意 Y_1 中的元素总能进行上述操作, 所以 y 一定在 $f(X)$ 中. 若 $x = f^{-1}(y) \in X_2$, 则操作将终止于 X. 这与 $y \in Y_1$ 矛盾. 同理 x 也不属于 X_3. 所以只能有 $x \in X_1$.

程将终结于 X, 矛盾. 所以 $y \notin Y_2$. 同理可以说明 $y \notin Y_3$. 所以 $y \in Y_1$. ~~另外还要说明 f_1~~ ~~接下来可以说明 $f_1: X_1 \to Y_1$ 是满的. 因为若有 $y \in Y_1 - f(X)$, 则上述过程在 y 处就中止了. 于是 $y \notin Y_1$.~~

再考虑 $f_2: X_2 \to Y$. 我们首先断言 $f_2(X_2) \subset Y_2$. 设 $y = f(x)$. 对 y 上述过程, 第一步得到 $x = f^{-1}(y) \in X_2$. 于是此过程 ~~实施~~ 应终结于 X. 所以 y 本身属于 Y_2. 另外, 与上一段类似可说明 ~~$f_2(X_2)$~~ $f_2: X_2 \to Y_2$ 是满的.

最后考虑: $g_3: Y_3 \to X$. 这个讨论与上一段是完全一样的. (只要交换 X, Y, g_3 就是 f_2). 所以 $g_3: Y_3 \to X_3$ 是满的.

注意 f, g 本身单, 所以 f_1, f_2, g_3 也单. 所以它们都是双射.

下面定义映射 $h: X \to Y$,
$$h(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in X_1 \\ f_2(x) & x \in X_2 \\ g_3^{-1}(x) & x \in X_3 \end{cases}$$
那么 h 也是双射. 所以

$\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

③ 此结论需要良序定理或佐恩引理, 而两者是选择公理的等价命题, 表述和证明都较繁, 故此处从略. □

定理 (康托尔). 对任意集合, $\operatorname{card} X < \operatorname{card} P(X)$.

证明: 首先, $f: X \to P(X)$, $x \mapsto \{x\}$ 是一个单射. 所以 $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} P(X)$. 其次, 我们要说明 $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} P(X)$.

命题: card $P(X)$ = card 2^X, $(2=\{0,1\})$ →

证明: 构造映射 $\varphi: P(X) \to 2^X$

$$A \mapsto f_A : X \to \{0,1\}$$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & 若\ a \in A \\ 0 & 若\ a \notin A \end{cases}$$

则 φ 是单的 (若 $f_A = f_B$, 即对 $\forall x \in X$, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, 于是 $A=B$)

φ 是满的 (对任意 $f: X \to \{0,1\}$, 定义 $A = f^{-1}(1)$ 则 $f_A = $

于是 φ 是双射, 所以 card $p(X)$ = card 2^X. □

= card $\mathbb{R}$

问题: card $\mathbb{N}$ < card $2^{\mathbb{N}}$ < card $2^{2^{\mathbb{N}}}$ < ⋯

是否有无穷集 S, 使得

card $\mathbb{N}$ < card S < card $2^{\mathbb{N}}$ (连续统假设) 或

card $P^k(\mathbb{N})$ < card S < card $P^{k+1}(\mathbb{N})$ (广义连续统假

即不存在 $f: X \to P(X)$ 是双射. 设 $f: X \to P(X)$ 是任一函数. 那么集合 $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ 是 X 的子集 因此是 $P(X)$ 的元素. 我们断言 Y 一定不在 $f(X)$ 中. 若不然, 存在 $x \in X$, $f(x) = Y$. 那么 x 是否在 Y 中呢? 若 $x \in Y$, 由 Y 的定义应有 $x \notin f(x) = Y$ 矛盾. 反之, 若 $x \notin Y = f(x)$, 由 Y 的定义应有 $x \in Y$, 又矛盾. 所以这样的 x 一定不存在. 因此任何 $X \to P(X)$ 的函数都不可能是满的. 所以 card X < card $P(X)$. □

~~推论: 存在无穷多不等势的集合~~

§1.5 自然数

我们前面引入过集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. 其中 $0 := \varnothing$.

$1 := S(0)$, $2 := S(1)$, $3 := S(2)$, ⋯ 其中 $S(x) = x \cup \{x\}$.

$= \{\varnothing\} = \{0\}$ $= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0,1\}$ $= \{0,1,2\}$

~~它具有如下性质: $\mathbb{N}$ 是集合, S 是 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射. 满足~~

~~i) 集合 $\mathbb{N} - S(\mathbb{N})$ 只有一个元素 0.~~

~~ii) S 是单射~~

~~iii)~~

S 实际上是 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的函数 且满足 i) S 单. ii) $\mathbb{N} - S(\mathbb{N}) = \{0\}$.

为什么iii)是必要的? 考虑如下例子. →

$N=\{0,1,2,\cdots\}\cup\{\cdots,-\frac{5}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots\}$

$M=\{0,1,2,\cdots\}$. $S(x)=x+1$. 则 (N,S) 满足 i) 和 ii) 但是显然 M 不是我们想要的东西.

iii) 设 M 是 N 的子集, 若 ① $0\in M$. ② $\forall x\in M\ (S(x)\in M)$, 则 $M=\mathbb{N}$.

我们下面将说明满足这样性质的集合和函数几乎是唯一的. 这个唯一的集合就是自然数集.

定义: 设 N 是集合. $S: N\to N$ 是一个映射. 若它们满足

i) S 单 ii) $N-S(N)$ 只含一个元素, 记为 0.

iii) 若 N 的子集 M 满足 ① $0\in M$. ② $\forall x\in M\ (S(x)\in M)$. 则 $M=N$.

则称 N 为一个自然数集. S 为它的后继运算.

定理: 设 $(N_i, S_i, 0_i)$ $(i=1,2)$ 为两个自然数集. 则存在双射 $f: N_1\to N_2$. 满足 $f(0_1)=0_2$. 且

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S_1"'] & N_2 \arrow[d, "S_2"] \\ N_1 \arrow[r, "f"] & N_2 \end{tikzcd}$$

, 即 $f\circ S_1=S_2\circ f$.

证明: 定义 f 如下: ① $f(0_1)=0_2$.

② 若 $x=S_1(y)$. 定义 $f(x)=S_2(f(y))$.

1. 为什么 f 是函数? 记 M 是 N_1 中属于 f 定义域的元素构成的子集. 则 ① $0_1\in M$. ② 若 $y\in M$. 则 $S(y)\in M$. 所以由性质 iii) 知 $M=N_1$. 即 N_1 的所有元素的 f 值都定义好了. 所以 f 是函数.

2. 为什么 f 单? 首先若 $f(x)=0_2$. 则 x 一定不在 S_1 的像里. 因为若 $x=S_1(y)$. 则 $0_2=f(x)=S_2(f(y))$, 所以 0_2 在 S_2 的像里. 矛盾

Date:
Place:
Reminders

由数学归纳原理, $+$ 是定义好的. →

Date:
Place:
Reminders

所以只有 $x=0_1$. 其次, 若 $y\in N_2$ 满足 $f^{-1}(y)$ 仅有一个元素, 则 $f^{-1}(S_2(y))$ 也仅有一个元素. 因为, 若有 $z_1, z_2\in N_1$, 使 $f(z_1)=f(z_2)=S_2(y)$. 那么, 注意 $z_1, z_2\neq 0_1$, 所以存在 $x_1, x_2\in N_1$, 使 $z_1=S_1(x_1)$, $z_2=S_1(x_2)$ 于是, 由 f 定义有 $f(z_1)=S_2(f(x_1))$, $f(z_2)=S_2(f(x_2))$, 于是 $S_2(f(x_1))=S_2(f(x_2))=S_2(y)$. 但 S_2 是单射的, 所以 $f(x_1)=f(x_2)=y$. 于是 $x_1=x_2$, 于是 $z_1=z_2$.

上述事实说明, 若定义集合 $M=\{y\in N_2 \mid f^{-1}(y)$ 仅有一元素$\}$. 则 ① $0_2\in M$. ② $y\in M\Rightarrow S_2(y)\in M$. 所以 $M=N_2$. 于是 f 单.

3. 为什么 f 满? 由定义知 ① $0_2\in f(N_1)$. ② 若 $y\in f(N_1)$, 设 $y=f(x)$, $S_2(y)=f(S_1(x))\in f(N_1)$, 所以 $f(N_1)=N_2$. □

上述定理说明满足 i) ii) iii) 的集合 N 和映射 S 本质上都是一样的. 这就是"唯一"的意思. 所以以后认为只有一个自然数集, 记为 $\mathbb{N}$. 后继用 $'$ 表示.

定义: 在 $\mathbb{N}$ 上定义一个二元运算: $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $(m,n)\mapsto m+n$. 其中 ① $0+n=n$. ② $m'+n=(m+n)'$.

定理: ① $\forall m,n\in\mathbb{N}$. $m+n=n+m$.
② $\forall m,n,k\in\mathbb{N}$. $(m+n)+k=m+(n+k)$

Date:
Place:
Reminders

若 $m-n=0$，则 $m=n+0=n$. 所以 $m-n=0 \Leftrightarrow m=n$. →

Date:
Place:
Reminders

证明：1. 先证明 $n+0=n$.

记 $K=\{n\in N \mid n+0=n\}$. 则 $0+0=0 \Rightarrow 0\in K$.

若 $n\in K$. 考虑 n'：$n'+0=(n+0)'=n'$，于是 $n'\in K$. 所以 $K=N$.

2. 再证明 $n+m'=(n+m)'$.

固定 $m\in N$. 记 $K=\{n\in N \mid n+m'=(n+m)'\}$，则

$0+m'=m'=(0+m)'$. 所以 $0\in K$. 若 $n\in K$. 考虑 n'.

$n'+m'=(n+m')'=((n+m)')'=(n'+m)'$，所以 $n'\in K$. 于是 $K=N$.

3. $n+m=m+n$

固定 $m\in N$. 记 $K=\{n\in N \mid n+m=m+n\}$，则 $0\in K$ $(\overset{\text{定义}}{0+m=m}\overset{\text{第1步}}{=m+0})$.

若 $n\in K$. 考虑 n'：$n'+m=(n+m)'=\underbrace{(m+n)'=m+n'}_{\text{第2步}}$. 所以 $n'\in K$. $\Rightarrow K=N$.

4. $(n+m)+k=n+(m+k)$.

固定 $m,k\in N$. 记 $K=\{n\in N \mid (n+m)+k=n+(m+k)\}$. 则 $0\in K$，若 $n\in K$.

$(n'+m)+k=(n+m)'+k=((n+m)+k)'=(n+(m+k))'=n'+(m+k)$.

所以 $n'\in K$. 于是 $K=N$. □

~~定理~~定义：设 $m,n\in N$ 若存在 $k\in N$ 使 $m=n+k$. 则这样的 k 是唯一的. 称为 m 减 n 的差. 记为 $k=m-n$.

证明：即证明若 $n+k=n+l$，则 $k=l$. ~~记 $K=\{n\in N \mid n+k=n+l\}$~~

记 $K=\{n\in N \mid (n+k=n+l)\Rightarrow k=l\}$. 则 $0\in K$ $(0+k=k, 0+l=l)$.

若 $n\in K$. 考虑 n'. $n'+k=(n+k)'$. $n'+l=(n+l)'$. $(n+k)'=(n+l)' \Rightarrow n+k=n+l$

() 笔.

练习：若 $l_1+l_2=0$，则 $l_1=l_2=0$. →

所以 $k=l$. 于是 $n'\in K$. 所以 $K=\mathbb{N}$. □

定义定理：设 $n, m\in\mathbb{N}$. 若存在 $k\in\mathbb{N}$, $k\neq 0$, 使得 $m=n+k$. 则称 m 大于 n. n 小于 m. 记为 $m>n$, $n<m$. $<$ 使 $\mathbb{N}$ 成为一个全序集.

证明：首先对 $\forall n\in\mathbb{N}$. $n\nless n$. 因为若 $n<n$. 则存在 $k\neq 0$, 使得 $n=n+k$. 另一方面 $n=n+0$. 所以 $n+0=n+k \Rightarrow k=0$. 矛盾.

其次 若 $n<m$, $m<k$. 设 $m=n+l_1$. $k=m+l_2$. 则 $k=m+l_2=(n+l_1)+l_2=n+(l_1+l_2)$. 其中 $l_1\neq 0$. $l_2\neq 0$. 于是 $l_1+l_2\neq 0$. 所以 $n<k$. 以上说明 $<$ 是序. 下面证明 $<$ 是全序.

~~1. 对于 $m, n\in\mathbb{N}$. $n<m$, $n=m$, $n>m$ 至多有一个成立. 因为由定义 $<$ 和 $=$, $>$ 和 $=$ 不能同时成立. 而由序的性质~~

即对 $n, m\in\mathbb{N}$. $n<m$. $n=m$. $n>m$ 必有一个成立.

对 n 做归纳. 固定 m 记 K 是使上述性质成立的 n 的全体. 则

1. $0\in K$. 因为 若 $m=0$. 则 $n=m$. 若 $m\neq 0$. 则 $m=0+m$ 所以 $m>0$.

2. 若 $n\in K$ 考虑 n' 与 m 的大小关系.

① 若 $n<m$. 即 $m=n+k$. $k\neq 0$. 若 $k=0'$. 则 $n+k=n+0'=(n+0)'=n'+0=n'$. 于是 $m=n'$. 若 $k\neq 0'$. 设 $k=l'$. $l\neq 0$. 则 $m=n+l'=n'+l$, 所以 $m>n'$. 所以无论哪种情况

Date:
Place:
Reminders

都有 $n' \in K$.

② 若 $n=m$. 则 $n' = 0'+m$, 其中 $0' \neq 0$. 于是 $n' > m$ 也有 $n' \in K$.

③ 若 $n > m$. 则 $n = m+k$, $k \neq 0$. $n' = (m+k)' = m+k'$, $k' \neq 0$. 所以 $n' \in K$.

所以 $K = \mathbb{N}$. 于是 $<$ 是全序. □

定义: 在 $\mathbb{N}$ 上定义另一个二元运算 $\times$: $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto m\cdot n$.

其中: ① $0\cdot n = 0$. ② $m'\cdot n = m\cdot n + n$.

定理: ① $m\cdot n = n\cdot m$. ③ $(m\cdot n)\cdot k = m\cdot(n\cdot k)$

② $(m+n)\cdot k = m\cdot k + n\cdot k$. ④ $n\cdot m \neq 0 \Leftrightarrow n\neq 0, m \neq 0$.

⑤ 若 $m > n$. $k \neq 0$. 则 $m\cdot k > n\cdot k$.

⑥ 若 $m\cdot k = n\cdot k$, $k \neq 0$. 则 $m = n$.

证明: ①⑤ 加法相似 ② 对 m 归纳. ③ 对 m 归纳, 利用 ②.

④ 由定义可证. ⑤ 利用④. ⑥ 利用⑤.

练习: 补全上述细节. □

~~定义: 在 $\mathbb{N}$ 上定义运算 $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto m^n$.~~

~~其中 对于 n~~

一个全序叫良序，如果任何非空子集都有最小元。 →

良序定理陈述：任何集合上都存在一个良序。这一定理等价于选择公理。$\mathbb{N}$上的良序就是通常的序。$\mathbb{Z}$或$\mathbb{Q}$上的良序可通过双射 $\mathbb{N}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}$ 建立。但$\mathbb{R}$上的良序就无法这样显式地写出了，我们只能通过选择公理知道它的存在性。

Date:
Place:
Reminders

定义：对于 $(m,n)\in\mathbb{N}^2-\{(0,0)\}$，定义指数运算：

$$m^0:=1\ (m\neq0),\quad m^{n'}:=m^n\cdot m\ (m\neq0),\quad 0^n:=0.$$

性质暂时省略。

定理：设 $n\in\mathbb{N}$，$m\in\mathbb{N}$，$m\neq0$，则存在且唯一的 $q\in\mathbb{N}$，
(欧几里得除法) $r\in\mathbb{N}$，且 $0\le r<m$，使得 $n=q\cdot m+r$。

证明：若 $n=0$，则 $(q,r)=(0,0)$。若 $n=m\cdot q+r$，则 $n'=(mq+r)'=mq+r'$。若 $r'<m$，则 (q,r') 即所求。若 $r'=m$，则 $mq+r'=mq+m=mq'$，$(q',0)$ 即所求。

若 $mq_1+r_1=mq_2+r_2$，若 $q_1<q_2$，则 $q_2=q_1+l$，$l>0$。于是 $r_1=ml+r_2\geq ml>m$ 矛盾。所以又有 $q_1=q_2$，于是 $r_1=r_2$。□

定理（良序性）设 S 是 $\mathbb{N}$ 的非空子集，则 S 存在最小元。

证明：若 $0\in S$，则 0 就是最小元。以下假设 $0\notin S$。定义集合 $K=\{n\in\mathbb{N}\mid n\notin S,\ \forall 0\le k\le n,\ k\text{是}S\text{的下界}\}$，于是 $0\in K$。因为 S 不空，所以 K 不可能等于 $\mathbb{N}$，所以 $\exists n\in K$ s.t. $n'\notin K$。

下证这样的 n' 就是 S 的最小元。

首先，n' 一定是 S 的元素。若 $n'\notin S$，$n'\notin K$，那么一定存在 $k\le n'$ 使得 k 不是 S 的下界。因为 $n\in K$，所以 $k\le n$ 都是下界，所以只能说明 n' 不是下界，于是存在 $x\in S$，$x<n'$。

Date:
Place:
Reminders

$(\,)'$: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. 则 $\mathbb{N}'=\{1,2,3,\cdots\}$. 所以有 $-\mathbb{N}'$ 这个记号 →

Date:
Place:
Reminders

$x=n+k$ $n'=x+l$ $k\ge1$ $l\ge1$

另外又有 $x>n$. 设 ~~$n=x+k$. n'~~ . 于是 $n'=n+k+l\ge n+2$ 矛盾.

其次 n' 一定是 S 的最小元. 因为没有 $x\in S$ 满足 $x<n'$ (上面已证). □.

§1.6 整数和有理数.

我们知道整数可分为正整数,负整数和零. ~~除~~其中, 按我们的定义, 正整数和零又合称 自然数. 若记 $-\mathbb{N}'=\{-1,-2,\cdots\}$

则 $\mathbb{Z}$ 做为集合可定义为 $\mathbb{Z}:=(-\mathbb{N}')\cup\mathbb{N}$. 只要再定义 $\mathbb{Z}$ 上的乘法和加法 就可得到我们熟知的整数概念. 但在这种定义下, 两种运算的定义会显得比较麻烦. 例如要定义加法, 即 $+:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$. $(m,n)\mapsto m+n$, 需要考虑如下

1. $m,n\in\mathbb{N}$. 则 $m+n:=m\overset{\frown}{+}n$ $\mathbb{N}$中的加法.
2. $m\in\mathbb{N}$, $n\in-\mathbb{N}'$. 则 $n=-n_1$ $(n_1\in\mathbb{N}')$
   ① 若 $m\ge n_1$. 则 $m+n:=m\overset{\frown}{-}n_1$. $\mathbb{N}$中的减法.
   ② 若 $m<n_1$. 则 $m+n:=-(n_1-m)\in-\mathbb{N}'$.
3. $m\in-\mathbb{N}'$, $n\in\mathbb{N}$. 则 $m=-m_1$ $(m_1\in\mathbb{N}')$
   ① 若 $m_1>n$, 则 $m+n:=-(m_1-n)\in-\mathbb{N}'$.
   ② 若 $m_1\le n$, 则 $m+n:=n-m_1\in\mathbb{N}$.
4. $m,n\in-\mathbb{N}'$, 设 $m=-m_1$. $n=-m_2$. 则 $m+n:=-(m_1+n_1)\in-\mathbb{N}'$.

Date:
Place:
Reminders

练习①证明这的确是一个等价关系.

② 定义映射: $\tilde{\mathbb{Z}}/\sim \xrightarrow{\varphi} (-\mathbb{N}')\cup\mathbb{N}$

$$[(m,n)] \mapsto \begin{cases} m-n\in\mathbb{N} & m\ge n \quad ([(m,n)]=[(m-n,0)]) \\ -(n-m)\in-\mathbb{N}' & m<n \quad ([(m,n)]=[(0,n-m)]) \end{cases}$$

则 φ 是一个双射(提示: 首先要说明定义良好,即 $\varphi([(m,n)])$ 不依赖于代表 m,n 的选取. 然后再说明 φ 是单射,满射).

映射 φ 其实是在从等价类中选择了某元素做代表,所以是一个选择函数的例子. 选出来的代表可以叫标准型. 这是数学中一种常见的套路. 一般来说,在等价类上定义运算,证明性质都比在标准型上简单. 后面的 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 等都有相应的标准型. 但我们都是先在等价类上定义好各种东西,证明某种各种性质,然后再取标准型.

Date:
Place:
Reminders

乘法可类似定义. 然后可证明各种运算律(交换律,结合律,分配律,消去律等). 但都非常麻烦.

为了避免这种麻烦的做法,我们采用如下不太直观的定义.
首先定义 $\tilde{\mathbb{Z}}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. 其中元素写为有序对 (m,n), $m,n\in\mathbb{N}$.
然后定义等价关系: $(m_1,n_1)\sim(m_2,n_2)\iff m_1+n_2=m_2+n_1$.
然后,整数集定义为商空间 $\mathbb{Z}:=\tilde{\mathbb{Z}}/\sim$.

定理定义. 在 $\mathbb{Z}=\tilde{\mathbb{Z}}/\sim$ 上定义二元运算 $+:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.

$$[(m_1,n_1)]+[(m_2,n_2)]=[(m_1+m_2,\ n_1+n_2)]$$

则 ① 这个定义是好的,即不依赖于代表的选取.

② 对 $\forall p_1,p_2\in\mathbb{Z}$, $p_1+p_2=p_2+p_1$.

③ 对 $\forall p_1,p_2,p_3\in\mathbb{Z}$, $(p_1+p_2)+p_3=p_1+(p_2+p_3)$.

④ 记 $0=[(0,0)]\in\mathbb{Z}$. 则对 $\forall p\in\mathbb{Z}$, $p+0=p$.

⑤ 对 $\forall p\in\mathbb{Z}$, 存在唯一的 $q\in\mathbb{Z}$, s.t. $p+q=0$, 称 q 为 p 的相反数,记为 $-p$.

证明: ① 要证明不依赖于代表的选取,我们取另一组代表 $(m_3,n_3)\sim(m_1,n_1)$, $(m_4,n_4)\sim(m_2,n_2)$. 于是由 $\sim$ 的定义有

$m_3+n_1=n_3+m_1$, $m_4+n_2=n_4+m_2$. 于是

$m_3+m_4+n_1+n_2=n_3+n_4+m_1+m_2$, 所以有

Date:
Place:
Reminders

②③④ 留作业. →

Date:
Place:
Reminders

$(m_3+m_4, n_3+n_4) \sim (m_1+m_2, n_1+n_2)$. ① 得证.

②、③ 都是 $\mathbb{N}$ 的性质的明显推论. ④ 亦显然.

对于 ⑤, 设 $p=[(m,n)]$. 则可取 $q=[(n,m)]$ 则有

$p+q=[(m+n, n+m)]=[(0,0)]=0$. 要证唯一性, 设

$q=[(a,b)]$ 满足 $p+q=0$, 即 $(m+a, n+b)\sim(0,0)$. 所以

$m+a=n+b$. 这条件正好给出 $(a,b)\sim(n,m)$. 所以 q 是唯一的 □

定理定义 在 $\mathbb{Z}$ 上定义二元运算 $\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.

$$[(m_1,n_1)]\cdot[(m_2,n_2)] := [(m_1m_2+n_1n_2,\ m_1n_2+m_2n_1)].$$

则 ① 定义是好的.

② $p_1\cdot p_2 = p_2\cdot p_1$. ③ $(p_1\cdot p_2)\cdot p_3 = p_1\cdot(p_2\cdot p_3)$

④ $p_1\cdot(p_2+p_3) = p_1\cdot p_2 + p_1\cdot p_3$.

⑤ 定义 $1=[(1,0)]$, 则 $\forall p\in\mathbb{Z}$, $p\cdot 1 = p$. 另外 $p\cdot 0=0$.

⑥ 若 $p\cdot q=0$, 则 $p=0$ 或 $q=0$.

⑥' 若 $p_1\cdot q = p_2\cdot q$, 且 $q\neq 0$. 则 $p_1=p_2$. (等价⑥)

证明: ① 仍取 $(m_3,n_3)\sim(m_1,n_1)$, $(m_4,n_4)\sim(m_2,n_2)$. 先考虑 $m_3\geq m_1$,

$m_4\geq m_2$ 的情况, 此时有 $m_3-m_1=n_3-n_1=:p$, $m_4-m_2=n_4-n_2=:q$. 则

$[(m_3,n_3)]\cdot[(m_4,n_4)] = [(m_1+p, n_1+p)]\cdot[(m_2+q, n_2+q)]$

$=[((m_1+p)\cdot(m_2+q)+(n_1+p)(n_2+q),\ (m_1+p)\cdot(n_2+q)+(n_1+p)(m_2+q))]$

$=[(m_1\cdot m_2+n_1 n_2+p(m_2+n_2)+q(m_1+n_1)+2pq,$

$m_1n_2+m_2n_1+p(m_2+n_2)+q(m_1+n_1)+2pq)]$

Date:
Place:

Reminders

②③④⑤留作业. →

补: $\mathbb{Z}$上的序. 对于整数 $[(a,b)]$ 和 $[(c,d)]$ 若 $a+d<b+c$,
则称 $[(a,b)]<[(c,d)]$. 不难验证这是一个全序且满足

~~① 若 $p_1<p_2$. 则 $p_1+q<p_2+q$. ② $p_1<p_2 \Rightarrow p_1+q<p_2+q$~~
~~③ 若 $p_1<p_2$. $q>0$. 则 $qp_1<qp_2$.~~
~~④ 若 $p_1<p_2$. $q<0$. 则 $qp_1>qp_2$.~~
~~⑤ 若 $0<p_1<p_2$. $0<q_1<q_2$. 则 $p_1q_1<p_2q_2$.~~

① $p_1<p_2 \Rightarrow p_1+q<p_2+q$. $p_1<p_2$. $q_1<q_2 \Rightarrow p_1+q_1<p_2+q_2$.
② $p_1<p_2$. $q>0 \Rightarrow qp_1<qp_2$. $p_1<p_2$. $q<0 \Rightarrow qp_1>qp_2$.
③ $0<p_1<p_2$. $0<q_1<q_2$. 则 $p_1q_1<p_2q_2$.

例: 证明这的确是等价关系 (注意消去律的条件). →

② 证明 $\mathbb{Q}/\sim \longrightarrow \{(p,q)\in \mathbb{Q} \mid q>0.\ (p,q)=1\}$

$(p,q) \longmapsto \left(\frac{p\cdot \mathrm{sgn}(q)}{(p,q)}, |q|/(p,q)\right)$

是双射. (先证 well-defined. 再证双射).

Date:
Place:

Reminders

$=[(m_1m_2+n_1n_2,\ m_1n_2+m_2n_1)] = [(m_1,n_1)]\cdot[(m_2,n_2)]$.

其它情况 $(m_3<m_1)\wedge(m_4\geq m_2)$, $(m_3\geq m_1)\wedge(m_4<m_2)$, $(m_3<m_1)\wedge(m_4<m_2)$
是类似的, 只要把 (p,q) 换成 $(-p,q)$. $(p,-q)$. $(-p,-q)$ 即可.

②③④⑤ 平凡. 下面考虑 ⑥. 若 $[(m_1,n_1)]\cdot[(m_2,n_2)]=[(0,0)]$.
即 $(m_1m_2+n_1n_2,\ m_1n_2+m_2n_1)\sim(0,0)$. 即
$m_1m_2+n_1n_2=m_1n_2+m_2n_1$. 若 $[(m_1,n_1)]\neq 0$. 即 $m_1\neq n_1$. 不妨设
$m_1>n_1$. 则有 $(m_1-n_1)m_2=(m_1-n_1)n_2$. 由 $\mathbb{N}$ 中乘法的消去律
得 $m_2=n_2$. 于是 $[(m_2,n_2)]=[(0,0)]$. 当 $m_1<n_1$ 时同理. $\square$

总

对于有理数. 我们可以把 $r\in\mathbb{Q}$ 写为 p/q 的形式, 其中
$p\in\mathbb{Z}$. $q\in\mathbb{N}'$. 且 $(p,q)=1$. 但这种标准型其实不利于计算.
所以更好的做法是. 类似于定义 $\mathbb{Z}$ 的方法, 先定义分数的集合. 然后
定义等价关系. 然后取商. 然后定义运算.

① 定义: 设 $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus 0$ 为非零整数的集合. $\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$.
在 $\mathbb{Q}$ 中定义等价关系: $(p_1,q_1)\sim(p_2,q_2)\Leftrightarrow p_1q_2=p_2q_1$.
然后定义 $\mathbb{Q}:=\mathbb{Q}/\sim$.

② 在 $\mathbb{Q}$ 中定义 $+: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$.

$$[(p_1,q_1)]+[(p_2,q_2)]:=[(p_1q_2+p_2q_1,\ q_1q_2)].$$

③ 在 $\mathbb{Q}$ 中定义 $\cdot: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$. $[(p_1,q_1)][(p_2,q_2)]:=[(p_1p_2,\ q_1q_2)]$.

③ 证明 + ~~[illegible]~~ 是良定的.

④ 证明 · 是良定的

~~$\mathbb{N}$ 是交换幺环的?~~

~~$(\mathbb{N},+,\cdot,0,1)$ 满足①②③⑤⑥⑦⑧~~

$\mathbb{N}$ 可嵌入到 $\mathbb{Z}$ 中. $n \overset{\varphi}{\mapsto} [(n,0)]$ 使得 $\varphi(n+m)=\varphi(n)+\varphi(m)$

这种保运算的映射叫代数结构的同态. $\varphi(n\cdot m)=\varphi(n)\cdot\varphi(m)$.

$\mathbb{N}$ 是加法幺半群的典型例子. 它其中的元素不一定有加法逆.

$\mathbb{Z}$ 则是使 $\mathbb{N}$ 的加法有逆的最小扩张.

$\mathbb{Z}$ 可嵌入到 $\mathbb{Q}$ 中. $p \overset{\psi}{\mapsto} [(p,1)]$. 使 $\psi(p+q)=\psi(p)+\psi(q)$

所以 ψ 也是一个同态. $\psi(p\cdot q)=\psi(p)\psi(q)$

$\mathbb{Z}$ 是整环的典型例子. 它的非零元素不一定有乘法逆.

$\mathbb{Q}$ 则是使 $\mathbb{Z}$ 的乘法有逆的最小扩张

最后. $\mathbb{Q}$ 不是序完备的. $\mathbb{R}$ 则是使 $\mathbb{Q}$ 序完备的最小扩张

补: $\mathbb{Q}$ 的序. $[(p_1,q_1)]<[(p_2,q_2)] \Leftrightarrow p_1q_1q_2^2 < p_2q_2q_1^2$ 也是全序

性质类似.

④ 定义 $0=[(0,1)]\in\mathbb{Q}$ $1=[(1,1)]\in\mathbb{Q}$.

定理: $\mathbb{Q}$, +, ·, 0, 1 满足如下性质

① $r_1+r_2=r_2+r_1$

② $r_1+(r_2+r_3)=(r_1+r_2)+r_3$.

③ $r+0=r$.

④ $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\exists! s\in\mathbb{Q}$ s.t. $r+s=0$. 记 $s=-r$.

⑤ $r_1\cdot r_2=r_2\cdot r_1$

⑥ $r_1\cdot(r_2\cdot r_3)=(r_1\cdot r_2)\cdot r_3$.

⑦ $r_1\cdot(r_2+r_3)=r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3$

⑧ $r\cdot 1=r$.

⑨ $\forall r\in\mathbb{Q}$, $r\neq 0$. $\exists! s\in\mathbb{Q}$ s.t. $r\cdot s=1$. 记 $s=r^{-1}$.

证明: 留作练习. □

§2. 实数理论.

§2.1 全序域.

将 $\mathbb{Q}$ 的运算性质提取出来就得到全序域的定义.

定义: 设 $\mathbb{F}$ 是集合. $0,1\in\mathbb{F}$. $0\neq 1$. "+", "·" 是 $\mathbb{F}$ 上的二元运算. 若它们满足如下条件: "<" 是 $\mathbb{F}$ 上的全序.

① $\forall x\in\mathbb{F}$ $x+0=0+x=x$.

(① ⇒ 满足这些性质的0是唯一的. 因为若有另一个 $0'$. 则 $0'=0'+0=0$.

③

由①.②. 这个y是唯一的. 因为若有 $y_1, y_2 \in \mathbb{F}$ 满足

$x+y_1=y_1+x=0$. $x+y_2=y_2+x=0$. 则

$y_2+(x+y_1)=y_2$. $(y_2+x)+y_1=y_1$. 所以 $y_1=y_2$.

由②可定义减法: $x-y := x+(-y)$.

由⑥. 同时有 $(x+y)\cdot z = x\cdot z+y\cdot z$ 成立. →

这个y也是唯一的. 证法类似上面. →

由⑨可定义除法 $x/y = x\cdot y^{-1}$.

~~练习: 对任一全序域 F. $\mathbb{Q}$ 一定是它的子域.~~

证明: ① $x\cdot 0 = x\cdot(0+0)=x\cdot 0+x\cdot 0 \Rightarrow x\cdot 0=0$.

② 若 $x^{-1}=0$, 则 $1=x\cdot x^{-1}=x\cdot 0=0$, 矛盾.

③ 若 $x\neq 0$. x有逆. 则 $x^{-1}(x\cdot y)=x^{-1}\cdot 0=0$.

$=(x^{-1}\cdot x)\cdot y = 1\cdot y = y \Rightarrow y=0$.

④ $x+(-1)\cdot x = 1\cdot x+(-1)\cdot x=(1+(-1))\cdot x=0\cdot x=0$. $\Rightarrow (-1)\cdot x=-x$.

⑤ $1\cdot(-x)+(-1)\cdot(-x)=(1+(-1))\cdot -x=0$. $\Rightarrow (-1)(-x)=x$.

⑥ $(-x)\cdot(-x)=((-1)\cdot x)\cdot(-x)=x\cdot((-1)\cdot(-x))=x\cdot x$.

② $\forall x\in\mathbb{F}$, $\exists y\in\mathbb{F}$ s.t. $x+y=y+x=0$. 记之为 $-x$.

③ $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$, $(x+y)+z=x+(y+z)$.

④ $\forall x,y\in\mathbb{F}$. $x+y=y+x$.

⑤ $\forall x\in\mathbb{F}$. $x\cdot 1=1\cdot x=x$. ($\Rightarrow$ 1 唯一)

⑥ $\forall x,y\in\mathbb{F}$, $x\cdot y=y\cdot x$

⑦ $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$. $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

⑧ $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$. $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

⑨ $\forall x\in\mathbb{F}$. $x\neq 0$. $\exists y\in\mathbb{F}$ s.t. $x\cdot y=y\cdot x=1$.

⑩ $\forall x,y,z\in\mathbb{F}$. $x<y \Rightarrow x+z<y+z$.

⑪ $\forall x,y\in\mathbb{F}$. $x\geq 0 \wedge y\geq 0 \Rightarrow x\cdot y\geq 0$.

推论: ① $\forall x\in\mathbb{F}$. $x\cdot 0=0$.

② $\forall x\in\mathbb{F}$. $x\neq 0$. 则 $x^{-1}\neq 0$.

③ 若 $x\cdot y=0$. 则 $x=0$ 或 $y=0$.

④ $-x=(-1)\cdot x$.

⑤ $x=(-1)\cdot(-x)$.

⑥ $(-x)\cdot(-x)=x\cdot x$.

⑦ $(x<y)\wedge(y\leq z)\Rightarrow(x<z)$. (显然)

$(x\leq y)\wedge(y<z)\Rightarrow(x<z)$

Date:
Place:

Reminders

(12) $x<0,\ y<0 \Rightarrow x\cdot y>0.$ $\big(-x>0,\ -y>0 \Rightarrow (-x)\cdot(-y)=xy>0\big).$

$x<0,\ y>0 \Rightarrow x\cdot y<0.$ $\big((-x)\cdot y>0 \Rightarrow -(x\cdot y)>0 \Rightarrow x\cdot y<0\big).$

$x<y,\ z>0 \Rightarrow xz<yz$ $\big((x-y)<0 \Rightarrow (x-y)\cdot z<0 \Rightarrow xz<yz\big)$

$x<y\ \ z<0 \Rightarrow xz>yz.$ $\big((x-y)<0 \Rightarrow (x-y)\cdot z>0 \Rightarrow xz>yz\big)$

Date:
Place:

Reminders

(8) $x\le y \Rightarrow x+z\le y+z.$

(9) $0<x \Rightarrow -x<0.$ $\big((-x)+0<(-x)+x \Rightarrow -x<0\big).$

(10) $(x<y)\wedge(z<w) \Rightarrow x+z<y+w.$ $(x<y \Rightarrow x+z<y+z<z+$

(11) $(x\le y)\wedge(z<w) \Rightarrow x+z<y+w.$ (10 $\Downarrow$).

~~(12) $x\ge0,\ y\ge0 \Rightarrow x\cdot y\ge0.$~~

~~(13) $x\le0,\ y\le0 \Rightarrow x\cdot y\ge0$~~

~~(14) $x\le0.\ y\ge0 \Rightarrow x\cdot y\le0.$~~

~~$x\ge0,\ y\le0 \Rightarrow x\cdot y\le0.$ $x\le y,\ z\ge0 \Rightarrow xz\le yz.$~~

~~$x<y,\ z<0 \Rightarrow yz<xz.$~~

(13) $0<1.$ (若 $1<0$. 则 $1=1\cdot1>0$ 矛盾).

(14) $x>0 \Rightarrow x^{-1}>0.$ ($x^{-1}\ne0$. 若 $x^{-1}<0$. 则 $1=x\cdot x^{-1}<0$)

(15) ~~$x\ge0$~~ $0<x<y \Rightarrow 0<y^{-1}<x^{-1}$ $\big(x^{-1}y^{-1}\cdot x<x^{-1}y^{-1}y\big).$

~~注明：只证(13). 若 $1<0$. 则 $1=1\cdot1>0$ 矛盾 [illegible]~~

根据前面的构造. $\mathbb{Q}$ 是有序域. 除此以外. 还存在别的有序域.

例① 任取一个不是完全平方的自然数 D. (如 $D=2$). 定义一个域 $\mathbb{F}$ 如下

$\mathbb{F}=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}.$ $0_{\mathbb{F}}=(0,0).$ $1_{\mathbb{F}}=(1,0).$ (这个域记为 $\mathbb{Q}(\sqrt{D}$

$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d).$ $(a,b)\cdot(c,d)=(ac+Dbd,\ ad+bc)$

练习：① 证明 $<$ 是一个全序 →

② 证明 $(\mathbb{F}, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}}, +, \cdot, <)$ 是一个全序域.

$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow$ 如下四种情况之一成立

① $a \le c$, $b < d$. ② $a < c$, $b \le d$.

③ $a > c$, $b < d$, $(a-c)^2 < (b-d)^2 D$. ④ $a < c$, $b > d$, $(b-d)^2 \cdot D < (a-c)^2$.

② 非全序域的例子. 仍取 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, 0, 1, 加法同前. 乘法定义改为 $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$. 它仍满足全部域公理. 但在 $\mathbb{F}$ 上不存在全序. 因为假如有全序那么 $1>0$, $-1<0$. 考虑元素 $I=(0,1)$. 显然 $I\ne 0$. 但有 $I\cdot I = (-1,0) = -1 < 0$. 无论 $I>0$ 还是 $I<0$ 都应有 $I\cdot I > 0$, 矛盾.

我们已经知道 $\mathbb{Q}$ 不是序完备的. 可以证明 $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$ 也不是序完备的. 下一节将证明, 存在唯一的完备全序域, 那就是实数.

§2.2 实数域

定理定义：存在唯一的完备全序域, 称它为实数, 记为 $\mathbb{R}$.

存在性：我们将从 $\mathbb{Q}$ 出发构造一个完备全序域.

① 定义：$\mathbb{Q}$ 的子集 X 叫一个戴德金分割 (DC) 如果它满足如下

Date:
Place:
Reminders

性质：i) $X \neq \phi$. $X \neq \mathbb{Q}$.

ii) 若 $p \in X$. $q \in \mathbb{Q}$ 且 $q < p$. 则 $q \in X$.

iii) 对 $\forall p \in X$, $\exists r \in X$ s.t. $p < r$.

② 设 X, Y 是两个DC. 定义 $X < Y$. 若 $X \subseteq Y$ 且 $X \neq Y$.

③ 定义 $\mathbb{R} = \{X \subseteq \mathbb{Q} \mid X 是一个DC\}$.

引理：$(\mathbb{R}, <)$ 是完备全序集.

证明："<" 显然是序. 我们首先说明它是全序. 即对 $\forall X, Y \in \mathbb{R}$. 要有 $X < Y$. $X = Y$ 或 $X > Y$ 之一成立. 或者 $X \le Y$ 或 $Y \le X$ 必有一个成立. 不妨设 $X \nsubseteq Y$. 即 $X \nleq Y$. 于是存在 $p \in X \setminus Y$. 由DC定义. p 成为 Y 的一个上界（否则. 若有 $q \in Y$. $p < q$. 则 $p \in Y$）. 于是 Y 中元素全是 X 的元素（因为对 $\forall q \in \mathbb{Q}$, $q < p \Rightarrow q \in X$）. 所以 $Y \subseteq X$. 即 $Y \le X$.

接下来说明完备性. 我们将证明. 若 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A 有上界. 则必有上确界. 设 $A \subseteq \mathbb{R}$. 则 A 是 $\mathbb{Q}$ 的一些DC组成的集合. 于是我们可以定义 $Y = \bigcup_{X \in A} X$. 则 Y 是一个DC. 因为 ① Y 显然非空. ② A 有上界 z. 即对 $\forall X \in A$. $X \le z$. 于是 $Y \subseteq z$. 于是 $Y \neq \mathbb{Q}$. ③ 若 $p \in Y$. 则 p 其实是 A 中某一 X 的元素. 若 $q < p$. 则 $q \in X$. 于是 $q \in Y$. ④ 与③同理.

接下来说明 Y 就是 A 的上确界. Y 显然是 A 的上界. 我们只需说明 Y 是最小的. 即若有 $z < Y$, 则 z 一定不是 A 的上界. $z < Y$ 意味着 z 是 Y 的真子集. 于是存在 $q \in Y \setminus z$. ~~于是~~ q 其实属于某个 $X \in A$.

Date:

Place:

Reminders

补：若 $X>0_{\mathbb{R}}$, $Y>0_{\mathbb{R}}$, 则 $\rightarrow$

$X\cdot Y=\{p\in\mathbb{Q}\mid p\le 0$, 或 $p=s\cdot t$, 其中 $s\in X$, $t\in Y$ 且 $s,t>0\}$.

Date:

Place:

Reminders

因为 $q\notin z$, 于是 ~~$z\subseteq X$~~ $X\not\subseteq z$. 所以必有 $z<X$, 即 z 不是 A 的上界. □.

接下来要在 $\mathbb{R}$ 中定义域所需的元素和运算

定义：① $0_{\mathbb{R}}=\{p\in\mathbb{Q}\mid p<0\}$.

② $1_{\mathbb{R}}=\{p\in\mathbb{Q}\mid p<1\}$.

③ $X+Y:=\{p+q\mid p\in X,\ q\in Y\}$.

④ $-X:=\begin{cases}\{p\in\mathbb{Q}\mid -p\notin X\}, & \text{若 } \mathbb{Q}-X \text{ 没有最小元.}\ (\text{即无理数})\\ \{p\in\mathbb{Q}\mid -p\notin X\}\cup\{q\}\} & \text{若 } \mathbb{Q}-X \text{ 有最小元 } q.\ (\text{即有理数})\end{cases}$

⑤ $\underset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{|X|}:=\begin{cases}X, & \text{若 } X\ge 0_{\mathbb{R}}.\\ -X, & \text{若 } X<0_{\mathbb{R}}.\end{cases}$ 　$\underset{\mathbb{R}\to\mathbb{Q}}{\mathrm{sgn}(X)}=\begin{cases}1 & X>0_{\mathbb{R}}\\ 0 & X=0_{\mathbb{R}}\\ -1 & X<0_{\mathbb{R}}\end{cases}$

⑥ $X\cdot Y:=\begin{cases}|X|\cdot|Y| & \mathrm{sgn}(X)\cdot\mathrm{sgn}(Y)=1.\\ 0_{\mathbb{R}} & \mathrm{sgn}(X)\cdot\mathrm{sgn}(Y)=0.\\ -|X|\cdot|Y| & \mathrm{sgn}(X)\cdot\mathrm{sgn}(Y)=-1.\end{cases}$

⑦ $X^{-1}:=\begin{cases}\{p\in\mathbb{Q}\mid p\le 0\wedge(p>0 \text{ 且 } p^{-1}\notin X)\}, & X>0_{\mathbb{R}} \text{ 且 } \mathbb{Q}-X \text{ 无最小元.}\\ \{p\in\mathbb{Q}\mid p\le 0\wedge(p>0 \text{ 且 } p^{-1}\notin X\cup\{q\}\}, & X>0_{\mathbb{R}} \text{ 且 } \mathbb{Q}-X \text{ 有最小元 } q.\\ -|X|^{-1}. & X<0_{\mathbb{R}}.\end{cases}$

引理：$0_{\mathbb{R}}$. $1_{\mathbb{R}}$. $X+Y$. $-X$. $X\cdot Y$. X^{-1} 都是 DC.

引理：$(\mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$ 是一个全序域

由此引理. 任何全序域都包含$\mathbb{Q}$作为其子域, 因此也包含整数 →
自然数等数系.

唯一性. 唯一性是指在相差一个同构的意义下唯一. (类似$\mathbb{N}$的唯一)

定义 设$\mathbb{F}'$. $\mathbb{F}''$是两个全序域, 若有映射 $\varphi: \mathbb{F}' \to \mathbb{F}''$ 满足

i) φ是双射

ii) $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$.

iii) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

iv) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

则称φ是同构. 且称$\mathbb{F}'$与$\mathbb{F}''$同构.

引理: 设$\mathbb{F}$是一个全序域, 则存在唯一的单射 $\varphi: \mathbb{Q} \to \mathbb{F}$, 满足

上述定义的 ii). iii). iv). (此时称$\mathbb{Q}$是$\mathbb{F}$的全序子域).

证明: 先证存在性 ~~[illegible]~~ 定义 $\varphi(0) = 0_{\mathbb{F}}$. $\varphi(1) = 1_{\mathbb{F}}$.

① 对于 $\forall n \in \mathbb{N}^{*}$, $n \neq 0$. 可设 $n = m'$. 定义 $\varphi(n) = \varphi(m) + \varphi(1)$.

② 对于 $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. 定义 $\varphi(n) = -\varphi(-n)$.

③ 对于 $r = p/q \in \mathbb{Q}$. 定义 $\varphi(r) = \varphi(p)/\varphi(q)$.

(此处需检查 $\varphi(q)$ 是否为 $0_{\mathbb{F}}$. 由定义. $q \in \mathbb{N}$. $q \neq 0$. ~~[illegible]~~

根据 $1_{\mathbb{F}} > 0_{\mathbb{F}}$. 由归纳法易证 $\varphi(q) > 0_{\mathbb{F}}$. 所以不可能有 $\varphi(q) = 0_{\mathbb{F}}$).

接下来, 性质 ii) iii). iv) 不难验证.

然后说明是单射. 若 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, 记 $r = x_1 - x_2 = p/q$. 则有

$\varphi(r) = 0 \Rightarrow \varphi(p) = 0$. 上一段已经说明, 若 $p > 0$. 则 $\varphi(p) > 0$. 若 $p < 0$.

Date:
Place:
Reminders

完备全序域的阿基米德性：设 $\mathbb{F}$ 是全序域. 若对 $\forall x\in\mathbb{F}$. 存在 $r_1,r_2\in\mathbb{Q}$. 使得 $r_1<x<r_2$. 则称 $\mathbb{F}$ 满足阿基米德公理

或称 $\mathbb{F}$ 是阿基米德的

引理：完备全序域是阿基米德的.

证明：设 $\mathbb{F}$ 是完备全序域. $x\in\mathbb{F}$. 若 $x=0_{\mathbb{F}}$, 则可取 $r_1=-1, r_2=1$

若 $x>0$. 则可取 $r_1=0$. 下证存在 $n\in\mathbb{N}$. 使得 $x<n$. 定义集合

$M=\{k\in\mathbb{N}\mid k<x\}$. 则 M 是 $\mathbb{F}$ 中的有上界的非空集合. 所以由完备性, 必有上确界 K.

① K 一定是 M 的最大元.

因为 K 是上确界. 所以 $K-\frac{1}{2}$ 不是 M 的上界. 于是存在 $K-\frac{1}{2}<k'\leq K$.

下面说明 k' 一定是 M 的最大元. 因为若有 $k''>k'$. 则 $k''<K$ (K 是上界)

所以 $0<k''-k'<\frac{1}{2}$. 这是不可能的. 因为 $k'',k'\in\mathbb{N}$. 既然 k' 是最大元. 那么必有 $K=k'$. 于是 K 也是最大元.

② $K+1$ 一定大于 x.

若 $K+1<x$. 则 $K+1\in M$. $K+1>K$. 这与 K 是 M 的最大元矛盾.

最后取 $n=K+1$ 即可.

若 $x<0$. 则 $-x>0$. 于是有 $r_1<-x<r_2$. 所以

$-r_2<x<-r_1$. □.

注意我们选的 r_i 总是 $\mathbb{Z}$ 中的元素. 上述论证可细化为如下结果

Date:
Place:
Reminders

则 $-p>0$. 于是 $\varphi(-p)>0$. 所以 $\varphi(p)<0$. 所以 $\varphi(p)=0\Rightarrow p=0$

于是 $r=0$ 即 $x_1=x_2$.

最后证明 φ 的唯一性. 在性质 ii) 中取 $x=y=0$ 得 $\varphi(0)=\varphi(0)+\varphi(0)$

所以 $\varphi(0)=0_{\mathbb{F}}$. 在 iii) 中取 $y=1$ 得 $\varphi(x)=\varphi(x)\cdot\varphi(1)$. 取 $x\neq 0$,

则 $\varphi(x)\neq 0_{\mathbb{F}}$ (因为 φ 是单射). 所以有 $\varphi(1)=1_{\mathbb{F}}$.

所以 φ 在 0. 1 上的取值必与我们的选择一致. 接下来利用性质 ii). iii) 不难证明 φ 在 $\mathbb{Q}$ 上的取值也一定与我们一致. □.

引理：设 $\mathbb{F}$ 是完备全序域, 则存在映射 $\varphi:\mathbb{F}\to\mathbb{R}$ 使得 $\mathbb{F}$ 同构于 $\mathbb{R}$.

证明：我们将 $\mathbb{Q}$ 视为 $\mathbb{F}$ 的子集. 定义 $\varphi:\mathbb{F}\to\mathbb{R}$.

$x\mapsto\varphi(x)=\{p\in\mathbb{Q}\mid p<x\}$.

那么 i) $\forall x\in\mathbb{F}$. $\varphi(x)$ 非空. 且 $\varphi(x)$ 不是整个 $\mathbb{Q}$. (阿基米德性).

ii) 显然. iii) 则是阿基米德性的推论③ (下页).

于是 $\varphi(x)$ 的确是 DC. 所以 φ 是定义好的.

φ 显然保序. 所以是单的. 对 $\forall X\in\mathbb{R}$. 因为 X 是 $\mathbb{Q}$ 的子集. 所以也可视为 $\mathbb{F}$ 的子集. 记 $x=\sup X$ (X 显然非空有上界, 这是 DC 的定义), 则有 $X=\varphi(x)$. 所以 φ 满. 于是 φ 是双射.

其它两条(保加法和乘法)也略. □.

[illegible]：对 $\forall x\in F$，存在 [illegible] $k\in\mathbb{Z}$，使得 $(k-1)\le x<k$。它有如下推论：

① $\forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$ s.t. $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$.
对 $x=\frac{1}{\varepsilon}$ 应用阿基米德原理.

② 设 $x\in F$, $x\ge 0$. 若对 $\forall n\in\mathbb{N}$, $x<\frac{1}{n}$. 则 $x=0$（由①）.

③ $\forall x,y\in F$ 存在 $r\in\mathbb{Q}$ s.t. $x<r<y$.

证明：首先有 $q\in\mathbb{N}$ 使 $0<\frac{1}{q}<y-x$. 其次有 $p\in\mathbb{Z}$，使 $p-1\le xq<p$. 于是 $r=\frac{p}{q}$ 满足 $x<r<y$. □.

注意：存在不满足阿基米德性质的全序域，如超实数. 它出现在非标准分析中.

$\mathbb{Q}$ 是全序域中最小的. $\mathbb{R}$ 是阿基米德全序域中最大的.
（$\mathbb{Q}$ 总是可嵌入 F）. 〔完备化之后总是 $\mathbb{R}$，于是也总可嵌入 $\mathbb{R}$〕

更简单的例子：$F=\mathbb{Q}(x)=\left\{\frac{P(x)}{Q(x)}\ \middle|\ P,Q\in\mathbb{Q}[x]\right\}$

规定 $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$，若 $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, $Q(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$ 满足 $a_n/b_m>0$.

则 对 $\forall n\in\mathbb{N}$. $n<x$.（因为 $x-n>0$）. 所以不是阿基米德的.

§2.3 实数的无穷小数表示法

引理1. 设 $q\in\mathbb{R}$. $q>1$. 则对 $\forall x\in\mathbb{R}$. $x>0$. $\exists!\, k\in\mathbb{Z}$. 使 $q^k\le x<q^{k+1}$. 这个 k 叫 x 关于 q 的阶. 记为 $\mathrm{ord}_q(x)$.

证明：① 设 $A=\{q^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$. 则 A 没有上界.
若 A 有上界. 则有上确界 s. 则对任何小于 s 的实数，例如 s/q，都有 A 的的元素 q^k 比 s/q 大. 于是 $s<q^{k+1}$，这与 s 是 A 的上界矛盾.

② 由①. x 不是 A 的上界. 于是存在 $k_1\in\mathbb{Z}$ 使 $x<q^{k_1}$. 同理，x^{-1} 不是 A 的上界. 于是存在 $-k_2\in\mathbb{Z}$. 使 $x^{-1}<q^{-k_2}$，即 $q^{k_2}<x$.
设 $B=\{k\in\mathbb{Z}\mid x<q^{k+1}\}$ 则 $k_1+1\in B$，所以 B 非空.
而由 $q>1$. 知 k_2 是 B 的下界. 所以，由 $\mathbb{Z}$ 的序性质. B 一定有最小元 k. 它满足 $q^k\le x<q^{k+1}$. 即为所求.

③ 若有两个 k_1,k_2 都满足 $q^{k_1}\le x<q^{k_1+1}$. $q^{k_2}\le x<q^{k_2+1}$. 则有 $q^{k_1}<q^{k_2+1}$. $q^{k_2}<q^{k_1+1}$. 于是 $k_1\le k_2$. $k_2\le k_1$. 所以 $k_1=k_2$.
这就证明了唯一性. □.

引理2. 设 $q\in\mathbb{R}$. $q>1$. $x\in\mathbb{R}$. $x>0$. $d=\mathrm{ord}_q(x)$. 则存在唯一的 $\alpha\in\mathbb{N}$. $1\le\alpha<q$，使得 $\alpha q^d\le x<(\alpha+1)q^d$.

证明：设 $A=\{\alpha\in\mathbb{N}\mid \alpha q^d\le x\}$. 由 $q^d\le x<q^{d+1}$ 知

Date:
Place:
Reminders

~~以后将简记 $x=\alpha_d\cdots\alpha_0.\alpha_{-1}\cdots$ 尽管 d 可能小于零.~~

Date:
Place:
Reminders

$1\in A$. 且 q 是 A 的上界. 所以 A 有最大元 α_d. 它就是所求. $\square$.

根据上述引理,

$$0\le x-\alpha_d q^d < q^d$$

· 若 $x-\alpha_d q^d \ge q^{d-1}$. 则再次应用引理 2 知, 存在 $\alpha_{d-1}\in\mathbb{N}$ $1\le\alpha_{d-1}<q$, 使得 $\alpha_{d-1}q^{d-1}\le x-\alpha_d q^d < (\alpha_{d-1}+1)q^{d-1}$

· 若 $x-\alpha_d q^d < q^{d-1}$. 则可取 $\alpha_{d-1}=0$.

无论哪种情况. 都有 $0\le x-\alpha_d q^d-\alpha_{d-1}q^{d-1} < q^{d-1}$

如此继续 则对任意自然数 n. 存在 $\alpha_d, \alpha_{d-1},\cdots,\alpha_{d-n}\in\mathbb{N}$. 满足 $1\le\alpha_d<q$. $0\le\alpha_{d-i}<q$ $(i=1,\cdots,n)$, 记 $r_n=\sum_{i=0}^{n}\alpha_{d-i}q^{d-i}$.

则有 $0\le x-r_n<\frac{1}{q^{n-d}}$, 当 n 趋向于无穷时. r_n 给出 x 的一种很好的逼近.

将 $\alpha_d, \alpha_{d-1},\cdots$ 排列成 $\alpha_d\alpha_{d-1}\alpha_{d-2}\cdots$, 若 $d\ge0$. 则在 α_0 右边加 ".", 若 $d<0$. 则补充 $\alpha_0=\alpha_{-1}=\cdots=\alpha_{d+1}=0$, 然后同样在 α_0 右边加 "." 这就得到 x 的 q 进制小数表示.

q 一般取为自然数. 常见的取法有 2, 3, 8, 10, 16, 等

定理: 设 $q\in\mathbb{N}$. $q\ge2$. $x\in\mathbb{R}$. $x>0$. 则在 x 的 q 进制小数表示中. 不可能从某一位开始全是 $q-1$.

证明: 假设从第 k 位开始全是 $q-1$. 则 对 $\forall n>k$.

此定理用区间套更好证. →

Date:
Place:
Reminders

$$r_n = \alpha_d q^d + \cdots + \alpha_{d-k} q^{d-k} + (q-1) q^{d-k-1} + \cdots + (q-1) q^{d-n}$$
$$= r_k + \frac{1}{q^{k-d}} - \frac{1}{q^{n-d}}.$$

于是有

$$r_k + \frac{1}{q^{k-d}} - \frac{1}{q^{n-d}} = r_n \le x \le r_k + \frac{1}{q^{k-d}},$$ 于是

$$0 \le r_k + \frac{1}{q^{k-d}} - x \le \frac{1}{q^{n-d}}$$ 对 $\forall n > k$ 成立. 这与引理2矛盾! 所以在 x 的 q 进制表示中不可能从某一位开始都是 $q-1$. □.

推论: 0.9999… 不是合法的10进制小数.

定理: 若序列 $\alpha_d \alpha_{d-1} \cdots$ 满足: 对 $\forall k$, $\exists n > k$, 使得 $\alpha_n \ne q-1$, 则它定义了唯一的一个实数.

证明: 定义 $r_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{d-i} q^{d-i}$, 则 $r_0 \le r_1 \le \cdots$, 另一方面.

~~因为 $\forall k\ \exists n > k$ 使 $\alpha_n < q-1$. 所以 对 $\forall n > k$, 有~~

~~$r_n < \alpha_d q^d + \cdots + \alpha_{d-k} q^{d-k} + (q-1) q^{d-k+1} + \cdots + (q-1) q^{d-n}$~~
~~$= r_k + \frac{1}{q^{k-d}} - \frac{1}{q^{n-d}}$.~~

对任意的 $n > k$, 有 $r_n \le \alpha_d q^d + \cdots + \alpha_{d-k} q^{d-k} + (q-1) q^{d-k-1} + \cdots + (q-1) q^{d-n}$
$$= r_k + \frac{1}{q^{k-d}} - \frac{1}{q^{n-d}}.$$ 所以

$$r_n + \frac{1}{q^{n-d}} \le r_k + \frac{1}{q^{k-d}}.$$ 所以有

$$r_0 \le r_1 \le \cdots \le r_n < r_n + \frac{1}{q^{n-d}} \le \cdots \le r_1 + \frac{1}{q^{1-d}} \le r_0 + \frac{1}{q^{0-d}}.$$

~~设 $x = \sup\{r_i \mid i \in N\}$, $y = \inf\{r_i + \frac{1}{q^{i-d}} \mid i \in N\}$~~

Date:
Place:
Reminders

证 设 $A=\{r_i \mid i\in\mathbb{N}\}$, $B=\{r_i+\frac{1}{q^{i-a}} \mid i\in\mathbb{N}\}$.

则 A 中元素都是 B 的下界. 所以存在 $y=\inf B$. B 中元素都是 A 的上界. 于是存在 $x=\sup A$. 且 y 是 A 的上界

且 x 是 B 的下界. 于是对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$r_n\le x\le r_n+\frac{1}{q^{n-a}}$. $r_n\le y\le r_n+\frac{1}{q^{n-a}}$, 所以

$0\le|x-y|<\frac{1}{q^{n-a}}$. $|x-y|$ 不可能 >0, 否则将与引理2矛盾.

所以 $x=y$. 这就是所求. □

所以, 正实数与 $\{\alpha_d\alpha_{d-1}\cdots \mid \forall k\ \exists n>k\ s.t.\ \alpha_n\ne q-1\}$ 是一一对应的.

于是全体实数与 $\{0\}\cup\{\pm\alpha_d\alpha_{d-1}\cdots \mid \forall k\ \exists n>k\ s.t.\ \alpha_n\ne q-1\}$ 一一对应.

定理: $|\mathbb{R}|=|P(\mathbb{N})|$

证明: 定义映射 $f:\mathbb{R}\to P(\mathbb{Q})$,

$x\mapsto f(x)=\{r\in\mathbb{Q}\mid r<x\}$. 由戴德金分割的构造, f 是单射. 于是

$|\mathbb{R}|\le|P(\mathbb{Q})|=|P(\mathbb{N})|$.

反之 定义映射 $g:P(\mathbb{N})\to\mathbb{R}$. 对于 $A\subseteq\mathbb{N}$, 定义一个

3进制小数 $a_0.a_1a_2\cdots$ 其中 $a_i=\begin{cases}1 & 若\ i\in A\\ 0 & 若\ i\notin A\end{cases}$. 则每个 $a_i\le 1$,

所以这的确是合法的3进制小数 (没有一个 $a_i=2$). 它显然是单的.

所以 $|P(\mathbb{N})|\le|\mathbb{R}|$. 于是, 由 Cantor-Bernstein 定理,

$|\mathbb{R}|=|P(\mathbb{N})|$.

练习: $\alpha = \alpha_d\alpha_{d-1}\cdots \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ 存在 k, n ($\in\mathbb{N}$, $\in\mathbb{N}, n\neq 0$) 使得对 $\forall\, l = 1\ldots n, m\in\mathbb{N}$

$$\alpha_{d-k-l} = \alpha_{d-k-l-mn}.$$ 此时记

$$\alpha = \alpha_d\alpha_{d-1}\cdots\alpha_{d-k}\dot{\alpha}_{d-k-1}\cdots\dot{\alpha}_{d-k-n}.$$

补: 引理: 设 $S\subseteq\mathbb{R}$, $|S| = |\mathbb{N}|$, 则 $|\mathbb{R}-S| = |\mathbb{R}|$

证明: 定义 $f:\mathbb{R}-S\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$. 单, 于是 $|\mathbb{R}-S|\le|\mathbb{R}|$.

取 $\mathbb{R}$ 的子集 T, 使 $|T| = |\mathbb{N}|$, 且 $T\cap S = \varphi$. 定义 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-S$

$$g(x) = \begin{cases} x & x\notin S\cup T \\ t_{2k} & x\in S, x = s_k \\ t_{2k+1} & x\in T, x = t_k \end{cases}$$
(设 $S = \{s_0, s_1, s_2, \cdots\}$, $T = \{t_0, t_1, t_2, \cdots\}$.)

则 g 单, 于是 $|\mathbb{R}|\le|\mathbb{R}-S|$. 所以 $|\mathbb{R}-S| = |\mathbb{R}|$. □

六个基本定理: 戴德金完备(确界原理) 序描述

Weierstrass?

单调收敛原理

Cauchy-Cantor 闭区间套原理

Cauchy 收敛原理

Heine-Borel (有限覆盖原理)

极限描述

区间描述

Bolzano-Weierstrass (极限点原理)

我们知道 $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| < P(\mathbb{N}) = |\mathbb{R}|$. 所以一定存在 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

上次的作业表明 $|A| = |\mathbb{N}|$, 其中 A 表示 $\mathbb{R}$ 中所有整系数代数方程的解. 于是同样有 $|A| < |\mathbb{R}|$. 所以一定存在 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus A$.

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 中的数叫无理数. $\mathbb{R}\setminus A$ 中的数叫超越数.

§2.4 开区间、闭区间及其性质.

定义: 对于 $a, b\in\mathbb{R}$, $a\le b$. 定义

$(a,b) := \{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	开区间
$[a,b) := \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$	左闭右开区间
$(a,b] := \{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$	左开右闭区间
$[a,b] := \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$	闭区间
$(-\infty,a) := \{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$	开无穷区间
$(-\infty,a] := \{x\in\mathbb{R} \mid x\le a\}$	闭无穷区间
$(a,+\infty) := \{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$	开无穷区间
$[a,+\infty) := \{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\}$	闭无穷区间

$(-\infty,+\infty) := \mathbb{R}$

~~为了统一表述它们, 我们可以引入一个记号 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, 并规定 $\forall x\in\mathbb{R}\ (x<+\infty)$ $\forall x\in\mathbb{R}\ (x>-\infty)$. 于是上面的区间可简单地记为 $\forall a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $(a,b) = \{x\in\overline{\mathbb{R}} \mid a<x<b\}$, $[\ )$, $(\ ]$, $[\ ]$~~

常用 $I=(a,b)$ 或 $[a,b]$ 的写法， →

并记 $|I|=b-a$，叫 I 的长度。 约定当写 (a,b) 时总假设 $a\neq b$ (即区间非空)

例：(开区间套的交可能为空)

设 $I_n=(0,\frac{1}{n})$，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{x\in\mathbb{R} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n\neq 0\}$ $0<\varepsilon<\frac{1}{n}$.

由阿性知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\varnothing$.

开区间 (a,b) 与闭区间 $[a,b]$ 是最常用的两个。

定理(闭区间套) 设 $I_n=[a_n,b_n]$ $n=1,2,\cdots$ 满足

$I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq\cdots$

则存在 $c\in\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$。若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists I_n$ 满足 $|I_n|<\varepsilon$，则这个 c 是唯一的。

证明：由已知条件 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1$。于是 $A=\{a_n|n=1,2,\cdots\}$，$B=\{b_n|n=1,2,\cdots\}$ 满足序完备性的第(ⅲ)种条件的要求，于是存在 c 是 A 的上界，B 的下界。即对 $\forall n=1,2,\cdots$，$c\in I_n$，所以 $c\in\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$。若有两个 c_1,c_2 都满足条件，则有 $a_n\le c_1\le b_n$，$a_n\le c_2\le b_n$，于是 $0\le|c_1-c_2|\le b_n-a_n$ 对任意 n 成立。若对任意 $\varepsilon>0$ 存在 I_n 使 $|I_n|=b_n-a_n<\varepsilon$，则对 $\forall\varepsilon>0$，有 $0\le|c_1-c_2|<\varepsilon$。~~由阿基米德原理~~，若 $\delta=|c_1-c_2|>0$，取 $\varepsilon=\frac{\delta}{2}$，则得 $0\le\delta<\frac{\delta}{2}$，矛盾。所以必有 $c_1=c_2$，即这样的 c 唯一。□

定理(闭区间套＋阿基米德性 ⇒ ~~序完备~~确界原理)

设 $\mathbb{F}$ 是阿基米德全序域，$\mathbb{F}$ 满足闭区间套原理，则 $\mathbb{F}$ 序完备。

证明：设 $A\subseteq\mathbb{F}$，非空($a_0\in A$)有上界(b_0 是 A 的上界)。

~~考虑 $c=\frac{a_0+b_0}{2}$，若 c 是 A 的上界，则取 $a_1=a_0$，$b_1=c$，否则取 $a_1=c$，$b_1=b_0$，那么必有 a_1 不~~

Date:
Place:
Reminders

$n=0$：若 a_0 是 A 的上界，则它必是上确界．所以以下可假设 a_0 不是 A 的上界．

$n\to n+1$：设 a_n 不是 A 的上界，b_n 是 A 的上界，~~定义~~设 $c=\frac{a_n+b_n}{2}$，定义

$$I_{n+1}=[a_{n+1}, b_{n+1}]=\begin{cases}[a_n, c] & \text{若 } c \text{ 是 } A \text{ 的上界}\\ [c, b_n] & \text{若 } c \text{ 不是 } A \text{ 的上界}\end{cases}$$

则 a_{n+1} ~~也~~不是 A 的上界，b_{n+1} 是 A 的上界．且有

~~$I_{n+1}=[a_{n+1}, b_{n+1}]\subseteq[a_n, b_n]$~~．$I_{n+1}\subseteq I_n$．$|I_{n+1}|=\frac{1}{2}I_n$．

于是我们得到闭区间套 $I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$ 且满足对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 n 使 $|I_n|<\varepsilon$（因为 $|I_n|=\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$，由阿基米德性质，对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\frac{b_0-a_0}{2^n}<\varepsilon$）．由闭区间套定理，存在唯一的 $c\in I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$．下证 c 就是 A 的上确界

① c 是上界．若不然，则 $\exists a\in A$．$a>c$．取 $\varepsilon<a-c$．$|I_n|<\varepsilon$．则 $c\le b_n<a$．这与 b_n 是 A 的上界矛盾．

② c 是最小上界．若不然．设 c' 是更小的上界．取 $\varepsilon<c-c'$．$|I_n|<\varepsilon$．则有 $c'<a_n\le c$．这与 c' 是上界矛盾．　□．

~~定理（有限覆盖）（开区间）~~ 设 S 是这样的集合：其元素都是 $\mathbb{R}$ 的开区间（可以为有限区间，也可为无限区间）．则称 S 为一个开区间族．

若 $X\subseteq\bigcup_{I\in S} I$，则称 S 给出 X 的一个覆盖．

为证ii)，先证一个引理。若开区间 $I=(a,b)$ 满足 $a,b\in\mathbb{Q}$，则称 I 为有理开区间。所有有理开区间的全体记为 QI。那么显然 $|QI|=|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$

引理1. 对任何开区间 $(a,b)=J$，存在有理开区间 $I_1,I_2,\cdots$，使得 $\{I_1,I_2,\cdots\}$ 构成 J 的覆盖，且每个 $I_n\subseteq J$.

证明：设 $b-a=L$. 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$. 存在 $r_n,s_n\in\mathbb{Q}$ 满足 $a<r_n<a+\frac{L}{2n}$, $b-\frac{L}{2n}<s_n<b$. (于是 $r_n<s_n$) 定义 $I_n=[r_n,s_n]$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=J$. 且 $I_n\subseteq J$. □

在本节中，称这些 I_n 给出 J 的一个有理开覆盖.

(接后) $J'=(a-\varepsilon,c)$. $J''=(d,b+\varepsilon)$ 其中 ε 是任取的正数(如 $\varepsilon=1$). 则有 $I-J\subseteq J'\cup J''$. 于是

$I=\bigcup_{J\in S}(I-J)\subseteq\bigcup_{J\in S}(J'\cup J'')$. 所以 $\{J',J''\mid J\in S\}$ 构成 I 的一个开覆盖. 于是它有有限子覆盖. 设 $J_1',\cdots,J_n',J_{n+1}'',\cdots,J_{n+m}''$ 是一个有限子覆盖. 则 $J_1',J_1'',\cdots,J_N',J_N''$ 仍是有限子覆盖. 所以 $I\subseteq\bigcup_{k=1}^{N}(J_k'\cup J_k'')$. 所以 $\emptyset=I-\bigcup_{k=1}^{N}(J_k'\cup J_k'')=\bigcap_{k=1}^{N}(I-J_k'\cup J_k'')$. 但 $I-(J_k'\cup J_k'')=J_k$. 所以有 $\bigcap_{k=1}^{N}J_k=\emptyset$. 这与已知条件矛盾. □

Date:
Place:
Reminders

命题：i) 若对 $\forall I,J\in S$, $I\neq J$, $I\cap J=\emptyset$. 则 S 或者有限，或者与 $\mathbb{N}$ 等势. (有限或与 $\mathbb{N}$ 等势称至多可数)

(Souslin)

ii) ~~若 $X\subseteq\bigcup_{I\in S}I$，或称 S 给出 X 的一个覆盖~~

(Lindelöf) 若 S 给出 X 的一个覆盖，则存在 S 的至多可数子集 S'，使 S' 也给出 X 的覆盖

证明：~~i) 对每个开区间 I 一定存在有理数 $r\in I$ (阿基米德性).~~

i) 对任意开区间 I. $I\cap\mathbb{Q}$ 非空(阿基米德性). 考虑 $\mathcal{S}=\{I\cap\mathbb{Q}\mid I\in S\}$. 由选择公理存在 $\mathcal{S}$ 的选择函数 $f:\mathcal{S}\to\mathbb{R}$. 使 $f(I\cap\mathbb{Q})\in I\cap\mathbb{Q}$. 现在定义映射 $g:S\to\mathbb{Q}$. $I\mapsto f(I\cap\mathbb{Q})$. 则 g 是单射(因为若 $g(I)=g(J)$ 则 $g(I)\in I\cap\mathbb{Q}$. $g(J)\in J\cap\mathbb{Q}$. 于是 $I\cap J$ 不空. 于是 $I=J$) 所以有 $|S|\le|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$.

ii) 对于每个 $J\in S$. 取 J 的有理开覆盖 $J=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{J,n}$. 则 $X\subseteq\bigcup_{J\in S}J=\bigcup_{J\in S}\bigcup_{n=1}^{\infty}I_{J,n}$. 注意 $I_{J,n}$ 总数是可数的. 所以去掉重复的以后. 上式右边一定可写为 $\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$. 对于 I_1. 它一定来自某个 J. 设这个 J 为 J_1. 若 $I_2,I_3,\cdots$ 全包含于 J_1. 则 J_1 本身就给出了 X 的开覆盖. 若 $I_2\cdots I_{k_1-1}\subseteq J_1$. 但 $I_{k_1}\not\subseteq J_1$. I_{k_1} 一定来自某个 J. 记之为 J_2. 然后考虑 $I_{k_1+1},I_{k_1+2},\cdots$ 是否包含于 J_2. 一般地. 假设已取好 $J_1\cdots J_N$. 若 $I_{k_{N-1}+1},I_{k_{N-1}+2},\cdots$ 全包含于 J_N. 则 $J_1\cdots J_N$ 给出 X 的开覆盖. 若 $I_{k_{N-1}+1}\cdots I_{k_N-1}\subseteq J_N$. 但 $I_{k_N}\not\subseteq J_N$. 取 J_{N+1} 是包

有限覆盖 ⇒ 阿基米德: 设 $x\in\mathbb{R}$, $x>0$. 取 $\varepsilon=\frac{1}{2x}$. 考虑 $I=[0,1]$ 的覆盖 $S=\{B_\varepsilon(x)\}$. 由有限覆盖, 一定存在 $x_1\cdots x_n$, 使 $\bigcup_{i=1}^{n}B_\varepsilon(x_i)\supseteq I$. 于是 $1\le n\cdot 2\varepsilon=n\cdot 2\frac{1}{2x}=\frac{n}{x}$. 所以 $x<n$. □

例 (开区间没有有限覆盖性质) 设 $I=(0,1)$.
$J_1=(0,\frac{1}{2})$, $J_2=(0,\frac{2}{3})$, $\cdots$, $J_n=(0,\frac{n-1}{n})$.
则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n=I$. 但任何有限多个 J_n 不能盖住 I.

有限覆盖 ⇒ 区间套. 事实上我们将证明一个更强的结论: 设 S 是一个以非空闭区间为元素的集合. 满足对 S 的任何有限子集 S', $\bigcap S'$ 非空. 则 $\bigcap S$ 非空.

~~证明: 取一个 $I\in S$. 对 $\forall J\in S$ 设 $U_J=I-J$ 则 U_J 可能为三种形式: $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,c)\cup(d,b]$. 对第一种情况取 $U_J'=(a,b+1)$~~

首先不妨设存在一个 $I=[a,b]$, 使 S 的元素都是 I 的子集. 若没有这样的 I, 只需取 $\tilde{S}=\{I\cap J\mid J\in S\}$. 则 $\tilde{S}$ 也满足条件. 只需证明 $\bigcap\tilde{S}$ 非空 则 $\bigcap\tilde{S}\subseteq\bigcap S$ 也非空.

接下, 用反证法. 假设 $\bigcap S$ 为空. 则 $I-\bigcap S=I$. 即 $I=\bigcup_{J\in S}(I-J)$, 对任意 $J=[c,d]\in S$, 定义 (接前页)

含 I_{k_1} 的那个 J. 由此可得 $J_1, J_2, \cdots$, 满足
$I_1\cup\cdots\cup I_{k_1-1}\subseteq J_1$, $I_{k_1}\cup\cdots\cup I_{k_2-1}\subseteq J_2$, $\cdots$
于是 $X\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$. 取 $S'=\{J_1,J_2,\cdots\}$ 即可. □

问题: 能否进一步减小 S' 的尺寸? 答案: 若 X 是有限闭区间.

区间套 ⇒ 有限覆盖

定理 (Heine-Borel) 设 $I=[a,b]$ 是一个闭区间. 则对于 I 的任何开覆盖 S, 存在 S 的有限子集 S', 使 S' 也是 I 的覆盖.

证明: ~~设 $a_0=a$, $b_0=b$, $I_0=[a_0,b_0]$.~~ 假设 I 不具有上述性质. 即存在 I 的开覆盖 S, 使得 S 的任何有限子集都盖不住 I. 设 $a_0=a$, $b_0=b$, $I_0=[a_0,b_0]$ 考虑 $I_0'=[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}]$ 和 $I_0''=[\frac{a_0+b_0}{2},b_0]$. 若有 S 的有限子集 S' 和 S'' 满足 $I_0'\subseteq\bigcup S'$, $I_0''\subseteq\bigcup S''$, 则 $I=I_0'\cup I_0''\subseteq\bigcup(S'\cup S'')$, 于是 I 可以被有限覆盖, 矛盾. 所以 I_0' 和 I_0'' 中至少有一个不能被有限覆盖. 不妨设它为 I_1. 对于 I_1 做类似讨论, 它的二等分中也至少有一个不能被有限覆盖, 将之记为 I_2. 于是我们得到一个闭区间套 $I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$ 它们每个都不能被有限覆盖 但它们的长度可以任意小. 于是存在唯一的 $c\in\bigcap_{n=0}^{\infty}I_n$. 注意 $c\in I$. I 可以被 S 覆盖 所以必有某个 $J=(x,y)$ 使得 $c\in J$. 取 $\varepsilon<\min(c-x,y-c)$. 则有某个 I_n 满足 $|I_n|<\varepsilon$. 因为 $c\in I_n$, 所以 $I_n\subseteq J$. 这说明

Date:
Place:
Reminders

确界 ⇒ 有限覆盖：设 $S=\{I_1, I_2, \cdots\}$ 是 $I=[a,b]$ 的覆盖。
假设 S 的任何有限子集不能覆盖 I。设 $C_n = I-(I_1\cup\cdots\cup I_n)$
则 C_n 非空，且 $C_1\supseteq C_2\supseteq\cdots$。注意 C_n 是闭区间挖掉有限多个开区间，所以由归纳法易证 C_n 是有限多个闭区间的并。于是 C_n 有最小值，即最左边的闭区间的左端点，记其为 x_n。
因为 $C_n\supseteq C_{n+1}$，所以 $x_n\le x_{n+1}$。设 $A=\{x_n\}$，则 A 非空且 $A\subseteq I$，所以 A 有上确界 x，它是上界，所以 $x\ge x_n$ $\forall n=1,2,\cdots$
　　下面说明 x 在所有 C_n 中。若不然，则有某个 $N\in\mathbb{N}$ 使 $x\notin C_N$ 中，于是对 $\forall n>N$，$x\notin C_n$ 中。

当 $x=b$ 时，取 $I_x=(x', b+1)$。 →

当 $x=a$ 时 取 $I_x=(a-1, x'')$ →

注意 C_N 是有限多个闭区间，所以 x 必然在两个之间
于是可定义 x 到 C_N 的距离为 $\min(x-a, b-x)=d$.
取 $\varepsilon<d$，则在 $(x-\varepsilon, x)$ 之间没有任何 C_N 的点，于是也不可能有 $C_n(n>N)$ 的点，特别地 $x_n(n>N)\notin(x-\varepsilon, x)$。若有 $x_1\cdots x_N$ 在这个区间中，则可进一步缩小 ε 使 $(x-\varepsilon, x)$ 中没有任何 x_n。这与 x 是最小上界矛盾。所以 x 必然在所有 C_n 中。但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n=\varnothing$，矛盾。 □

Date:
Place:
Reminders

I_n 被 $\{J\}$ 覆盖了。这显然是一个有限覆盖，与 I_n 的取法矛盾！
所以不存在这样的 S。 □

定理（有限覆盖 ⇒ 确界）设 F 是全序域，满足有限覆盖性质，则 F 一定序完备。
证明：设 $A\subseteq F$，$a\in A$，A 有上界 b，$I=[a,b]$。要证明 A 有上确界。显然 A 的上确界必然在 I 中。假设 I 中所有点 x 都不是 A 的上确界，于是 x 或者是上界但不是最小上界，或者干脆就不是上界：
　① 若 x 是上界，设 x' 是比 x 小的上界，于是 (x', b) 中所有点都是 A 的上界，记 $I_x=(x', b)$，它称为第一类开区间
　② 若 x 不是上界，设 $x''\in A$，$x''>x$，则 (a, x'') 中所有点都不是 A 的上界，记 $I_x=(a, x'')$，它称为第二类开区间。
对于每个 $x\in I$ 都可按①或②取一个 I_x 满足 $x\in I_x$，于是 $\{I_x \mid x\in I\}$ 组成 I 的一个开覆盖。由有限覆盖性质 S 有一个子覆盖，不妨设其为 $\{I_1\cdots I_k, J_1\cdots J_l\}$，其中 $I_1\cdots I_k$ 是第一类的，$J_1\cdots J_l$ 是第二类的。
则 $I_i=(a, x_i)$ 或 $(a-1, x_i)$，$J_j=(y_j, b)$ 或 $(y_j, b+1)$。因为 I, J 一定互不相交，所以必有 $x_i<y_j$ $\forall i=1\cdots k$, $j=1\cdots l$。取 $x=\max(x_i)$，$y=\min(y_j)$，$z=\frac{x+y}{2}$，则 z 不在任何 I_i, J_j 中，于是 $\{I_1\cdots I_k, J_1\cdots J_l\}$ 不是 I 的覆盖，矛盾。 □

确界 ⇒ 有限覆盖（简单方法）设 $I=[a,b]$ 有开覆盖 $S=\{J\cdots\}$
定义 $A=\{x\geq a \mid [a,x]$ 有来自 S 的有限覆盖$\}$. 因为 $a\in I$
属于某 $J\in S$. 所以存在 $\varepsilon>0$, 使 $[a,a+\varepsilon]\subseteq J$. 于是 $a+\varepsilon\in A$. 所
以 A 非空. 若 A 无上界, 注意若 $x\in A$ 则 $[a,x]\subseteq A$. 所以 $b\in A$.
所以 I 有有限覆盖. 无需再证什么. 若 A 有上界, 则有上确
界 c. 若 $c>b$ 也无需再证. 若 $c\leq b$, 则 $c\in I$. 于是存在 $J\in S$ 使
$c\in J$. 取 $x,y\in J$ 满足 $x<c<y$. 因为 c 是最小上界, 所以 x 不是上界.
于是有 $x'>x$, $x'\in A$. 于是 $x\in A$. 所以 $[a,x]$ 有有限覆盖 $\{J_1,\cdots,J_n\}$
于是 $\{J_0,J_1,\cdots,J_n\}$ 构成 $[a,y]$ 的有限覆盖. 所以 $y\in A$. 于是
c 不是上界. 矛盾. 所以 c 必然 $>b$. □

记号 $B_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. →

引理-定义: 设 $A\subseteq\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$. 则以下性质等价
i) 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists y\in A-\{x\}$, s.t. $|y-x|<\varepsilon$. $(A\cap \mathring{B}_\varepsilon(x)\neq\emptyset)$
ii) 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists y_1,y_2,\cdots\in A$ $(y_i\neq y_j)$ s.t. $|y_i-x|<\varepsilon$. $(A\cap B_\varepsilon(x)$ 无穷$)$

证明: i) ⇒ ii) 对 $\varepsilon>0$, 由 i), 存在 $y_1\in A-\{x\}$ s.t. $|y_1-x|<\varepsilon$.
取 $\varepsilon_1<|y_1-x|$, 则有 $y_2\in A-\{x\}$ s.t. $|y_2-x|<\varepsilon_1<|y_1-x|$. 于是 $y_2\neq y_1$.
如此继续, 可得 $y_1,y_2,\cdots$, $(y_i\neq y_j)$ 且 $|y_i-x|<\varepsilon$.
ii) ⇒ i). 对 $\varepsilon>0$, 由 ii) $\exists y_1,y_2,\cdots\in A$, $(y_i\neq y_j)$ $|y_i-x|<\varepsilon$.
若 $y_1\neq x$, 则 y_1 即所求. 若 $y_1=x$, 则 y_2 即所求. □
若 A, x 满足上述性质, 则称 x 是 A 的聚点, 或极限点.

~~有限覆盖⇒~~

定理(极限点) 设 $I=[a,b]$, $A\subseteq I$. 若 A 是无穷集, 则存在 $x\in I$ 是 A 的聚点

(有限覆盖证法)

证明: 对于 $x\in I$, 若它不是 A 的聚点, 则存在 $\varepsilon>0$, 使 $B_\varepsilon(x)$ 中只包含 A 中有限多个点. 考虑开覆盖 $S=\{B_\varepsilon(x)\mid x\in I\}$, 它覆盖了 I. 于是有有限子覆盖 $\{B_{\varepsilon_1}(x_1),\cdots,B_{\varepsilon_n}(x_n)\}$. 它们中每个都只包含 A 中有限多个点. 注意 $A\subseteq I\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B_{\varepsilon_i}(x_i)$, 所以 A 是有限集, 矛盾. □

(区间套证法): 设 $a_0=a$, $b_0=b$, $I_0=[a_0,b_0]$, 将 I_0 二等分, 则至少有一半中包含 A 中无穷多点, 记为 I_1, 再将 I_1 二等分, 则有一半仍有 A 中无穷多点. 如此继续得区间套, 且 $\forall\varepsilon\ \exists n$ $|I_n|<\varepsilon$. 于是存在唯一的 $c\in\bigcap_{n=0}^{\infty}I_n$.
对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists |I_n|<\varepsilon$. 于是 $I_n\subseteq B_\varepsilon(c)$, 因为 I_n 中包含 A 中无穷多点
所以 $B_\varepsilon(c)$ 中包含 A 中无穷多点. 所以 c 是 A 的聚点. □

Date:
Place:
Reminders

~~……~~ 一般地，若 a_N 是上界 →
则 $\forall n>N$ $a_n<a_N$；若 a_N 不是上界，则对 $\forall n>N$，$a_n>a_N$.

Date:
Place:
Reminders

（确界证法）设 $B=\{x\in I \mid [a,x]\cap A\}$ 有限，则 $a\in B$，且 b 是 B 的上界，由确界原理，存在 $\sup B=:c$。假如 c 不是 A 的聚点，则存在 $\varepsilon>0$ 使 $B_\varepsilon(c)\cap A$ 有限。因为 c 是确界，所以 $c-\varepsilon$ 中一定有 B 的元 y，于是

$$[a,c+\tfrac{\varepsilon}{2}]\cap A\subseteq\left([a,y]\cup B_\varepsilon(c)\right)\cap A \text{ 有限}.$$

所以 $c+\frac{\varepsilon}{2}\in B$，这与 c 是上界矛盾。 □

定理：（极限点 ⇒ 确界）陈述略

证明：设 A 非空 ($a_0\in A$)，有上界 a_1，取 $I=[a_0,a_1]$，$a_2=\frac{a_0+a_1}{2}$

① 若 a_2 是上界，取 $a_3=\frac{a_0+a_2}{2}$，则有 $a_3<a_2$.

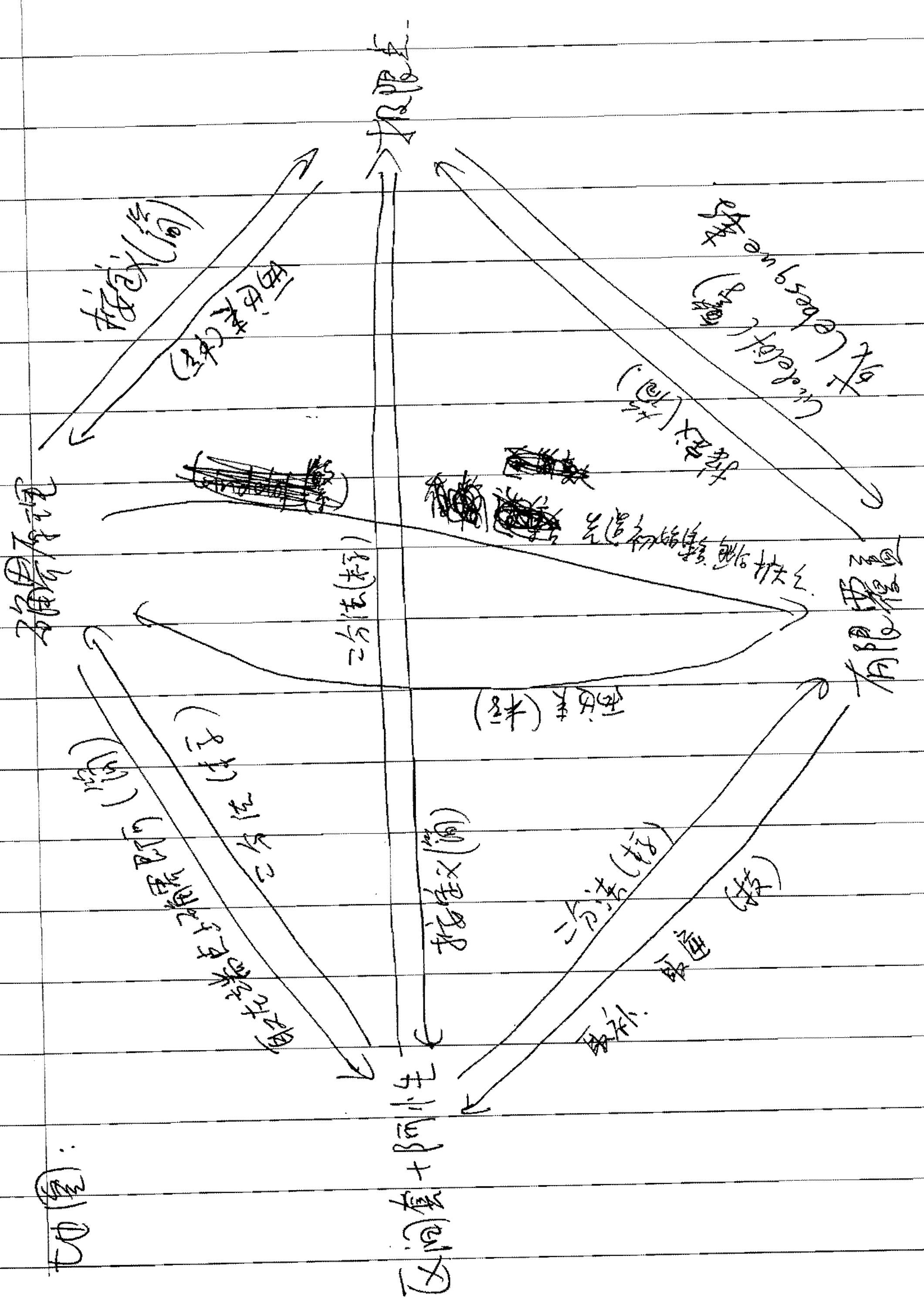
② 若 a_2 不是上界，取 $a_3=\frac{a_2+a_1}{2}$，则有 $a_3>a_2$.

对 a_3 继续讨论并取 $a_4, a_5, \dots$，于是得无穷集 $B=\{a_n\}$，$B\subseteq I$

所以有极限点 c，则 c 是 A 的上确界。

① 若 c 不是上界，即 $\exists x\in A$，$c<x$，取 $\varepsilon=x-c$，则存在 $a_N\in B_\varepsilon(c)$，于是 $c<a_N<x$，于是 a_N 也不是上界，于是对任意的 $n>N$，$a_n>a_N$。取 $\varepsilon'=a_N-c$，则 $B_{\varepsilon'}(c)$ 中只有有限多个 B 中元素，这与 c 是聚点矛盾。

② 若 c 不是上确界，即有 $c'<c$，c' 是上界，取 $\varepsilon=c-c'$，则存在 $a_N\in(c',c)$，它是上界，于是对 $\forall n>N$ $a_n<a_N$，取 $\varepsilon'=c-a_N$，则 $B_{\varepsilon'}(c)$ 中只有有限多 B 中元，这又与 c 是聚点矛盾。 □



Date:
Place:
Reminders

ii) 极限点 ⟹ 有限覆盖 证明: 设 $S=\{J_1,J_2\cdots\}$ 是 I 的覆盖. 假设它的任何有限子集都不能覆盖 I. 特别地 $C_n=I-(J_1\cup\cdots\cup J_n)$ 总非空. 设 $x_n\in C_n$. $B=\{x_n\}$. 若 B 有限. 则至少有一个 x_i 出现在无穷多个 C_n 中. 那么它一定出现在 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ 中 (注意 $C_1\supseteq C_2\supseteq\cdots$). 若 B 无限. 则有聚点 x. x 也一定在 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ 中 (因为若 x 不在某个 C_N 中. 则不在所有 $C_n\ (n>N)$ 中, 于是若取 $\varepsilon>0$ 使 $B_\varepsilon(x)\subseteq C_N$, 则 $B_\varepsilon(x)$ 中只包含有限多个 B 中的点. 这与 x 是聚点矛盾), 所以我们说明了 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ 中至少包含一个点. 但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n=I-\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n=\varnothing$. 矛盾. □.

iii) 极限点 ⟹ 区间套 证明: 设 $I_n=[a_n,b_n]$. $I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$ 取 $A=\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$. 则 $A\subseteq I_0$. 若 A 有限. 注意 $a_0\le a_1\le\cdots\le b_1\le b_0$. 只要取 $c=\max A$ 即可. 若 A 无限. 则有极限点 c. c 一定 $\ge a_n$ 因为若 $c<$ 某 a_n. 取 $\varepsilon=a_n-c$. 则 $B_\varepsilon(c)$ 中仅含有限多个. 矛盾. c 也一定 $\le b_n$ 因为若 $b_n<c$. 取 $\varepsilon=c-b_n$. 则在 $B_\varepsilon(c)$ 中存在 a_m. 于是 $a_m>b_n$ 矛盾. 所以必有 $c\in\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

若 $\mathbb{F}$ 没有阿基米德性. 设 $x\in\mathbb{F}$ 满足 $\mathbb{N}\subseteq[0,x]$. 设 c 是 $\mathbb{N}$ 的极限点. 取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. 则存在 $n\in\mathbb{N}$. 使 $|c-n|<\varepsilon$. 再取 $\varepsilon'<|c-n|<\varepsilon$ 则有 $m\in\mathbb{N}$ 使 $|c-m|<\varepsilon'$, 于是 $0<|n-m|<|c-n|+|c-m|<\varepsilon'+\varepsilon<2\varepsilon<1$. 这是不可能的. 因为 $n,m\in\mathbb{N}$. 所以不存在这样的 x. □.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

§2.5 数列及其极限

定义：$\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射叫做数列，常记为 $\{x_n\}$，表示 $n \mapsto x_n$.

注意：① 把数列首项叫第 0 项有点别扭，所以更常见的定义是把数列定义为 $\mathbb{N}' \to \mathbb{R}$ 的映射，有时还会考虑 $\{n \in \mathbb{N} \mid n > N\} \to \mathbb{R}$ 的映射，它们都可以叫数列

② 记号 $\{x_n\}$ 表示一个映射 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. 不要把它与 f 的像混淆，例如：
$f_1: n \mapsto (-1)^n$ 和 $f_2: n \to (-1)^{n+1}$
是不同的映射，但像都是 $\{-1, +1\}$.
特别地，$\{\ \}$ 表示数列时，其中的项可以相等，例如 $f: n \mapsto n$ 也是一个数列.

定义：① 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，其记 f 是相映的映射，集合 $A = f(\mathbb{N})$ 叫 $\{x_n\}$ 的值域.
② 若 $\{x_n\}$ 的值域有上界、下界、有界，则称数列有上界、下界、有界.
③ $a \in \mathbb{R}$ 叫 $\{x_n\}$ 的极限点，如果对 $\forall \varepsilon > 0$，

Date:
Place:
Reminders

$f: X \to Y$. $Z \subseteq Y$.

$f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$

练习：若 a 不是 A 的极限点 则存在 $\varepsilon > 0$，使

$B_\varepsilon(a) \cap A$ ~~[illegible]~~ $\begin{cases} 仅有一个点a & 若 a \in A \\ 是空集. & 若 a \notin A. \end{cases}$

Date:
Place:
Reminders

$f^{-1}(B_\varepsilon(a))$ 是无穷集. 即存在无穷多 $n_1, n_2, \cdots$

使 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

~~设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 是一个映射. 引理：对任意 $a \in \mathbb{R}$，以下三种情况必居其一 ① $a \notin f(\mathbb{N})$. ② a 是 f 的极限点. ③~~

问题：$\{x_n\}$ 的极限点与它值域的极限点有何关系？

设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 是相应的映射. 即要问 f 的极限点与 $f(\mathbb{N})$ 的极限点的关系. 首先 $f(\mathbb{N})$ 的极限点必是 f 的极限点. 因为若 $a \in \mathbb{R}$ 满足对 $\forall \varepsilon > 0$. $B_\varepsilon(a) \cap f(\mathbb{N})$ 无穷, 则 $f^{-1}(B_\varepsilon(a))$ 显然也是无穷 (因为 $f: f^{-1}(B_\varepsilon(a)) \to B_\varepsilon(a) \cap f(\mathbb{N})$ 是满射) 反之. 若 a 是 f 的极限点 则对 $\forall \varepsilon > 0$ $f^{-1}(B_\varepsilon(a))$ 无穷, 但这并不能推出 $B_\varepsilon(a) \cap f(\mathbb{N})$ 无穷 因为 f 可能不是单射. 若 a 不是 $f(\mathbb{N})$ 的极限点, ~~[illegible]~~ 且 a 在 $f(\mathbb{N})$ 中, 则可取 $\varepsilon > 0$, 使 $B_\varepsilon(a) \cap f(\mathbb{N})$ 中仅有一个 a (这种 a 叫 $f(\mathbb{N})$ 的孤立点), 此时条件 $f^{-1}(B_\varepsilon(a))$ 无穷 意味着 有无穷多个 n 使 $f(n) = a$. 所以总结一下:

~~若 $a \in f(\mathbb{N})$ [illegible] 是 f 的极限点 [illegible]~~

f 的极限点 $=$ $f(\mathbb{N})$ 的极限点 $\cup$ $f(\mathbb{N})$ 的被取无限次的孤立点.

~~$f(\mathbb{N})$ 的极限点~~

Date:
Place:
Reminders

这一性质在应用中更方便，可以认为我们的定义是一种整体性质（有界，仅有唯一极限点）而 ε-N 定义是一种局部性质.

Date:
Place:
Reminders

定理（Bolzano-Weierstrass，数列版）设 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 是一个有界数列，则它必有极限点.

证明：设 $f(\mathbb{N}) \subseteq [a, b]$. 若 $f(\mathbb{N})$ 为有限集，则必有一个 $a \in f(\mathbb{N})$ 在 f 的命中无限次，于是是 f 的极限点. 若 $f(\mathbb{N})$ 为无穷集，根据无穷集的 BW 定理 $f(\mathbb{N})$ 有极限点 a，于是它也是 f 的极限点.

① 定义：设 $\{x_n\}$ 是数列，若它有界且有唯一极限点 a，则称 $\{x_n\}$ 是收敛的，其极限为 a，记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
② 若不收敛，则称发散.

定理：$\{x_n\}$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

证明：$\Rightarrow$ 已知 $\{x_n\}$ 有界且有唯一极限点 a. 设 $f(\mathbb{N}) \subseteq I = [c, d]$，$I$ 为某一闭区间，$a \in I$. 要证明对 $\forall \varepsilon > 0$，只能有有限多个 n 不满足 $f(n) \in B_\varepsilon(a)$. 或者，取个补集，只要证 $f^{-1}(\underbrace{[c, a-\varepsilon] \cup [a+\varepsilon, d]}_{I'})$ 是有限集即可. 因为 f 只有唯一极限点，所以对于 $x \in I'$，它要么不在 $f(\mathbb{N})$ 中，要么是仅被命中有限次的孤立点. $f(\mathbb{N})$ 在 I' 中的孤立点显然只能有有限个（否则它们的极限点必在 I' 中，这与 a 的唯一性矛盾）设它们为 $x_1, \ldots, x_k$. $f^{-1}(x_1) = \{n_{11}, \ldots, n_{1l}\}, \ldots, f^{-1}(x_k) = \{n_{k1}, \ldots, n_{kl}\}$

补：⑩：$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

证明：对 $\forall \varepsilon > 0$ 取 $N = 1$，则

$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. □

Date:
Place:
Reminders

取 $N > \max(n_{ij})$，则对 $\forall n > N$，$f(n)$ 都不在 I' 中，于是只能在 $U_\varepsilon(a)$ 中，这就是想要的性质。

$\Leftarrow$ 若满足对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$，使 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

① 取 $\varepsilon_1 > 0$ 则存在 N_1，使 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$，于是 $|x_n| < |a| + \varepsilon_1$，令 $M = \max(|x_1|, \cdots, |x_N|, |a| + \varepsilon_1)$，则有对 $\forall n \in \mathbb{N}$，$|x_n| \leq M$，于是 $f(\mathbb{N})$ 有界。

② a 显然是极限点，设 a' 也是极限点，设 $\varepsilon_2 > 0$，N_2 满足对 $\forall n > N_2$，$|x_n - a| < \frac{\varepsilon_2}{2}$，因为 a' 是极限点，所以有无穷多个 $n_1, n_2, \cdots$ 使 $|x_{n_k} - a'| < \varepsilon_2/2$，于是必有 $n_k > N$。所以 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon_2/2$，$|x_{n_k} - a'| < \varepsilon_2/2$，由三角不等式，$0 \leq |a - a'| < \varepsilon_2$，因为 ε_2 是任意选的，所以 $a = a'$. □

例①：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$

解：要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$，只需证明对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，s.t. $n > N$ 时，有 $\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon$，即 $n > \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}$，所以取 $N = [\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}]$ 即可. □

② $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$

解：要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，只需证明对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ s.t. 当 $n > N$ 时有 $|q^n - 0| < \varepsilon$，即 $n > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{|q|}}$，取 $N = [\frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}]$ 即可. □

Date:
Place:

7): $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

推论: 若 $\exists N$ s.t. 当 $n>N$ 时有

① $a_n < b_n$, 则 $A \le B$ (若 $A>B$, 则可取 N, 使 $a_n > b_n$)

② $a_n \le b_n$, 则 $A \le B$. (同上).

③ $a_n < M$. 则 $A \le M$ ($b_n = M$)

④ $b_n > M$. 则 $B \ge M$. ($a_n = M$).

注意: 极限前的严格不等号可能在极限中变成等号.

例如 $\frac{1}{n} > 0$ $(n=1,2,\dots)$, 但 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Date:
Place:

Reminders

③ $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

解: 即解不等式 $|n^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$. 注意不必严格地解出 n, 只要得到一个充分条件即可. 在本例中, 可以考虑如下不等式

$$1 \le n^{\frac{1}{n}} \le \Big(\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-2}\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{n}} \le \frac{(n-2)+2\sqrt{n}}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

于是 $|n^{\frac{1}{n}} - 1| < \frac{2}{\sqrt{n}}$. 所以只要 $\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ 即可. 可取 $N = \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$.

定理. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是收敛序列, 则

i) $\{a_n \pm b_n\}$ 收敛. 且 $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.

ii) $\{a_n \cdot b_n\}$ 收敛. 且 $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

特别地, 对 $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{c b_n\}$ 收敛. $\lim_{n\to\infty}(c b_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

iii) 若 $b_n \ne 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ 且 $\lim_{n\to\infty} b_n \ne 0$. 则

$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$.

iv) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$. 则存在 N. 使 $\forall n > N$. 有 $a_n < b_n$.

v) 若 $\{x_n\}$ 满足 $a_n \le x_n \le b_n$. 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$ 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$.

证明: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

i) 对 $\varepsilon > 0$. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $n > N_1$ 时有 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $n > N_2$ 时有 $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

于是 $|a_n + b_n - (a+b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$.

当 $n > N = \max(N_1, N_2)$ 时有

ii) 首先证明①若 $a_n = c$, 则命题成立.

因为若 $c=0$, 则 $cb_n=0$. $\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = c\cdot b$.

若 $c\neq 0$, 则对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$, s.t. $n>N$ 时有

$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. 于是 $|cb_n - cb| < \varepsilon$.

② 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则命题成立

因为 b_n 有收敛, 所以有界. 设 $|b_n|\le M$. 则

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. $n>N$ 时有 $|a_n| < \varepsilon/M$. 于是

$|a_n\cdot b_n| = |a_n|\cdot|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M \le \varepsilon$.

③ 由①知 $\lim_{n\to\infty} ab_n$ 存在, 且 $\lim_{n\to\infty} ab_n = ab$.

由②知 $\lim_{n\to\infty}(a_n-a)b_n$ 存在, 且 $\lim_{n\to\infty}(a_n-a)b_n = 0$

于是 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty}\left((a_n-a)b_n + ab_n\right) = 0 + ab = ab$.

iii) 只需证 $\lim \frac{1}{b_n}$ 存在且等于 $\frac{1}{b}$ 即可. 因为 $b\neq0$. 所以 $\frac{|b|}{2}>0$.

取 $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. 则存在N使 $n>N$ 时有 $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$. 于是

$|b_n| \ge |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$.

此时有 $0\le \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n-b|}{|b_nb|} \le \frac{1}{2b^2}|b_n-b|$

注意 $\lim_{n\to\infty}|b_n-b| = 0$. 所以只要有 (v), 即有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = 0$.

于是 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right) = 0$ 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

iv) 取 $0<\varepsilon<\frac{|b-a|}{2}$. 则有 $N_1, N_2\in\mathbb{N}$, s.t. $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时有

$|a_n-a|<\varepsilon$. $|b_n-b|<\varepsilon$. 于是

Date:
Place:
Reminders

$a_n < a+\varepsilon < \frac{a+b}{2} < b-\varepsilon < b_n.$

(v) 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N_1$. s.t. $n>N_1$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$

$\exists N_2$. s.t. $n>N_2$ 时 $|b_n-b|<\varepsilon$.

于是当 $n>\overset{N:=}{\max(N_1,N_2)}$ 时. $a-\varepsilon<a_n\le x_n\le b_n<a+\varepsilon.$

即 $|x_n-a|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$

例: ① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{5n^2+4n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{5+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}=\cdots=\frac{2}{5}.$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}q^k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}.$

($|q|<1$)

~~③ 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 无极限.~~
~~假设有. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$. 则 易证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)$~~
~~$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)=a$. 于是 $0=\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n+1)-\sin(n-1))=2\sin1\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$.~~
~~所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$.~~

③ 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 求证

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$

证明: $\lim a_n=a \iff \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a \iff \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}=0.$

Date:
Place:
Reminders

所以只需考虑 $a=0$ 的情况. 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 使 $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ (对 $\forall n>N$)

对于 $n>N$ $\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right| = \left|\frac{a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\right|$

$\le \frac{|a_1+\cdots+a_N|}{n} + \frac{1}{n}\left(|a_{N+1}|+\cdots+|a_n|\right)$

$\le \frac{1}{n}|a_1+\cdots+a_N| + \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$. (不妨设 $N'>N$)

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}|a_1+\cdots+a_N|=0$. 所以存在 N', 使 $n>N'$ 时有 $\frac{1}{n}|a_1+\cdots+a_N|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $n>N'$ 时有

$\left|(a_1+\cdots+a_n)/n\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

定义: 设 $\{x_n\}$ 是一数列. 若对 $\forall A>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使 $n>N$ 时, 有 $x_n>A$, 则称 $\{x_n\}$ 趋向于 $+\infty$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)=+\infty$, 则称 $\{x_n\}$ 趋向于 $-\infty$, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$, 则称 $\{x_n\}$ 趋向于 ∞, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

练习: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$.

§2.6 两个收敛准则

定义: 数列 $\{a_n\}$ 称为单调递增的, 如果对 $\forall n\le m$.

Date:
Place:
Reminders

有 $a_n \le a_m$. 若 $\le$ 改为 $<$，则称严格单调递增. 若改为 $\ge$ 或 $>$，则称为单调递减和严格单调递减.

定理(单调有界) 设 $\{a_n\}$ 单调增且有上界. 则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明：设 A 是 $\{a_n\}$ 的值域. 于是 A 有上界. 由确界原理 A 有上确界. 记 $a=\sup A$. 下证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 对 $\forall \varepsilon>0$. 因为 a 是最小上界. 所以 $a-\varepsilon$ 一定不是 A 的上界. 于是存在 $N\in\mathbb{N}$ 使 $a-\varepsilon<a_N<a$. 对于 $n>N$. 由单调性知 $a-\varepsilon<a_N\le a_n<a$. 所以对 $\forall n>N$. $|a_n-a|<\varepsilon$. 得证. □

例：① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

证明：设 $x_n=|a|^n/n!$ 当 $n>|a|$ 时. 有

$$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{|a|}{n+1}\le x_n.$$ 所以从此开始 $\{x_n\}$ 单调减. 注意 $x_n\ge 0$. 所以有下界. 于是 $\{x_n\}$ 有极限. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=x$. 于是 $x=x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a|}{n+1}=0$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ □

② $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ a_n 显然单调增. 此例要说明它没有上界

这等价于证明 $b_k=a_{2^k}$ 没有上界. 而

$$b_{k+1}=b_k+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}>b_k+\frac{1}{2^k+2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}$$

$$=b_k+\frac{2^k}{2^{k+1}}=b_k+\frac{1}{2}.$$ 所以 $b_k\ge 1+\frac{k}{2}$. 于是无界.

变种：$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$. s.t. $\forall n > N$, $p \in \mathbb{N}$.

$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

常用于 无穷级数.

Date:
Place:
Reminders

③ 稍稍修改一下. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$. $(p>1)$.

a_n 仍然单调递增. 考虑 $b_k = a_{2^k-1}$

$$b_{k+1} = b_k + \frac{1}{(2^k)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha}$$

$$\le b_k + \frac{1}{(2^k)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^\alpha} = b_k + \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = b_k + \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}.$$

于是 $b_k \le b_1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{k-1}}$ 设 $\frac{1}{2^{\alpha-1}} = q$

$$= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q} < \frac{1}{1-q}.$$ 所以 b_k 有上界

对任给的 n. 存在 k 使 $n < 2^k - 1$. 于是 $a_n < b_k$. 于是 a_n 也有上界. 所以 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在. □

定义：数列 $\{a_n\}$ 称为柯西列. 如果对 $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ s.t. $\forall n, m > N$, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

定理（柯西准则）数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 它是柯西列

证明: $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon\ \exists N$ s.t. $\forall n > N$, 有 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

对 $\forall m > N$ 有 $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是 $|a_n - a_m| < \varepsilon$. 所以 收敛 $\Rightarrow$ 柯西列.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

证: ① 任取 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得对 $\forall n,m>N$, 有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$. 取 $n=N+1$, 于是对 $\forall m>N$,

$a_{N+1}-\varepsilon<a_m<a_{N+1}+\varepsilon$. 于是 $|a_m|<|a_{N+1}|+\varepsilon$.

设 $M=\max\{|a_1|,\cdots,|a_N|,|a_{N+1}|+\varepsilon\}$. 则有 $|a_n|<M\ (\forall n\in\mathbb{N})$.

所以 $\{a_n\}$ 有界.

② 根据极限点定理, $\{a_n\}$ 存在一个极限点 a. 下证 a 就是 $\{a_n\}$ 的极限. 由柯西条件, $\forall\varepsilon>0\ \exists N$ s.t. $\forall n,m>N$ 有 $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因为 a 是极限点, 所以对于上述 ε 存在无穷多 $a_{n_1},a_{n_2},\cdots\in B_{\varepsilon/2}(a)$. 这些 n_k 中至少有一个大于 N. 取其为 a_m. 于是对于 $\forall n>N$

$$|a_n-a|\le|a_n-a_m|+|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad \square$$

例: ① $a_n=q^n$. $(|q|<1)$. 对 $\forall\varepsilon>0$. 要找 N. 使 $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$, 有 $|q^{n+p}-q^n|<\varepsilon$. 注意 $|q^{n+p}-q^n|=|q|^n|1-q^p|\le 2|q|^n$. 所以只要取 $N=\left[\frac{\log\varepsilon/2}{\log|q|}\right]$. 则当 $n>N$ 时, 有 $2|q|^n<\varepsilon$. $\square$

② $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}$$

$<\frac{1}{n}$. 所以可取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. $\square$

Date:
Place:
Reminders

补：极限点与子列. 设 x 是 $\{a_n\}$ 的一个极限点...

取 $\varepsilon_0=1$. 于是有 $a_{n_0}\in B_{\varepsilon_0}(x)$.

取 $\varepsilon_1=\min(\frac{1}{2}, |a_{n_0}-x|)$. 则有 $a_{n_1}\in B_{\varepsilon_1}(x)$.

$\varepsilon_2=\min(\frac{1}{2}, |a_{n_1}-x|) \Rightarrow a_{n_2}\in B_{\varepsilon_2}(x)$.

所以对每个 k. 有 $|a_{n_k}-x|<\frac{1}{k}$ $k=1,2,\cdots$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}-x|=0$. 即 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=x$.

~~补：x 是 $\{a_n\}$ 的极限点 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon$ $f^{-1}(B_\varepsilon(x))$ 无穷 → 集. 所以若分别取 $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$, $\varepsilon_3=\frac{1}{3}\cdots$ 则可找到 $n_1, n_2, n_3, \cdots$, 使~~

引理：$\mathbb{N}$ 的无穷子集与 $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 的单调增函数一一对应.

定义：设 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个单调映射(或称保序映射)

它把 $k\in\mathbb{N}$ 映到 n_k. $\{a_n\}$ 是一个数列. 即 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. $n\mapsto n_k$.

则可定义数列 $\{a_{n_k}\}$: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 即 $\{a_{n_k}\}=f\circ g$.

$k\mapsto n_k\mapsto a_{n_k}$.

$\{a_{n_k}\}$ 叫 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

~~⇒ x 是 $\{a_n\}$ 的极限点 $\Leftrightarrow$ 存在 $\{a_n\}$ 的子序列收敛于 x.~~

Date:
Place:
Reminders

③ $a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$. $(\alpha\le 1)$

$a_{n+p}-a_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}>\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}$

$>\frac{p}{n+p}$. 若取 $p=n$. 则 $a_{2n}-a_n>\frac{1}{2}$. 所以

不可能对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$ 使 $n>N$. $\forall p$ 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

于是 ~~[illegible]~~ $\{a_n\}$ 不收敛.

§2.7 ~~子序列~~ 上下极限.

在这一节中我们考虑可能有不止一个极限点的有界数列.

设 $\{a_n\}$ 是一个有界数列. $\{a_n\}\subseteq I=[b,c]$. 由极限点定理. I 中存在 $\{a_n\}$ 的极限点. 设 E 是 $\{a_n\}$ 所有极限点的集合.

则 $E\subseteq[b,c]$. E 非空. 所以 E 有上下确界.

定义. $\{a_n\}$. E 如上. 记 $a^*=\sup E$. $a_*=\inf E$. 分别叫做 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限. 记为

$$a^*=\limsup_{n\to\infty}a_n. \quad a_*=\liminf_{n\to\infty}a_n.$$

(或 $a^*=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$. $a_*=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$)

Date:
Place:
Reminders

子列性质: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$ 对任意子列 $\{a_{n_k}\}$. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

证明: a_n 本身即子列. 所以 $\Leftarrow$ V.

$\Rightarrow$: $\forall \varepsilon > 0$. 存在 N s.t. $k > N \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon$.

注意 $n_k \geq k > N$. 所以也有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

例 ① $a_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

当 n 偶时. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

当 n 奇时 $a_n = -\dfrac{n}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

$E = \{-1, 1\}$. $a^* = 1$. $a_* = -1$

② 已知 $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ 可数. 于是存在 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Q} \cap (0.1)$

的一一映射 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. $n \mapsto r_n$. $0 < r_n < 1$.

显然 $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Q} \cap (0.1)$. 于是 (0.1) 中的每个点都是极限

点. 即 $E = (0.1)$ 于是 $a^* = 1$, $a_* = 0$.

③ 设 $\{a_n\}$ 满足 $0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$ $\forall m.n \in \mathbb{N}$.

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$ 存在.

Date:
Place:
Reminders

由定义知 ① $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

② 若 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在. 且等于 a

定理. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, $x \in \mathbb{R}$. 则

i) $x = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow x$ 是 $\{a_n\}$ 的极限点, 且对 $\forall y > x$. 存在 $N \in \mathbb{N}$.

使得对 $\forall n > N$. 有 $a_n < y$.

ii) $x = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow x$ 是 $\{a_n\}$ 的极限点, 且对 $\forall y < x$, 存在 $N > \mathbb{N}$,

使得对 $\forall n > N$. 有 $a_n > y$.

证明: 只证 i) ii) 是类似的.

$\Rightarrow$ 设 $\{a_n\}$ 的极限点集合为 E. $x = \sup E$.

① 先证 x 是 $\{a_n\}$ 的极限点: 因为 $x = \sup E$. 所以对 $\forall \varepsilon > 0$. 存

在 $y \in E$, 使得 $x - \varepsilon < y < x$. 因为 y 是 $\{a_n\}$ 的极限点. 所以

对 $\forall \varepsilon' > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$. 使 $|a_n - y| < \varepsilon'$. 取 $\varepsilon' < \min(x-y,\ y-(x-\varepsilon))$.

则这样取出的 a_n 满足 $x - \varepsilon < a_n < x$. 所以我们证明了对 $\forall \varepsilon > 0$. 存在

$n \in \mathbb{N}$. 使 $|a_n - x| < \varepsilon$. 所以 x 是 $\{a_n\}$ 的极限点.

② 假设 $\exists y > x$, 使得对 $\forall N \in \mathbb{N}$, 均 $\exists n > N$ 满足 $a_n \geq y$.

不妨设 $\{a_n\}$ 的上界为 z. 于是 $a_n \in [y, z]$. 依次取 $N = 0, 1, 2, \cdots$

相应的 a_n 记为 $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$. 于是子列 $\{a_{n_k}\}$ 在 $[y, z]$

中. 根据极限点定理. 存在 $u \in [y, z]$ 是 $\{a_{n_k}\}$ 的极限点. 于是

它也是 $\{a_n\}$ 的极限点. 但 $u \geq y > x$. 这与 x 是 E 的上确界

Date:
Place:
Reminders

任取一 $m\in\mathbb{N}$. 则对 $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge m$, $n=qm+r$, $0\le r\le m-1$, $q\in\mathbb{N}$

于是 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{qm+r}}{n}\le\frac{a_{qm}+a_r}{n}\le\frac{qa_m+a_r}{n}$

$=\frac{qa_m}{qm+r}+\frac{a_r}{n}=\frac{a_m}{m+\frac{r}{q}}+\frac{a_r}{n}$ ($r/q\to0$)

当 $n\to\infty$ 时. $q\to\infty$. a_r 有界 于是 $\frac{a_r}{n}\to0$. 所以

$\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\frac{a_m}{m}$ $(m=1,2,\dots)$. 于是 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\liminf\limits_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}$ □

② $X\subseteq[a,b]$. X 非空. 则 $\sup X,\inf X\in[a,b]$

证明: 若 $\sup X>b$. 则 $(b,\sup X)$ 中没有任何 X 的点. 这与 $\sup X$ 是最小上界矛盾. $\inf X$ 同理. □

补: ① $X\subseteq Y$ ($\subseteq\mathbb{R}$ 非空有界). 则 $\sup X\le\sup Y$.
$\inf X\ge\inf Y$.

证明: 设 $A_X=\{a\in\mathbb{R}\mid a$ 是 X 的下界$\}$ A_Y 类似
$B_X=\{b\in\mathbb{R}\mid b$ 是 X 的上界$\}$ B_Y

因为 $X\subseteq Y$. 所以 Y 的上下界也是 X 的上下界. 即 $A_Y\subseteq A_X$.
$B_Y\subseteq B_X$. A_Y 的最大元 $\le$ A_X 的最大元. 所以 $\inf Y\le\inf X$.
B_Y 的最小元 $\ge$ B_X 的最小元. 所以 $\sup Y\ge\sup X$. □

Date:
Place:
Reminders

~~⇐ 只需证 x 是 E 的最大值. 假设还有 $y\in E$. $y>x$. 由条件存在 N. 使得对 $\forall n>N$. 有 $a_n<y$.~~

⇐ 只需证 $x=\max(E)$. 假设 $z>x$. $z\in E$. 取 $y=\frac12(x+z)$ 则存在 $N\in\mathbb{N}$ 使 $\forall n>N$, $a_n<y$. 于是 $f^{-1}([y,+\infty))$ 只能是有限集. 另一方面. 取 $\varepsilon=\frac12(z-x)$. 因为 z 是极限点. 所以 $f^{-1}(B_\varepsilon(z))$ 有无穷多点. 但 $B_\varepsilon(z)\subseteq[y,+\infty)$. 所以 $f^{-1}(B_\varepsilon(z))\subseteq f^{-1}([y,+\infty))$. 矛盾. □

定理: 设 $\{a_n\}$ 是有界数列. 定义 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, 其中

$b_n=\inf\limits_{k\ge n}\{a_k\}$. $c_n=\sup\limits_{k\ge n}\{a_k\}$. 则

(1) b_n 单调递增有上界. c_n 单调递减有下界

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\liminf\limits_{n\to\infty}a_n$. $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$.

证明: (1) $b_{n+1}=\inf\limits_{k\ge n+1}a_k=\inf\{a_{n+1},a_{n+2},\dots\}$.

$b_n=\inf\{a_n,a_{n+1},\dots\}$. 因为 $\{a_n,a_{n+1},\dots\}\supseteq\{a_{n+1},a_{n+2},\dots\}$

所以 $b_n\le b_{n+1}$. 同理 $c_n\ge c_{n+1}$.

设 $\{a_n\}\subseteq[A,B]$. 则 $\{a_{n+1},a_{n+2},\dots\}\subseteq[A,B]$.

于是 $b_n,c_n\in[A,B]$. 所以 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 有界.

(2) 只证 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 同理. 设 $x=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$

Date:
Place:

Reminders

根据前一定理，只需证 ① x 是极限点 ② $\forall y > x$. $\exists N \in \mathbb{N}$. s.t. $\forall n > N$. 有 $a_n < y$.

① 由 $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = x$ 且 c_k 单调下降. 对 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N$. s.t. $\forall k > N$, $x \le c_k < x+\varepsilon$. 任取一个 $k > N$. 取 $\varepsilon' < \min(x+\varepsilon - c_k, c_k - x)$. 因为 c_k 是 $\{a_k, a_{k+1}, \cdots\}$ 的上确界. 所以存在 a_n $(n>k)$ 满足 $|a_n - c_k| < \varepsilon'$. 即 $a_n \in B_{\varepsilon'}(c_k) \subseteq (x, x+\varepsilon)$. 所以 x 是 $\{a_n\}$ 的极限点.

② 对 $\forall y > x$. 取数列 $b_n = y$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = y > \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. 所以存在 N. 使 $\forall n > N$ 有 $c_n < b_n = y$. 因为 c_n 是 $\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ 的上确界. 所以 $a_n \le c_n < y$. 所以我们证明了对 $\forall y > x$. 存在 N. 使 $\forall n > N$, 有 $a_n < y$. □

定理（算术性质）

i) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \le \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ ①

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \le \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ ②

ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)$

iii) 若 $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$, 则

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} a_n b_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

Date:
Place:
Reminders

iv) 若 $\exists N$ s.t. $\forall n > N$ $a_n \le b_n$，则

$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$ ① $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$ ②

证明：首先，ii) 是显然的，因为 $\sup E = -\inf(-E)$.
于是在 i) 中只要证第一条，iii) 与 i) 类似，略。所以
我们只证 i) ① 和 iv) ②

i) ① 只要证 $\inf_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k \le \inf_{k\ge n}(a_k+b_k) \le \inf_{k\ge n} a_k + \sup_{k\ge n} b_k$.

对于 $\forall k \ge n$，$\inf_{k\ge n} a_k \le a_k$，$\inf_{k\ge n} b_k \le b_k$. 于是

$\inf_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k \le a_k + b_k$. 所以 $\inf_{k\ge n} a_k + \inf_{k\ge n} b_k$ 是 $\{a_k+b_k\}(k\ge n)$
的下界，于是它会小于或等于最大下界 $\inf_{k\ge n}\{a_k+b_k\}$. ①左得证.
对于①右，它等价于 $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) + \liminf_{n\to\infty}(-b_n) \le \liminf_{n\to\infty} a_n$
这就是①左的特体，所以也成立.

iv) ② 设 $a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n > \limsup_{n\to\infty} b_n = b^*$. 取 x 满足 $a^* < x < b^*$.

则存在 N_1，使 $n > N_1$ 时 $b_n < x$. 于是当 $n > \max(N, N_1)$ 时，

有 $a_n \le b_n < x < a^*$. 所以 a_n 的任何子列只会收敛
于 $\le x$ 的点. 于是 x 是 E_a 的上界，它比 a^* 小，这与 a^* 的定义矛盾.

□

例：① 设 $F_0 = 0$，$F_1 = 1$，$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}$.

解: 对于 $n>0$. 显然 F_n 单调上升且恒正. 将递推式两边同除得

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

记 $x_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$. 于是

$$1 + x_n = \frac{1}{x_{n+1}}$$

因为 $0 < x_n < 1$. 所以 $\{x_n\}$ 有上下极限 x_* 和 x^*. 且 $0 \le x_* \le x^* \le 1$.

对上式求上极限得 $1 + x^* = \frac{1}{x_*}$. 求下极限得 $1 + x_* = \frac{1}{x^*}$.

解方程得 $x_* = x^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 所以极限存在且为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D.

② Cauchy 准则: 若 $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}$.
有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. 则 $\{x_n\}$ 收敛

证明: 对 $\forall \varepsilon$, $\exists N$ s.t. $n, p \ldots$ $x_n - \varepsilon < x_{n+p} < x_n + \varepsilon$

对 $p \to \infty$ 取上极限得 $x_n - \varepsilon \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le x_n + \varepsilon$

取下极限得 $x_n - \varepsilon \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le x_n + \varepsilon$.

于是 $0 \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n - \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le 2\varepsilon$ 因为 ε 是任意的 所以 $\overline{\lim} = \underline{\lim}$. D.

③ 设 $x_n = \frac{G(n)}{n}$. 其中 $G(0)=0$, $G(n) = n - G(G(n-1))$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(1. $0 \le G(n) \le n$. 2. $G(n-1) \le G(n) \le G(n-1)+1$. 3. $\frac{x_{n-1}}{x_n} \to 1$

4. $x_n = 1 - x_{G(n-1)} \cdot x_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}$. $\Rightarrow 1 + x_{G(n-1)} \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{x_n}$.

5. 设 $\overline{\lim} x_n = \alpha$ $\underline{\lim} x_n = \beta$. 则 $\beta \le \frac{1}{\alpha} - 1 \le \frac{1}{\beta} - 1 \le \alpha \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

§2.8 无界数列与扩充实数集

先看几个例子

例 ① $a_n = n$. ② $a_n = -n$

③ $a_n = (-1)^n n$ ④ $a_n = n\sin(\frac{\pi}{2}n)$

定义: ① 若对 $\forall A>0$ $\exists N$ s.t. $\forall n>N$ $x_n>A$. 则称 $\{a_n\}$ 以 $+\infty$ 为极限. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

② 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$. 则称 a_n 以负无穷为极限 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. 则称 a_n 以无穷为极限. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

~~④ 若 $\{a_n\}$ 有子列趋向于无穷 又有子列有有限的极限 则称它发散~~

命题. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} ① \ \exists N \text{ s.t. } \forall n>N \ a_n>0. \\ ② \ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0. \end{cases}$

证明: $\Rightarrow$ ① 取 $A=1$ 即可. ② $\forall \varepsilon>0$ 取 $A=\frac{1}{\varepsilon}$. 则 $x_n>A$ $\Rightarrow \frac{1}{x_n} < \varepsilon$. $\Leftarrow$ 先取 N_1 使 $n>N_1$ 时 $a_n>0$. 由对 $\forall A>0$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{A}$ 取 N_2 使 $n>N_2$ 时 $|\frac{1}{a_n}| < \varepsilon$. 当 $n>\max(N_1,N_2)$ 时 $a_n > \frac{1}{\varepsilon} = A$. □

$\mathbb{R}_\infty$ 中任意数列都是有界的. 于是任意数列 →
都有上下确界(或有限, 或为 $\pm\infty$).

为了处理与无界数列有关的问题, 我们可以将实数集扩张一下. 记 $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. 并规定

① 对 $\forall x\in\mathbb{R}$. $x+(+\infty)=+\infty$. $x+(-\infty)=-\infty$.

② $-(+\infty)=-\infty$. $-(-\infty)=+\infty$. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.

~~③ $+\infty > -\infty$~~ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$. $-\infty<x<+\infty$.

~~④ 因为 $+\infty>0$. $-\infty<0$. 所以由~~

③ $\forall x\in\mathbb{R}$. 若 $x>0$. $x\cdot(+\infty)=+\infty$. $x\cdot(-\infty)=-\infty$

若 $x<0$. $x\cdot(+\infty)=-\infty$. $x\cdot(-\infty)=+\infty$.

~~注意有些 ④ $x/(+\infty)=0$. $x/(-\infty)$~~ ④ $(+\infty)^{-1}=0$. $(-\infty)^{-1}=0$.

~~④ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$. $x/(+\infty)=0$ $x/(-\infty)=0$.~~

注意有些运算是不定义的, 如 $(+\infty)+(-\infty)$, $0\cdot(+\infty)$, $\frac{+\infty}{+\infty}$ 等.

~~[illegible]~~ $\mathbb{R}_\infty$ 上 $(-\infty,a)$ 和 $(a,+\infty)$ 成为了与 (a,b) 类似的开区间. 另外, 我们规定 $[-\infty,a)$, $(a,+\infty]$ 也叫 $\mathbb{R}_\infty$ 上的开区间. 于是 $\mathbb{R}_\infty$ 上有限覆盖定理成立.

定理($\mathbb{R}_\infty$ 的有限覆盖) 设 S 是 $\mathbb{R}_\infty$ 的一个开覆盖. 则它存在有限子覆盖.

证明: $+\infty$ 都能被某一形如 $(b,+\infty]$ 的区间覆盖.
$-\infty$ 只能被 $[-\infty,a)$ 覆盖. ~~[illegible]~~

Date:
Place:
Reminders

现在 $[a,b]$ 被 S 中其它开区间覆盖. 可得有限子覆盖 S'.
则 $S' \cup \{[-\infty, a), (b, +\infty]\}$ 构成 $\mathbb{R}_\infty$ 的有限覆盖 D.

定理 ($\mathbb{R}_\infty$ 的极限点) 任意实数列 $\{a_n\}$ 在 $\mathbb{R}_\infty$ 中有极限点. (证明略)

"定义": 若 $\{a_n\}$ 在 $\mathbb{R}_\infty$ 中有唯一极限点 A. 则称 A 为 a_n 的极限. 记为 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.
(这包含 $A = +\infty$ 和 $-\infty$ 的情况

若要考虑 或正或负的情况. 则不能用 $\mathbb{R}_\infty$. 可以用 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (细节略). $\mathbb{R}_\infty$ 一般叫扩充实数系. $\overline{\mathbb{R}}$ 则叫 $\mathbb{R}$ 的单点紧化.

因为任意数列在 $\mathbb{R}_\infty$ 中都有极限点. 所以我们可以谈任意数列的上下极限 (不再限于有界的) 如果 a_n 在 $\mathbb{R}_\infty$ 中的上极限为 $+\infty$. 就记 $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
负无穷时同理.

命题: $\limsup a_n = +\infty \Leftrightarrow \{a_n\}$ 有子列以 $+\infty$ 为极限.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

§2.9 Stolz 定理

b_n 严格递增趋于 $+\infty$

定理($\frac{\infty}{\infty}$型) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是实数列, 满足

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$. ($A\in\mathbb{R}_\infty$).

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

证明: ① 先考虑 $A\in\mathbb{R}$ 的情形. 由极限定义. 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}$. s.t. $\forall n>N$. 有

$$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon$$

因为 $b_n-b_{n-1}>0$. 所以

$(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1})$, 同理有

$(A-\varepsilon)(b_{n-1}-b_{n-2})<a_{n-1}-a_{n-2}<(A+\varepsilon)(b_{n-1}-b_{n-2})$ …

$(A-\varepsilon)(b_{N+1}-b_N)<a_{N+1}-a_N<(A+\varepsilon)(b_{N+1}-b_N)$. 相加得

$(A-\varepsilon)(b_n-b_N)<a_n-a_N<(A+\varepsilon)(b_n-b_N)$ 除以 b_n 得

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_N}{b_n}<(A+\varepsilon)\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right).$$

令 $n\to\infty$, 分别取上下极限得

$$A-\varepsilon<\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon,\quad A-\varepsilon<\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon.$$

因为ε是任意的, 所以 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}=A$.

② 若 $A=+\infty$. 则 $\exists N$ 使 $n>N$ 时 $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}>A$. 于是

a_n-a_{n-1} 也单调上升且趋于 $+\infty$. 对 $\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}$ 应用①.

③ 若 $A=-\infty$. 对 $\frac{(-a_n)-(-a_{n-1})}{b_n-b_{n-1}}$ 应用② $\square$.

例: $\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$. 取 $a_n=1^k+\cdots+n^k$. $b_n=n^{k+1}$

$a_n-a_{n-1}=n^k$. $b_n-b_{n-1}=(k+1)n^k+\cdots$. $\square$.

定理 ($\frac{0}{0}$型) 设 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 都趋于零, 且 b_n 严格单调递减. 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$. 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$. (证明略).

§2.10 e 数.

定义 $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$. $S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$. 显然 $\{S_n\}$ 单调上升且 $S_n\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$. 所以有极限. 记 $s=\lim_{n\to\infty}S_n$. 另一方面,

$e_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$

$\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\le S_n<3$. 另外, 将 n 换

成 $n+1$ 很容易看出 $e_{n+1} \geq e_n$，所以 e_n 单调上升有上界，于是有极限 $e = \lim_{n\to\infty} e_n$，且 $e \leq s$。最后，将 e_n 在 $m \leq n$ 的位置截断可得 $e_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$。令 $n \to \infty$，左边变成 e，右边变成 s_m，所以 e 也是 s_m 的上界，于是 $s \leq e$。所以 $e = s$。于是有如下定义

定义：$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

定理：e 是无理数

证明：~~设 $e=p/q$ 因为 $2<e<3$ 所以 $q\geq 2$~~。首先，对 $\forall n, p$，

$$0 < S_{n+p} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+p)}\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

令 $p \to \infty$ 得 $0 \leq e - S_n < \frac{1}{n \cdot n!}$.

现在设 $e = p/q$，$p, q \in \mathbb{N}$，$(p, q) = 1$。因为 $2 < e < 3$，所以 $q \geq 2$。于是 $0 < q! \cdot (e - S_q) < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$。但 $q! \cdot e = (q-1)! \cdot p \in \mathbb{N}$，$q! \cdot S_q = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \cdots + 1 \in \mathbb{N}$。矛盾。所以不存在这样的 p, q。 $\square$

Date: ……………………
Place: ……………………

Reminders

Date: ……………………
Place: ……………………

Reminders

重要极限

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e}$.

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot$

$=e\cdot e\cdot 1=e^2$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$. 事实上 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调递减，所以有

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

中不等

④ 对上式依次取 $n=1,2,\cdots$ 得

$\left(\frac{2}{1}\right)^1<e<\left(\frac{2}{1}\right)^2$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2<e<\left(\frac{3}{2}\right)^3$, $\cdots$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$

相乘得 $\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$. 于是 $\frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}<e<\frac{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$

设 $x_n=\frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$. 则有 $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\frac{n}{n+1}e<x_n<\frac{n}{n+1}\cdot e$

令 $n\to\infty$. 注意 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. 所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}=e^{-1}$. 或写为 $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n$. 这是Stirling公式的一部分.

⑤ 对③的不等式两边取以e为底的对数得

$\frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$. 相加得

Date:
Place:
Reminders

$\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

定义 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n.>\log(1+\frac{1}{n})>0$.

另一方面 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\log(1+\frac{1}{n})<0$. 所以 x_n 单调递减有下界. 于是有极限. 记之为 $\gamma=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$.

称为 Euler γ. $\gamma=0.5772156649\cdots$ ($\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$?)

⑥ $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\right)=\lim_{n\to\infty}(H_{2n}-H_n)$.

因为 $\lim_{n\to\infty}(H_{2n}-\log(2n))=\gamma$. $\lim_{n\to\infty}(H_n-\log n)=\gamma$.

所以 $\lim_{n\to\infty}(H_{2n}-H_n-\log 2n+\log n)=0$. 从而 $\lim_{n\to\infty}(H_{2n}-H_n)=\log(2)$.

§2.11 无穷级数

定义: 设 $\{a_n\}$ 是数列. 定义 $S_N=\sum_{n=0}^{N}a_n$ 叫做 $\{a_n\}$ 的部分和. 若 $\lim_{N\to\infty}S_N$ 存在 且等于 S, 则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛. 并记 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S$.

注: 设 $\{S_N\}$ 是级数 定义 $a_0=S_0$. $a_1=S_1-S_0$, $\cdots$, $a_n=S_n-S_{n-1}$, 则有 $S_N=\sum_{n=0}^{N}a_n$. 于是数列 $\{S_n\}$ 和级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 可互相转化. 并无本质区别.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

$a_0+a_1+a_2+\cdots$

$=(a_0+\cdots+a_{n_1-1})+(a_{n_1}+\cdots+a_{n_2-1})+\cdots$

Date:
Place:
Reminders

例：① 我们已经知道 $\sum_{n=0}^{N} q^n$ 当 $|q|<1$ 时收敛. 且 $\lim_{N\to\infty} S_N=\frac{1}{1-q}$. 所以有 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$.

② $S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p}$ 已知当 $p\le 1$ 时 $\lim_{N\to\infty} S_N=+\infty$

当 $p>1$ 时 $\lim_{N\to\infty} S_N$ 收敛.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p\le 1$ 时发散. 当 $p>1$ 时收敛.

③ $a_n=\frac{1}{n!}$ $S_N=\sum_{n=0}^{N} a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{N!}$.

$\lim_{N\to\infty} S_N=e$. 所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$.

定理（级数的Cauchy准则）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$ s.t. $\forall n>N$ $\forall p\in\mathbb{N}$, 有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon$.

推论：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 则 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

证明：取 $p=1$ 则有 $|a_{n+1}|<\varepsilon$. 于是 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. □

反之显然不对. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

定理（无穷和的结合性）设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是一收敛的无穷级数. 任取 $\mathbb{N}$ 的无穷子集 $n_0=0<n_1<n_2<n_3<\cdots$ 定义 $b_k=\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i$. 则 $\lim_{k\to\infty} b_k$ 收敛.

交换律一般不对，除非只交换有限项，或绝对收敛。→
另外，改变、增加、去掉有限项都不改变敛散性。

（正项级数交换律）

定理：设 $\sum a_n$ 为正项级数（收敛的），$f: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个双射。
则 $\sum a_{f(n)}$ 也收敛，且 $\sum a_{f(n)} = \sum a_n$.

证明：$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_{f(n)}$，设 $M = \max(f(0),\cdots,f(N))$.
则 $S_N \le S_M = \sum_{n=0}^{M} a_n < \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. 所以 $\sum a_{f(n)}$ 部分和有上界，于是收敛，由 $S_N \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \sum a_{f(n)} \le \sum a_n$. 因为 f 是双射，所以 $\sum a_n$ 可看做 $\sum a_{f^{-1}(f(n))}$，于是 $\le \sum a_{f(n)}$. □

证明：i) $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum b_n$ 部分和有上界
$\Rightarrow \sum a_n$ 部分和有上界 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛.
ii) 与 i) 互为逆否. □

证明：i) 取 $\varepsilon = \frac{L}{2}$，则存在 N s.t. $n > N$ 时有
$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2}$，于是 $\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} L b_n$.

ii) 取 $\varepsilon = 1$，则 $a_n/b_n < 1$. iii) 与 ii) 同理 □

证明：设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 的部分和序列为 $\{S_n\}$，则 $\sum b_k$ 的部分和序列是 $\{S_n\}$ 的子列 □

定理（线性性）设 $\sum a_n$ $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ 也收敛，且 $\sum(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum a_n + \mu \sum b_n$.（证明略）

§2.12 正项级数 （或非负项级数）

定义：若 $a_n \ge 0$，则称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

命题：正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和有界 （单调有界）

（比较判敛法）

定理：设 $\sum a_n$ $\sum b_n$ 为正项级数，若存在 N 使 $\forall n > N$ 有 $a_n \le b_n$，则
i) $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛.
ii) $\sum a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum b_n$ 发散.

推论：若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$，则
i) $\sum a_n$ $\sum b_n$ 同时收敛，同时发散（若 $0 < L < \infty$）
ii) 若 $L = 0$，则 $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛.
iii) 若 $L = +\infty$，则 $\sum b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum a_n$ 发散.

Date: ....
Place: ....

Reminders

i) 由比较 ii) 由必要条件 iii) 考虑 $q' = \frac{1}{2}(q+1)$ $\rightarrow$

①

例 $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$

$a_n^{\frac{1}{n}} = (1+\frac{1}{n})^n x \to ex$. 当 $x < \frac{1}{e}$ 时收敛.

Date: ....
Place: ....

Reminders

例：① Cauchy 凝聚判敛法：设 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \geq 0$ 且 a_n 单调递减，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \overbrace{a_2 + a_3} + \overbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7} + \cdots$

$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \underbrace{a_1 + a_2} + \underbrace{a_2 + a_4 + a_4 + a_4} + \underbrace{a_4 + a_8 + a_8 + a_8 + \cdots}_{8个} \cdots$

$\leq 2a_1 + 2(a_2+a_3) + 2(a_4+a_5+a_6+a_7) + \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ □.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n}$ 当 $2^{p-1} > 1$ 即 $p>1$ 时收敛.

③ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log^p 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^p 2} \Rightarrow$ $p>1$ 收，$p \leq 1$ 发.

~~推论：阶段数判别法 ... 判别法.~~

~~$\sum_{n=0}^{\infty}$ 的比较~~

(根式法)

定理：设 $\sum a_n$ 正项. $\sum a_n$ 收敛.

i) 若存在 $0<q<1$, $N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n > N$, 有 $(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq q$ 则

ii) 若有子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $(a_{n_k})^{\frac{1}{n_k}} \geq 1$, 则发散.

iii) (极限形式) 设 $\limsup_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = q$, 则

$q<1 \Rightarrow$ 收敛. $q=1$ 无法判断. $q>1$ 发散.

Date:
Place:
Reminders

② $a_{2n-1} = \frac{1}{2^n}$. $a_{2n} = \frac{1}{3^n}$.

$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

③ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \to 0 < 1$. 所以收敛.

④ 对②用比值, 则有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 0$. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}} = +\infty$.
所以比值法失效.

i) ii) 由比值比较. iii) iv) 由比根式法的前). →

Date:
Place:
Reminders

定理 (比值比较) 设 $a_n, b_n > 0$. 若存在 N 使 $\forall n > N$ 有 $a_{n+1}/a_n \le b_{n+1}/b_n$, 则:

i) $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum a_n$ 收敛.

ii) $\sum a_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum b_n$ 发散

证明: $\frac{a_{N+1}}{a_N} \le \frac{b_{N+1}}{b_N}$, $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \le \frac{b_{N+2}}{b_N}$ … $\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$

相乘得 $a_n \le \frac{a_N}{b_N} b_n$. 再由比较法可知结论成立. □

定理 (比值法) 设 $a_n > 0$.

i) 若有 $0 < q < 1$. $N \in \mathbb{N}$. 使 $\forall n > N$ 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$. 则 $\sum a_n$ 收敛.

ii) 若有 N 使 $\forall n > N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ 则发散.

iii) 若 $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ 则收敛 (若 q 或 $q' = 1$. 则

iv) 若 $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = q' > 1$ 则发散. 无法判断).

定理: 设 $a_n > 0$. 则

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

证明: (右边最后一个) 设 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. 若 $q = +\infty$ 则显然, 若 $q < +\infty$.
对 $\forall \varepsilon > 0$. $q + \varepsilon > q$. 于是存在 N 使 $\forall n > N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$.
于是 $a_n < (q+\varepsilon)^{n-N} a_N$. 所以 $(a_n)^{\frac{1}{n}} < (q+\varepsilon) \cdot \left(\frac{a_N}{(q+\varepsilon)^N}\right)^{\frac{1}{n}}$

Date:
Place:
Reminders

如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\lg n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\lg n\lg\lg n\lg\lg\lg n}$ 等 →

没有~~有~~万能的判别法.

Date:
Place:
Reminders

于是 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n^{\frac{1}{n}} \le q+\varepsilon$. 因为 ε 是任意的. 所以

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n^{\frac{1}{n}} \le q$. ~~其它~~中间的是定义. 最左边的类似. □

该定理说明 根式总是优于比值. 比值的好处是计算简便.

~~2. 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 比较.~~ 还有其它判别法, 都比较繁琐, 略.

§2.1.3 绝对收敛级数.

定理定义: 若 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 这种级数叫绝对收敛级数. 收敛但不绝对收敛的叫条件收敛.

证明: $|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| \le |a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|$. □

(绝对收敛级数的交换律)

定理: 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则对 $\forall$ 双射 $f: N\to N$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_{f(n)}$ 也绝对收敛, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{f(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$

证明: 定义 $a_n^+=\begin{cases}a_n & a_n\ge 0\\ 0 & a_n<0\end{cases}$ $a_n^-=\begin{cases}-a_n & a_n\le 0\\ 0 & a_n\ge 0\end{cases}$

则 $0\le a_n^+\le|a_n|$, $0\le a_n^-\le|a_n|$. $\{a_n^+\}$, $\{a_n^-\}$ 都是正项级数.

于是 $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ 都收敛. 注意 $a_n=a_n^+-a_n^-$. 所以有

$\sum a_n=\sum a_n^+-\sum a_n^-$.

Date:
Place:
Reminders

设 $b_n = a_{f(n)}$，则 $\sum b_n^+$ 是 $\sum a_n^+$ 的重排，$\sum b_n^-$ 是 $\sum a_n^-$ 的重排，$\sum |b_n|$ 是 $\sum |a_n|$ 的重排，由正项级数的交换律，有 $\sum b_n^{+,-,||} = \sum a_n^{+,-,||}$，~~进而~~ 最后 $\sum b_n = \sum b_n^+ - \sum b_n^- = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n$ □.

定理（条件收敛级数的Riemann重排定理）设 $\sum a_n$ 条件收敛，则对 $\forall S \in \mathbb{R}_\infty$ 存在 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = S$.

证明：~~因为条件收敛，所以 $\sum$~~ 先设 $S \in \mathbb{R}$，因为条件收敛，所以 $\sum a_n^+ = +\infty$，$\sum a_n^- = +\infty$.（见正、负项的个数都是无穷）若 $S > 0$，先取 a_n 中的正项，使这些正项之和刚好大于 S。依次再依次取负项，使整个和刚好小于 S，再取正，再取负，……

这显然得到一个重排，设第一步取了 k_1 个正项，然后 l_1 个负项，k_2 个正，l_2 个负……并记这些项的和为 $A_1^+, -A_1^-, A_2^+, -A_2^-$，则重排后的和即为

$$A_1^+ - A_1^- + A_2^+ - A_2^- + \cdots$$

根据我们的取法，第一步给出 $A_1 - a_{k_1}^+ \le S < A_1$

第二步给出 $A_1^+ - A_1^- < S \le A_1^+ - A_2^- + a_{l_1}^-$，如此等等.

第 $2n-1$ 步给出 $0 < A_1^+ - A_1^- + \cdots + A_n^+ - S \le a_{k_n}^+$

第 $2n$ 步给出 $0 < S - (A_1^+ - A_1^- + \cdots + A_n^+ - A_n^-) \le a_{l_n}^-$

因为 $a_{k_n}^+ \to 0$，$a_{l_n}^- \to 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^+ - A_n^-) = S$ □.

① 例. 定义 $e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. 则 $e(x)\cdot e(y)=e(x+y)$.

证明: $e(x)\cdot e(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\cdot\frac{y^{n-i}}{(n-i)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n=e(x+y).$$

② 定义 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. $c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. 则

$s(x+y)=s(x)c(y)+s(y)c(x)$.

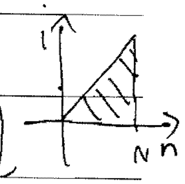
$c(x+y)=c(x)c(y)-s(x)s(y)$.

Date:
Place:
Reminders

A B

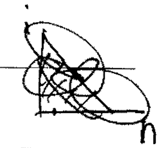
定理: 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 绝对收敛. 则

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)$ 绝对收敛且等于 $A\cdot B$.



证明: 设 $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$ ~~$d_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot\sum_{i=0}^{n}b_i$~~

则 $\sum_{n=0}^{N}|c_n|\le\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i=0}^{n}|a_i||b_{n-i}|\right)$ ~~$\le\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i=0}^{n}|a_i|\cdot\sum_{i=0}^{n}|b_i|\right)$~~



$$=\sum_{i=0}^{N}|a_i|\cdot\sum_{j=0}^{N-n}|b_j|\le\sum_{i=0}^{N}|a_i|\cdot\sum_{j=0}^{N}|b_j|$$

因为 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 绝对收敛. 所以 $\sum|a_i|$, $\sum|b_i|$ 有上界.

于是 $\sum|c_n|$ 有上界. 所以 $\sum c_n$ 绝对收敛.

~~设 $d_n=(\sum_{i=0}^{n}a_i)(\sum_{i=0}^{n}b_i)$. 则 $\sum d_n$ 是 $\sum c_n$ 的重排. 根据绝对收敛的重排性定理 $\sum d_n=\sum c_n$. 而~~

将 $\sum c_n$ 的括号打开

$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=a_0b_0+a_0b_1+a_1b_0+a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0+\cdots$

重排为 $a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_1+a_1b_0)+(a_{02}+a_{12}+a_{22}+a_{21}+a_{20})+\cdots$

则它是 $(\sum_{i=0}^{n}a_i)(\sum_{i=0}^{n}b_i)$ 当 $n\to\infty$ 的极限. 所以结果为 $A\cdot B$ □

§2.14 一般级数.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

单调

定理 (Leibniz) 若 a_n 递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

~~这种级数称为交错级数.~~

~~证明：$S_{2n} = S_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \geq S_{2n-2}$. 所以 $\{S_{2n}\}$ 单调增. 而 $S_{2n} = a_0 - (a_1 + a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n})$~~

证明：$S_{2n} = S_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq S_{2n-2}$ 所以 $\{S_{2n}\}$ 单调减. 而 $S_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + a_{2n} \geq 0$.
所以 S_{2n} 有极限. $S_{2n+1} = \overset{\to S}{S_{2n}} - \underbrace{\overset{\to 0}{a_{2n+1}}}$ 于是 S_{2n+1} 与 S_{2n} 有相同极限. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在. $\square$.

如果 $\sum a_n$ 不是绝对收敛的，则不能通过正项级数的各种方法判断其敛散性. 如果它也不是交错的，则也不能利用 Leibniz 定理. 剩下的唯一的方法就是下面将介绍的 Abel-Dirichlet 判别法.

引理：设 $\{a_n\}\{b_n\}$ 是两个任意数列. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. 则

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n \cdot b_n.$$

证明：
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=0}^{n} S_k b_k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1} b_k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} S_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n. \quad \square.$$

Date:
Place:

Reminders

Dirichlet法

取 $a_n=(-1)^n$. 即为Leibniz定理. $\longrightarrow$

Date:
Place:

Reminders

推论: 若 b_n 单调 $\{S_n\}$ 有上界 M. 则

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| \le M(|b_0|+2|b_n|)$$

证明: $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} S_k(b_k-b_{k+1}) + S_n b_n\right|$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} |S_k||b_k-b_{k+1}| + |S_n||b_n|$$

$$\le M\left(\sum_{k=0}^{n-1} |b_k-b_{k+1}| + |b_n|\right) = M(|b_0-b_n|+|b_n|) \le M(|b_0|+2|b_n|).$$ □

定理: 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 为两数列. $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$. 若以下两组条件之一成立:

(Abel) ① $\{b_n\}$ 单调有界 ② $\lim_{n\to\infty} S_n$ 收敛.

(Dirichlet) ① $\{b_n\}$ 单调趋于0. ② $\{S_n\}$ 有界

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明: 先证Dirichlet: 设 $|S_n|\le M$. 由之前的推论

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le 2M(|b_{n+1}|+2|b_{n+p}|)$ 对 $\forall \varepsilon>0$. 取 N. 使 $n>N$ 时有

$|b_n| < \frac{\varepsilon}{7M}$. 于是 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \frac{6}{7}\varepsilon < \varepsilon$. 所以收敛.

再证Abel. 设 $\lim b_n = b$. 则 b_n-b 单调趋于0.

于是 $\{a_n\}$, $\{b_n-b\}$ 符合Dirichlet条件. 于是 $\sum a_n(b_n-b)$ 收敛.

于是 $\sum a_n b_n$ 收敛. □

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

例: ① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ $(p>0)$

取 $a_n=\cos nx$, $b_n=\frac{1}{n^p}$ b_n符合D条件. 只要看

$|S_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ 所以只要

$x\neq 2k\pi$, 原级数收敛; 若 $x=2k\pi$, 则要看 $p>1$否. □

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ $(p>0)$

仍取 $b_n=\frac{1}{n^p}$, $a_n=\sin nx$, 则

$|S_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$. 只要 $x\neq 2k\pi$ 即收敛.

而当 $x=2k\pi$ 时原级数为零. 所以也收敛. □

§3. 函数理论.

§3.1 函数极限.

设 $E\subset\mathbb{R}$. $f: E\to\mathbb{R}$. 我们这一章要研究E上的函数f的性质. 这里E可以是一个区间 (a,b), 或闭区间 $[a,b]$, 或整个$\mathbb{R}$. 还可以是其它奇怪的集合, 例如当 $E=\mathbb{N}$ 时, f就是一个数列. 特别地, 我们下面所讲的函数极限将包含数列极限作为一个特例.

Date:
Place:

Reminders

因为 x_0 是 E 的极限点 所以 $E\cap V$ 总是非空的. →

由定义知, A 是 f 的极限的必要条件是: 对 A 的任一开邻域 U, ~~$f^{-1}(U)\cap E$ 都非空~~. 这样的点可称为 f 的极限点. 当 $E=\mathbb{N}$, 这一定义也与数列极限点定义相符.

解释为: 对任意 A 的开邻域 U, $f^{-1}(U)\cap E\setminus\{x_0\}$ 非空, 且 x_0 是 $f^{-1}(U)\cap E$ 的极限点. 则称 A 是 f 在 x_0 处的极限点.

Date:
Place:

Reminders

设 $x_0\in\mathbb{R}_\infty$ 是 E 的极限点. 例如当 $E=(a,b)$ 时, x_0 可以是 $[a,b]$ 中的点. 当 $E=[a,b]$ 时, x_0 也只能是 $[a,b]$ 中的点. 当 $E=\mathbb{R}$ 时, 任意 $x_0\in\mathbb{R}_\infty$ 都可以. 当 $E=\mathbb{N}$ 时, 注意 $\mathbb{N}$ 在 $\mathbb{R}_\infty$ 中的极限点只能是 $+\infty$. 所以数列极限时我们只考虑 $n\to+\infty$ 这一种情况

$x\in\mathbb{R}_\infty$ 的一个开邻域是指一个开区间 U 满足 $x\in U$. 注意当 $x=\pm\infty$ 时, $U=(b,+\infty]$ 或 $V=[-\infty,a)$. 这是 $\mathbb{R}_\infty$ 上补充的两类开区间. x 的去心开邻域是指 $U\setminus\{x\}$. 其中 U 是 x 的一个开邻域

定义: 设 $f:E\to\mathbb{R}$. $x_0\in\mathbb{R}_\infty$ 是 E 的极限点. $A\in\mathbb{R}_\infty$ 叫 f 在 x_0 处的极限, 如果对任意 A 的开邻域 U, 存在 x_0 的去心开邻域 V 使 $f(E\cap V)\subseteq U$. 此时记 $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

变种: ① $x_0\in\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{R}$. 此时定义可改写为: 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 且 $x\in E$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

② $x_0=+\infty$, $A\in\mathbb{R}$: 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists M>0$ s.t. $\forall x>M$ 且 $x\in E$, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

③ $x_0\in\mathbb{R}$, $A=+\infty$: 对 $\forall M>0$ $\exists\delta>0$ s.t. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 且 $x\in E$ 时, 有 $f(x)>M$.

Date:
Place:
Reminders

④ $E = \mathbb{N}$. $x_0 = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > 0$. s.t. $\forall n > M$.
$|f(n) - A| < \varepsilon$. (此即数列极限).

例: ① $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. $x_0 = 0$.

注意 A 必须是 f 的极限点, 所以只可能是 1, 0, −1 三者之一. 对于 x_0 的任何去心邻域, 总有大于零和小于零的数. 所以 f 在其上的取值不可能在 1, 0, −1 的任何邻域中. 所以 f 在 x_0 处没有极限.

② $f(x) = |\mathrm{sgn}(x)| = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. 则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

因为函数极限定义中要去心, 所以 f 在 0 附近不可能取零, 于是只能取 1. 这是 f 在 x_0 处有定义, 但极限不相等的例子.

③ $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. $x_0 = 0$. 对 $\varepsilon > 0$. 取 $\delta = \varepsilon$.
当 $0 < |x - 0| < \delta$, 即 $|x| < \delta$. $x \neq 0$ 时, 有 $\left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| \le |x| < \delta = \varepsilon$.
所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

④ $f(x) = x^2$. $x_0 = 2$. 对 $\forall \varepsilon > 0$. 取 $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{5})$.
当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时 $|f(x) - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| < \delta^2 + 4\delta < \varepsilon$.
所以 $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

$\mathring{B}_\varepsilon(x_0)=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<|x-x_0|<\varepsilon\}$.

定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff$ 对任意满足如下条件的数列$\{x_n\}$

① $x_n\in E\setminus\{x_0\}$ ② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$

有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

证明. $\Rightarrow$ 对A的任意开邻域U, 存在x_0的开邻域V, 使$f(E\cap V)\subseteq U$. 对于这个V, 存在N, 使当$n>N$时有$x_n\in V$. 于是$f(x_n)\in U$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

$\Leftarrow$ 假设存在A的开邻域U, 使得对x_0的任何去心开邻域V, 都有$f(E\cap V)\not\subseteq U$. 只考虑$A, x_0\in\mathbb{R}$的情况, 设$U=B_\varepsilon(A)$ 取 ~~[illegible]~~ $V_n=\mathring{B}_{\frac{1}{n}}(x_0)$ 则在$E\cap V_n$中存在x_n, 使$f(x_n)\notin U$. 于是我们得到一个数列$\{x_n\}$满足$x_n\in E\setminus\{x_0\}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=x_0$, 但$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon$.

D.

例 ① $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. $x_0=0$.

取 $x_n=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{-1}$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$.

取 $y_n=(2n\pi-\frac{\pi}{2})^{-1}$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=-1$. 所以极限不存在.

② $D(x)=f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ 则对任意x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在. 因为总有以$x_0$为极限的有理数列(如无穷小数逼近)和无理数列(~~[illegible]~~ 两有理数之间必有一无理数)

性质: ① 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$. 则$A=B$.

② 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R}$. 则存在$x_0$的去心邻域$V$, 使

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

f 在 $V\cap E$ 上有界（即存在 M，使得对 $\forall x\in V\cap \mathring{E}$，$|f(x)|\le M$）.

③ 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$，

④ 若 $A<B$，则存在 x_0 的去心开邻域 V，使对 $\forall x\in V\cap E$ 有 $f(x)<g(x)$.

⑤ 若存在 x_0 的去心开邻域 V 使对 $\forall x\in V\cap E$ 有 $f(x)<g(x)$，则 $A\le B$.

⑥ 若存在 x_0 的去心开邻域 V，使对 $\forall x\in V\cap E$，有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，且有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

定理（A 有限时的 Cauchy 准则）. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$，存在 x_0 的去心开邻域 V，使得对 $\forall x_1, x_2\in V\cap E$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证明：$\Rightarrow$ 与数列情形相似，略.

$\Leftarrow$ ~~[illegible]~~. 只~~需~~证 x_0 有限的情形. 于是对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ 使对 $\forall x_1, x_2\in \mathring{B}_\delta(x_0)\cap E$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

对任一收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$（且满足 $x_n\in E\setminus\{x_0\}$），对于上面的 δ，可找到 N，使对 $\forall n, m>N$，有 $0<|x_n-x_0|<\delta$，$0<|x_m-x_0|<\delta$，于是 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$，所以 $\{f(x_n)\}$ 本身是 Cauchy 列，于是有极限 A. ~~[illegible]~~ 若有另一数列 $\{y_n\}$ 也满足此性质，则 $\{f(y_n)\}$ 也是 Cauchy 列，有极限 B. 则数列合 $\{x_0, y_0, x_1, y_1, \dots\}$

此条件与数列情形的条件 $x_n \in E\setminus\{x_0\}$ 是一致 →

有左极限的必要条件: x_0 不是 E 的下确界 →

有右极限的必要条件: x_0 不是 E 的上确界.

若是上确界, 则可能有左极限. 它也是 f 的极限. 下确界同理.

仍满足性质. 所以有极限 C. 任意 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 都是 $\{z_n\}$ 的子列. 所以必有 $A=B=C$. 所以任何满足性质的 x_n 给出的 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都是 A. 由前面的定理知 $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. □

定理: 设 $f: E\to\mathbb{R}$, x_0 是 E 的极限点, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.
$g: D\to E$, t_0 是 D 的极限点, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$.
且存在 t_0 的去心邻域 T, 使 $g(T)\subseteq E\setminus\{x_0\}$.
则有 $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=A$.

证明: 对 A 的任一开邻域 U, 取 x_0 的去心开邻域 V, 使 $f(V\cap E)\subseteq U$.
对 x_0 的开邻域 $V\cup\{x_0\}$ 存在 t_0 的去心开邻域 W, 使 $g(W\cap D)\subseteq (V\cup\{x_0\})\cap E$.
现在取 $S=T\cap W$. 则 S 是 t_0 的去心开邻域. 且 $g(S\cap D)\subseteq V\cap E$.
于是 $f(g(S\cap D))\subseteq U$. 所以 $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))=A$. □

例: $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$, $g(t)\equiv 0$. 于是 $\lim\limits_{t\to 0} g(t)=0$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. 但 $\lim\limits_{t\to 0} f(g(t))=1$. 所以上述定理中 $x_0\notin g(T)$ 是必须的条件.

① 定义: 设 $f: E\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ 是 E 的极限点. 对于 $A\in\mathbb{R}$, 若对任意 A 的开邻域 U, 存在 $\delta>0$ 使 $f((x_0-\delta, x_0)\cap E)\subseteq U$, 则称 A 是 f 在 x_0 处的左极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-)$. 右极限可类似定义.

此定义与前面的极限定义等价.

数列上下极限是此上下极限的特例.

② A 称为 f 在 x_0 附近的极限点，如果存在 $\{x_n\}$ 满足

$$x_n \in E\setminus\{x_0\},\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

设 F 是 f 在 x_0 处所有极限点的集合. $F^* = \sup F$. $F_* = \inf F$. 则 F^* 叫 f 在 x_0 处的上极限. F_* 叫 f 在 x_0 处的下极限.

③ 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 若在上述定义中附加条件 $x_n < x_0$ 或 $x_n > x_0$. 则可得左上极限. 左下极限. 右上极限. 右下极限等概念.

定理：① $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x) = \varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$.

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \varlimsup\limits_{x\to x_0^+} = \varliminf\limits_{x\to x_0^+} = \varlimsup\limits_{x\to x_0^-} = \varliminf\limits_{x\to x_0^-}$.

定义：$f: E \to \mathbb{R}$ 叫单调（增）的. 如果对于 $\forall x, y \in E$. $x \le y$ 有 $f(x) \le f(y)$. 类似地有单调减. 严格单调等概念.

定理：① $f: E \to \mathbb{R}$ 单调（增）. x_0 是 E 的极限点. 假设 x_0 不是 E 的上、下确界. 则 f 在 x_0 处的左右极限都存在. 且 $f(x_0-) \le f(x_0+)$.

② 使 $f(x_0-) < f(x_0+)$ 的 x_0 至多只能有可数多个.

Date:
Place:
Reminders

补性质：① $f\pm g$，$f\cdot g$，f/g

② g 在 t_0 处连续且 $g(t_0)=x_0$，f 在 x_0 处连续

则 $f\circ g$ 在 t_0 处连续

Date:
Place:
Reminders

证明：① 记 $A^-=\sup\{f(x)\mid x\in E,\ x<x_0\}$，则 $A^-=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

因为 A^- 是上确界，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$A-\varepsilon$ 不是上界，于是存在 $x_1\in E$，$x_1<x_0$，

使 $f(x_1)>A-\varepsilon$。取 $\delta=x_0-x_1$，则对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)$，

$A-\varepsilon<f(x_1)\le f(x)<\cancel{\ }A$，于是 $|f(x)-A|<\varepsilon$，所以 $A=f(x_0-)$。$f(x_0+)$ 同理。

② 对每个使 $f(x_0-)<f(x_0+)$ 的 x_0 定义一个开区间 $(f(x_0-),f(x_0+))$。

由 Souslin 性质，这样的开区间至多有可数多个。 □

§3.2 连续函数

定义：设 $f:E\to\mathbb{R}$，$x_0\in E$ 是 E 的极限点，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，

则称 f 在 x_0 处连续，称 x_0 是 f 的连续点。若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$（或 lim 不存在），

则称 f 在 x_0 处间断，称 x_0 是 f 的间断点。若 f 在 E 的每个点上连续，则称 f 在 E 上连续（E 没有孤立点）。

例：① $f(x)=c$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$，

② $f(x)=\mathrm{sgn}(x)$，$f(x)=\sin\frac{1}{x}$，$f(x)=|\mathrm{sgn}(x)|$

③ 若 f 单调，则它的间断点至多可数。

④ $f(x)=D(x)$，则它处处不连续

$f(x)=xD(x)$，则它在 $x=0$ 处连续，在 $x\neq0$ 处不连续。

Date:

Place:

Reminders

单调函数只有跳跃间断点… →

Date:

Place:

Reminders

定义：若 $f(x_0)=f(x_0-)$，则称 f 左连续，若 $f(x_0)=f(x_0+)$，则称 f 右连续。若 $f(x_0)=\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$，则称 f 在 x_0 处上半连续。若 $f(x_0)=\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$，则称 f 在 x_0 处下半连续。

例：$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}+1/2 & x>0 \\ y_0 & x=0 \\ \sin\frac{1}{x}-1/2 & x<0 \end{cases}$ 　f 在 $x_0=0$ 处的左上极限为 $\frac{1}{2}$ 左下极限为 $-3/2$

右上极限为 $\frac{3}{2}$，右下极限为 $-1/2$。所以若 $y_0=3/2$ 则右上连续。$y_0=\frac{1}{2}$，则左上连续。$y_0=-\frac{1}{2}$，则右下连续。$y_0=-\frac{3}{2}$ 则左下连续。

定义：① 若 f 在 x_0 处左右极限都存在且有限但不相等，则称 x_0 是 f 的跳跃间断点。若相等但不等于 $f(x_0)$，则称可去间断点。这两类统称第一类间断点。

② 若左右极限~~都存在~~至少有一个不存在或为无穷，则称为第二类间断点。

讨论连续函数时，一般会假设 $E=[a,b]$，我们下面也这样假设。

(有界)　　闭

定理：设 $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 在 $[a,b)$ 上有界

证明：对于 $x\in I$，f 在 x 处有有限的极限 $f(x)$。

(闭合)

推论：若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续 且 $f([a,b])\subseteq[a,b]$.
则存在 $\xi\in[a,b]$ 满足 $f(\xi)=\xi$.

证明：定义 $g(x)=f(x)-x$. 则 $g(a)=f(a)-a\geq 0$.
$g(b)=f(b)-b\leq 0$. 于是存在 ξ 使 $g(\xi)=0$. □

所以存在 $\delta_x>0$ 使 f 在 $B_{\delta_x}(x)$ 上有界 M_1. $\{B_{\delta_x}(x)\mid x\in I\}$ 构成 I 的开覆盖 于是有 $B_{\delta_1}(x_1)\cup\cdots\cup B_{\delta_n}(x_n)\supseteq I$.
取 $M=\max(M_1,\cdots,M_n)$. 则 对 $\forall x\in I$, 有 $|f(x)|<M$. □

定理(最值)：设 $f:I\to\mathbb{R}$ 连续. $M=\sup\{f(x)\mid x\in I\}$. $m=\inf$.
则存在 $x,y\in I$. 使 $f(x)=M$. $f(y)=m$.

证明：因为 M 是上确界 所以对 $\forall n\in\mathbb{N}$. 存在 $x_n\in I$. 使 $M-\frac{1}{n}<f(x_n)<M$. 由极限点定理, 必有一收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 于是 $M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})<M$. 令 $k\to\infty$, 得 $f(x)=M$. m 同理. (设 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x$) □

定理(零点或介值)：设 $f:I\to\mathbb{R}$ 连续. $M=\max\{f(x)\mid x\in I\}$. $m=\min\{f(x)\mid x\in I\}$.
对于 $\forall\, m\leq y\leq M$. 存在 $x\in I$ 使 $f(x)=y$.

证明：若 $y=m$ 或 M. 由前一定理即知 x 的存在性. 所以可假设 $m<y<M$.
设 $f(c)=m$ $f(d)=M$. 不妨设 $c<d$, 对区间 $[c,d]$ 进行二分. 若 $f(\frac{c+d}{2})=y$. 则 $\frac{c+d}{2}$ 就是所求. 若 $f(\frac{c+d}{2})<y$. 则取 $c_1=\frac{c+d}{2}$. $d_1=d$. 若 $f(\frac{c+d}{2})>y$. 则取 $c_1=c$. $d_1=\frac{c+d}{2}$. 如此继续. 则 $c_k\leq d_k$ 且 $f(c_k)<y<f(d_k)$. 若二分点x一直不满足 $f(x)=y$. 则得一无限区间套. 由区间套定理. 存在唯一的 $x\in[c_k,d_k]$ 且 $\lim_{k\to\infty}c_k=x$ $\lim_{k\to\infty}d_k=x$. 于是 由 f 的连续性得 $f(x)=\lim_{k\to\infty}f(c_k)\leq y\leq\lim_{k\to\infty}f(d_k)=f(x)$.
所以 $f(x)=y$. □

Date:
Place:
Reminders

定理：设 $f: I \to \mathbb{R}$ 连续且严格单调增，则其反函数也连续且严格单调增

证明：$I=[a,b]$，$f(a)=m$，$f(b)=M$，记 $J=[m,M]$。

对于 $\forall y \in J$，由前一定理，存在 x 使 $f(x)=y$，这个 x 一定唯一，因为若有 $x_1<x_2$，$f(x_1)$ 必小于 $f(x_2)$，所以不可能 $f(x_1)=f(x_2)=y$。

所以可定义反函数 $f^{-1}: J \to I$，$y \mapsto x$。它显然也严格单调增。下证 f^{-1} 连续。取 $y_0 \in J$，

$x_0=f^{-1}(y_0)$，对 $\forall \varepsilon>0$，设 $\delta=\min(y_0-f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)-y_0)>0$。

当 $|y-y_0|<\delta$ 时，有

$$f(x_0-\varepsilon)<y_0-\delta<y<y_0+\delta<f(x_0+\varepsilon)，于是$$

$$x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon，即 |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon。\square$$

§3.3 一致连续性

闭区间上的连续函数具有很多很好的性质，如有界性、最值、零点等。若将闭区间换成其它集合，则这些性质可能都不具备。

例：① $E=(0,1]$，$f(x)=\frac{1}{x}$，无界，无最大值

② $E=[-1,1]\setminus\{0\}$，$f(x)=x$，$f(x)=0$ 无解。

③ $E=[-\pi,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$，$f(x)=\sin x$，达不到上下确界。

Date:
Place:
Reminders

对比：$f: E\to\mathbb{R}$ 叫做连续的如果对 $\forall x\in E$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $\forall y\in E$, $|y-x|<\delta$, 有 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

区别：连续是局部性质（针对 f 和 $x\in E$）.

一致连续是整体性质（针对 f 和 E）.

③ $f(x)=\sin x$ $E=\mathbb{R}$. 则因为 $|\sin(x)-\sin(y)|<|x-y|$. 所以只需取 $\delta=\varepsilon$ 即可证明一致连续性.

以后再证.

④ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $E=(0,1]$

取 $\varepsilon_0=1$, $s_n=\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$, $t_n=(2n\pi)^{-1}$, 则

$|s_n-t_n|=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi(2n\pi+\frac{\pi}{2})}<\dfrac{1}{n^2}$, 而 $|f(s_n)-f(t_n)|=1\geq\varepsilon_0$.

所以不一致收敛.

⑤ $f(x)=\sin(x^2)$ $E=\mathbb{R}$. 则不一致连续.

取 $\varepsilon_0=1$. $s_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n^2\pi}$, $t_n=\sqrt{2n^2\pi}$ 则

$|s_n-t_n|=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n^2\pi}+\sqrt{2n^2\pi}}<\dfrac{c}{n}$. 而 $|f(s_n)-f(t_n)|=1\geq\varepsilon_0$.

Date:
Place:
Reminders

如果希望函数 $f: E\to\mathbb{R}$ 在 E 上具有好的性质. 其中 E 是比较好的集合. 我们可以要求 f 具有一种更好的连续性. 这就是一致连续性.

定义：$f: E\to\mathbb{R}$ 叫做一致连续的, 如果 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x,y\in E$, $|x-y|<\delta$, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

显然, 一致连续 $\Rightarrow$ 连续. 但反之未必.

例：① $E=[0,+\infty)$. $f(x)=\sqrt{x}$.

对 $\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=\varepsilon^2$. 则当 $|x-y|<\delta$ 时,

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\sqrt{|x-y|}<\varepsilon$. 所以 f 在 E 上一致连续.

② $E=[0,+\infty)$. $f(x)=x^2$. 取 $\varepsilon=1$. 对 $\forall\delta>0$.

~~取~~ 取 $x=\frac{1}{\delta}$. $y=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$. 则

$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{\delta^2}+1+\frac{\delta^2}{4}-\frac{1}{\delta^2}\right|=1+\frac{\delta^2}{4}>1$. 所以 f 在 E 上不一致连续.

定理（闭区间上的一致连续）若 $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ 连续, 则一致连续.

证明：对 $\forall x\in[a,b]$. 因为 f 在 x 处连续. 所以对 $\forall\varepsilon>0$.

$\exists\delta>0$ s.t. $\forall y\in B_\delta(x)$. 有 $|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是对 $\forall y_1,y_2\in B_\delta(x)$,

有 $|f(y_1)-f(y_2)|<|f(y_1)-f(x)|+|f(y_2)-f(x)|<\varepsilon$.

Date:
Place:
Reminders

Lebesgue数引理：问题1.9-1. 第二次习题课-1 →

$E=\bar{E}$ 的 E 叫闭集

一般的一致连续定理：设 $f: E\to\mathbb{R}$ 连续，且对 E 的每个极限点 x_0，$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 E 上一致连续。
证明类似列紧版和无界版，略。

Date:
Place:
Reminders

现在，对于固定的 ε，让 x 跑遍 $[a,b]$，于是得 $[a,b]$ 的开覆盖 $S=\{B_\delta(x)\mid x\in[a,b]\}$。由Lebesgue数引理，存在 $\delta>0$ 满足若 $y_1,y_2\in[a,b]$，$|y_1-y_2|<\delta$，则必有 $B_\delta(x)\in S$，使 $\{y_1,y_2\}\in B_\delta(x)$，于是 $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$。所以 f 在 $[a,b]$ 上一致连续 □

定理（列紧集上的一致连续）设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 满足 E 有界且 E 的极限点都属于 E。则 f 在 E 上连续 $\Rightarrow$ f 在 E 上一致连续

证明：用反证法。假设存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$，存在 $s_n, t_n\in E$ 满足 $|s_n-t_n|<\frac{1}{n}$，$|f(s_n)-f(t_n)|\geq\varepsilon_0$。
由于 $\{s_n\}\subseteq E$，由极限点性质，存在 $\{s_n\}$ 的子列 $\{s_{n_k}\}$ 收敛到 $s^*\in E$，于是 $|t_{n_k}-s^*|\leq|t_{n_k}-s_{n_k}|+|s_{n_k}-s^*|$
$<\frac{1}{n_k}+|s_{n_k}-s^*|<\frac{1}{k}+|s_{n_k}-s^*|$，当 $k\to\infty$ 时 $\frac{1}{k}\to0$，$|s_{n_k}-s^*|\to0$
于是 $t_{n_k}\to s^*$。~~所以 $\varepsilon_0\leq|f(s_{n_k})-f(t_{n_k})|$~~ 由 f 连续性有 $\lim_{k\to\infty}f(s_{n_k})=f(s^*)$，$\lim_{k\to\infty}f(t_{n_k})=f(s^*)$，于是
$0<\varepsilon_0\leq|f(s_{n_k})-f(t_{n_k})|=|f(s^*)-f(s^*)|=0$，矛盾 □

定理（无界区间上的一致连续性）设 $E=[a,+\infty)$，$f: E\to\mathbb{R}$ 连续，若 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 f 在 E 上一致连续

证明：设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$，对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists M>0$ 使得当
（不妨设 $M>0$）

推论：设 $\bar{E}=[a,+\infty]\in\mathbb{R}_\infty$. $\bar{f}:\bar{E}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\begin{cases} f(x) & x\neq+\infty \\ A & x=+\infty \end{cases}$

则 $\bar{f}$ 连续，一致连续，有界，能取最大最小值，有介值性质。

证明：因为在 $[a,+\infty]$ 上 极限点 区间套 有限覆盖 等性质全都成立。 □

$\bar{E}$ 叫 E 的闭包。

若 $\bar{E}$ 上连续函数 g 满足 $g|_E=f$，则 $g=\bar{f}$

$x>M$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon/2$，于是对 $\forall y_1,y_2>M$，有 $|f(y_1)-f(y_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

取 $E'=[a,M+1]$. f 在 E' 上连续，所以对上述 ε 存在 $\delta'>0$ 使得对 $\forall y_1,y_2\in E'$，$|y_1-y_2|<\delta'$，有 $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$.

最后取 $\delta=\min(\delta',1)$. 则对 $\forall y_1,y_2\in E$，$|y_1-y_2|<\delta$.

① 若 $y_1,y_2\leq 2M$. 则 $y_1,y_2\in E'$. 于是有 $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$.

② 若 $y_1>M+1$ 则 $y_2>y_1-\delta>M+1-\delta\geq M$ 所以 $y_1,y_2>M$. 于是仍有 $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$. 所以 f 在 E 上一致连续

一致连续函数的性质.

定理（有界集上的延拓）设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 有界，$f:E\to\mathbb{R}$ 一致连续，则对 E 的任意极限点 x_0，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 都存在且有限。于是，若定义 $\bar{E}=E\cup\{E\text{ 的所有极限点}\}$，则 f 可延拓为 $\bar{E}$ 上的连续函数

$$\bar{f}:\bar{E}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\bar{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in E \\ \lim\limits_{y\to x}f(y) & x\text{ 是 }E\text{ 的极限点} \end{cases}$$

证明：由一致连续性，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，使 $\forall y_1,y_2\in E$，$|y_1-y_2|<\delta_1$，有 $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$. 因为 x_0 是极限点，取 $\delta=\frac{\delta_1}{2}$，在 $B_\delta(x_0)$ 中有无限多 E 的点。任取 $y_1,y_2\in B_\delta(x_0)$ 应有 $|y_1-y_2|<|y_1-x_0|+|y_2-x_0|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$. 于是 $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$. 由有限点处的 Cauchy 准则，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且有限. □

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

推论：① ~~[illegible]~~ f在E上一致连续.

② f在E上有界 于是f在E上有界.

③ f在E上最大、最小值能取到

④ f在E上有介值性质.

证明：因为E上极限点定理成立. 所以区间套, 有限覆盖, Lebegue数等性质全都成立. 所以E上的连续函数与[a,b]上的连续函数具有相同的性质

~~[illegible] 无界集上的一致连续函数并无更好的性质(例如 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{x}$ 无界) [illegible] 除非我们再附加f在±∞处的有限性条件, 但这时都不需要一致连续性了, 因为它可以从连续性推出.~~

无界集上的一致连续函数没有太好的性质 如 $f(x)=\sqrt{x}$. $f(x)=\sin(x)$ 等. 除非 ~~[illegible]~~ 假设 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在. 但是这样一来一致连续性又太强了. 因为连续就可推出一致连续了. 所以不考虑E无界的情形. (原因是, 一致连续的定义中未考虑±∞处开集的结构. 所以对 $x\to\pm\infty$ 时 f 的行为没有很好的控制)

此处有界可改为一致连续、有最大最小值等. →

紧性刻画：设 $E \subseteq \mathbb{R}$. 则以下等价

① 任意开覆盖有有限子覆盖

② 任意开覆盖有 Lebesgue 数

③ 任意无穷子集有极限点

④ 任意数列有收敛子列

⑤ 任意连续函数有界

⑥ 任意连续函数有最大最小值

⑦ 任意连续函数一致连续

Date:
Place:
Reminders

逆命题：

定理：设 $E \subseteq \mathbb{R}$. 若 E 上的连续函数都是有界的，求证 E 是有界闭集

证明：取 $f(x)=x$. 则 f 有界 $\Rightarrow E$ 有界. 假设 x_0 是 E 的极限点，且 $x_0 \notin E$，则 $f(x)=\frac{1}{x-x_0}$ 是 E 上的连续函数，但无界，矛盾. 所以 E 的极限点都在 E 中. □

其它变种：

定理：设 $E \subseteq \mathbb{R}$. 若 E 上连续函数都有界. 求证 E 上的连续函数都有最大值最小值.

证明：设 $f: E \to \mathbb{R}$ 连续. $M=\sup\{f(x) \mid x\in E\}$, $m=\inf\{f(x)\mid x\in E\}$. 假设对 $\forall x\in E$, $f(x)\neq M$. 则定义 $g(x)=(f(x)-M)^{-1}$. 则 $g(x)$ 连续且无界，矛盾. 所以必有 $x_1, x_2 \in E$，使 $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$. □

§3.4 初等函数

① 幂函数（有理指数）

我们已经知道，多项式函数总是连续的. 特别地，对 $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$. $f(x)=x^n$ 连续，且在 $\mathbb{R}_{>0}$ $(0,+\infty)$ 上单调，于是它在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上有反函数 连续的. 记这个反函数为 $g(x)=x^{\frac{1}{n}}$. 对任何 $r=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$, $q\neq 0$. 可定义 $x^r=(x^p)^{\frac{1}{q}}: \mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$. 对于任意 $r\in\mathbb{Q}$, 可定义

由(1)可知 $E(x)=(E(\frac{x}{n}))^n$. 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>0$.

总有 n 使 $0<\frac{x}{n}<1$, 于是 $1+\frac{x}{n}<E(\frac{x}{n})<\frac{1}{1-\frac{x}{n}}$

于是 $(1+\frac{x}{n})^n<E(x)<\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}$. 令 $n\to\infty$ 得 $E(x)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$

若 $x<0$, $E(x)=E(-x)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

所以总有 $E(x)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

首先由归纳法易证 $E(0)=1$, $E(1)=e$, 于是 $E(n)=e^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$$x^r=\begin{cases} x^r & r>0\\ 1 & r=0\\ \frac{1}{x^{|r|}} & r<0\end{cases}$$

它们统称为(有理指数的)幂函数. 它们在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上连续且单调.

② 指数函数.

定理: 存在唯一的函数 $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满足

(1) $E(x+y)=E(x)E(y)$ (2) 当 $0<x<1$ 时, 有 $1+x<E(x)<\frac{1}{1-x}$.

证明: 存在性: $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 满足(1).(2).

唯一性: 首先, 若 E 满足(1). 注意 $E(x)=E(\frac{x}{2})^2$, 所以 $E(x)\geq 0$.

若有 $x\in\mathbb{R}$ 使 $E(x)=0$. 则对 $\forall y\in\mathbb{R}$ $E(y)=E(y-x)E(x)=0$. 于是 E 恒为零,

这与(2)矛盾. 所以 $E(x)>0$. 接下来, 假设 $E_1(x)$, $E_2(x)$ 都满足(1).(2).

定义 $f(x)=E_1(x)/E_2(x)$. 则 ① $f(x+y)=f(x)f(y)$. 且 ② 当 $0<x<1$ 时, 有

$1-x^2<f(x)<\frac{1}{1-x^2}$. 由① $f(x)=f(\frac{x}{n})^n$. 由② $(1-\frac{x^2}{n^2})^n<\underbrace{f(\frac{x}{n})^n}_{f(x)}<\frac{1}{(1-\frac{x^2}{n^2})^n}$

取 $n\to\infty$ 的极限可知 $f(x)=1$. 于是 $E_1=E_2$. □

性质: ① $E(x)$ 单调 ② $E(x)$ 连续 ③ $E(x)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

④ 当 $x\in\mathbb{Q}$ 时, $E(x)=e^x$.

证明: ① 当 $0<x<1$ 时 $E(x)>1+x>1$. 当 $n<x<n+1$ 时

$E(x)=E(n)E(x-n)=e^nE(x-n)>e^n>1$.

由(2)立刻知 $\lim\limits_{x\to 0} E(x) = 1 = E(0)$. 于是 E 在 $x=0$ 处连续.

所以对一切 $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $E(x) > 1$. 于是当 $x > y$ 时,

$E(x) = E(x-y)\cdot E(y) > E(y)$. 所以 E 严格单调增.

② ~~设 $\{x_n\}$ 是一串单调递减趋于零的正数列. 于是 $E(x_n)$ 也单调递减. 且有下界 $E(0)=1$. 于是有极限, 设 $a = \lim\limits_{n\to\infty} E(x_n)$~~

~~因为 E 单调, 所以在每个 $x \in \mathbb{R}$ 处有有限的左极限和右极限. 记 $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = a$. 则对任意单调递减的正数列 $\{x_n\}$, 总有 $\lim\limits_{n\to\infty} E(x_n) = a$. $\{2x_n\}$ 也是这样的数列(趋于零) 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} E(2x_n) = a$. 另一方面 $E(2x_n) = E(x_n)\cdot E(x_n)$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} E(2x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} E(x_n)E(x_n) = a^2$. 注意 $a \geq E(0) = 1$, 所以只能有 $a = 1$. 同理可证 E 在 0 处的左极限也是 1. 所以 E 在 0 处连续.~~ 接下来, 对 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$E(x_0 + y) = E(x_0)E(y)$. 所以由 E 在 $y=0$ 处的连续性可知 E 在 x_0 处的连续性. 于是 E 在所有 $x \in \mathbb{R}$ 处连续.

③ 只需证明 $E(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 满足定义中的(1)和(2).

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{xy}{n(n+xy)}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n$.

(2) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$ (Bernoulli 不等式, 或二项式定理).

$(1-x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = (1-x)\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \binom{n}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}}\right]x^k$

$= 1 - \sum\limits_{k=0}^{n+1}\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}x^k \leq 1$.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

④ 当 $x\in\mathbb{N}$ 时，已经证明 $E(x)=e^x$.

当 $x\in\mathbb{Z}$ 时，若 $x<0$，由 $E(x)\cdot E(-x)=E(0)=1$ 可知 $E(x)=e^{-|x|}=e^x$.

若 $x=p/q$，$p\in\mathbb{Z}$，$q\in\mathbb{N}$，$q\neq 0$. $(E(x))^q=E(qx)=E(p)=e^p$

于是 $E(x)=(e^p)^{\frac{1}{q}}=e^x$. □.

② 对数函数

定理：存在唯一的函数 $L:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ 满足

(1) $L(x\cdot y)=L(x)+L(y)$. (2) 当 $1<x<e$ 时，$1-\frac{1}{x}<L(x)<x-1$.

证明：若取 L 为 E 的反函数，易知 L 满足(1)(2)，所以 L 的确存在.

若 L 满足(1)(2)，对任意 $x>1$，总存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $1<x^{\frac{1}{n}}<e$. 于是

$L(x)=nL(x^{\frac{1}{n}})>n(1-\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}})>0$. 于是当 $x>y$ 时，

$L(x)=L(y)+L(\frac{x}{y})>L(y)$. 所以 L 严格单调增，于是有反函数 F.

易证 F 满足 E 的两条性质，于是 F 一定就是 E. 这就证明了唯一性. □

性质：① $L(x)$ 单调 ② $L(x)$ 连续. ③ $L(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n(x^{\frac{1}{n}}-1)$.

④ 当 $x=e^r$ ($r\in\mathbb{Q}$) 时，$L(x)=r$.

证明：① 已证. ② 由单调连续函数的反函数亦连续可知. ④ 因为 L 是 E 的反函数. 下证③，只需证 $L(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n(x^{\frac{1}{n}}-1)$ 满足定义中的(1)(2).

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n((xy)^{\frac{1}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n(x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n(x^{\frac{1}{n}}-1)\cdot y^{\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}n(y^{\frac{1}{n}}-1)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n(x^{\frac{1}{n}}-1)+\lim\limits_{n\to\infty}n(y^{\frac{1}{n}}-1)$.

$\Rightarrow$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, $E(x)=e^x$. $L(e^x)=x$. $\Rightarrow$

例: ① $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to+\infty}E(x\log(1+\frac{1}{x}))$

因为 E 连续, 只要求出 $\lim\limits_{x\to\infty}x\log(1+\frac{1}{x})=A$ 则 上述极限 $=E(A)$

设 $n\le x<n+1$. 则 $1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+2}<\log(1+\frac{1}{n+1})<\log(1+\frac{1}{x})<\log(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

$\frac{n}{n+2}<x\log(1+\frac{1}{x})<\frac{n+1}{n}$ 当 $x\to+\infty$ 时 $n\to+\infty$, 于是有 $\frac{n+1}{n}\to1$

$\frac{n}{n+2}\to1$. 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\log(1+\frac{1}{x})=1$. 于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

② $\lim\limits_{x\to0}\frac{L(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}L((1+\frac{1}{x})^x)=L(\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x)=L(e)=1$.

③ $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$ 设 $a^x-1=t$. $x=\frac{L(1+t)}{L(a)}$, 于是

$\frac{a^x-1}{x}=\frac{t}{L(1+t)}L(a)\to L(a)$. $t\to0$.

④ $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{E(\alpha L(1+x))-1}{\alpha L(1+x)}\cdot\frac{L(1+x)}{x}\cdot\alpha=\alpha$.

(2) 取 $x=1+y$. 则 $n(x^{\frac{1}{n}}-1)<x-1\Leftrightarrow(1+\frac{y}{n})^n>1+y$.

取 $x=\frac{1}{1-y}$. 则 $n(x^{\frac{1}{n}}-1)>1-\frac{1}{x}\Leftrightarrow(1+\frac{y}{n})^n<\frac{1}{1-y}$. □

③ 幂函数 (一般指数).

对任意的 $\mu\in\mathbb{R}$. 定义 $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$. $x\mapsto E(\mu L(x))$,

则它满足 $f(x)\cdot f(y)=f(x\cdot y)$. (2) 当 $\mu\in\mathbb{Q}$ 时 $f(x)=x^\mu$.

④ 三角函数.

定理: 存在唯一的一对函数 C. $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足

(1) $C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y)$. $S(x+y)=S(x)C(y)+S(y)C(x)$. $C(x)^2+S(x)^2=1$.

(2) 当 $0<x<1$ 时 $0<xC(x)<S(x)<x$.

证明: 存在性: $C(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$. $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

(1) 已证 (作业题), (2) 可将相邻的错项合并得正项级数然后比较.

唯一性需要用导数才可较方便地证明, 所以以后再说. □

性质: ① $C(0)=1$. $S(0)=0$, $C(x)$ 偶. $S(x)$ 奇. 所有三角恒等式...

② 在 $(-1,1)$ 上 $S(x)$ 单调增. $C(x)>0$.

③ $C(x)$, $S(x)$ 连续.

④ $\lim\limits_{x\to0}\frac{S(x)}{x}=1$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-C(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Date:
Place:
Reminders

例：设 $a_1 \cdots a_n > 0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = E\left(\lim_{x\to 0}\frac{L\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)}{x}\right)$$

$$= E\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}L\left(1+\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)\right)$$

$$= E\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}L\left(1+\frac{L(a_1)+\cdots+L(a_n)}{n}\cdot x+o(x^2)\right)\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\left(L(a_1)+\cdots+L(a_n)\right)\right) = (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

例 $|S(x)-S(y)| \le |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

证明：$|S(x)-S(y)| = \left|2S\left(\frac{x-y}{2}\right)C\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \le 2\left|S\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \le |x-y|$. □

$S(x) = S_9(x) - \frac{x^{11}}{11!}\left(1-\frac{x^2}{12\cdot 13}\right) - \frac{x^{15}}{15!}\left(1-\frac{x^2}{16\cdot 17}\right) - \cdots$

$< S_9(x)$

$S(p_1+p_2) = S(p_1)C(p_2) + S(p_2)C(p_1) = 0$.

Date:
Place:
Reminders

① 证明：取 $x=y=0 \Rightarrow C(0)=C(0)^2-S(0)^2$. $S(0)=2S(0)C(0)$. $C(0)^2+S(0)^2=1$

$\Rightarrow C(0)=1$. $S(0)=0$. 取 $y=-x$ 得 $\begin{cases} C(x)C(y)-S(x)S(y)=1 \\ S(x)C(y)+C(x)S(y)=0. \end{cases}$

解之得 $C(y)=C(x)$. $S(y)=-S(x)$.

② $C(x)>0$ 由条件(2)易得. 由三角恒等式可知（这里用到当 $0<x<1$ 时 $S(x)>0$）

$S(x)-S(y)=2S\left(\frac{x-y}{2}\right)C\left(\frac{x+y}{2}\right)$. 所以当 $x>y$ 时 $S(x)>S(y)$.

③ 取 $x=y$. $C(2x)=C^2(x)-S^2(x)$. $S(2x)=2S(x)C(x)$. 令 $x\to 0^+$. 得

$C(0+)=C(0+)^2-S^2(0+)$, $S(0+)=2S(0+)C(0+)$ ~~$\Rightarrow C(0+)=1$. $S(0+)=$~~ $C^2(0+)+S^2(0+)=2$

$\Rightarrow C(0+)=1$. $S(0+)=0$. 同理可得 $C(0-)=1$. $S(0-)=0$. 于是 C, S 在 $x=0$ 处连续.

$C(x_0+y)=C(x_0)C(y)-S(x_0)S(y) \Rightarrow C$ 在 x_0 处连续. S 同理.

④ $\frac{S(x)}{x}$ 偶. 所以不妨设 $x>0$. 当 $0<x<1$ 时 $C(x)<\frac{S(x)}{x}<1$. 令 $x\to 0$.

$C(x)\to 1$. 于是 $\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}=1$. $1-C(x)=2S^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{1-C(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{S(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2}$. □

引理：① 设 $S_9(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$ 则当 $0<x\le 4$ 时,

$S(x)<S_9(x)$. 且 $S_9(4)=-\frac{268}{405}$. 于是 $S(4)<0$. 于是在 $(0,4)$ 中存在 p_0

使得 $S(p_0)=0$.

② 设 Z 是 S 的所有零点组成的集合. 则 $0\in Z$. $p_0\in Z$.

且对 $\forall p_1, p_2\in Z$. 有 $p_1+p_2\in Z$. $\forall p\in Z$. $-p\in Z$.

③

学过导数后可证明更多性质. 此处暂停.

Date: Place: Reminders

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$.

则称 f, g 为等价无穷小. 0→∞ 小→大.

若 $x\to x_0$ $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 则记 $f=o(g)$.

若存在 x_0 的去心邻域 U, 以及常数 C 使 $\forall x\in U$.

$|f(x)|\le C|g(x)|$ 则记 $f=O(g)$.

g 常取为 x^μ, $E(x)$, $L(x)$ 等.

① 有限覆盖 $[a,b]$

② 介值定理 $([a,b])$

③ 一致连续 $([a,b])$

④ Cauchy 准则 (函数)

③ 若 f 在每个 $x_0\in E$ 上可导, 则可定义 $f': E\to\mathbb{R}$, $x_0\mapsto f'(x_0)$

f' 称为 f 的导函数.

Date: Place: Reminders

阶的比较:

① $\lim_{x\to\infty}\frac{x^\mu}{E(x)}=0$. 对 $\forall x>0$ 存在 $n\le x<n+1 \Rightarrow e^n\le E(x)<e^{n+1}$

记 $a_n=\frac{(n+1)^\mu}{e^n}=\frac{(1+\frac{1}{n})^\mu}{e}a_{n-1}$

$\Rightarrow 0<\frac{x^\mu}{E(x)}<\frac{(n+1)^\mu}{e^n}$ 当 n 充分大时 $\frac{(1+\frac{1}{n})^\mu}{e}<\frac{1}{2}$

于是 $a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n$. 所以 $a_n\to 0$. 于是 $\lim\frac{x^\mu}{E(x)}=0$.

② $\lim_{x\to\infty}\frac{\log^\mu x}{x}=0$. ① 取 $y=E(x)$ 即可.

③ $\lim_{x\to 0}x^\alpha|\log x|^\beta=0$. ② 取 $y=\frac{1}{x}$ 即可.

④ $\lim_{x\to\infty}\frac{L^\beta(x)}{E^\alpha(x)}=0$. ② 取 $x=L(y)$.

§3.5 导数.

~~商定 $x_0\in E \Leftrightarrow x_0$ 是 E 的极限点~~

① 定义: 设 $E\subseteq\mathbb{R}$, ~~$x_0\in E$ 且 x_0 是 E 的极限点~~, $f:E\to\mathbb{R}$.

若极限 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在且有限, 则称它为 f 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}$. ${}^+D$, ${}_-D$, D^+, D_-: Dini 导数.

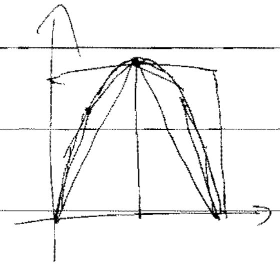
② 类似函数极限, 我们可定义左导数, 右导数 $f'_-(x_0)$ $f'_+(x_0)$ ~~上导数, 下导数 $D^+f(x_0)$ $D_-f(x_0)$~~.

命题: 若 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

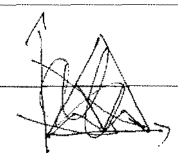
证明: 若 $f'(x_0)$ 存在, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. 对于 $x\in E$,

阿基米德的抛物线.

$f(x)=4x(1-x)$

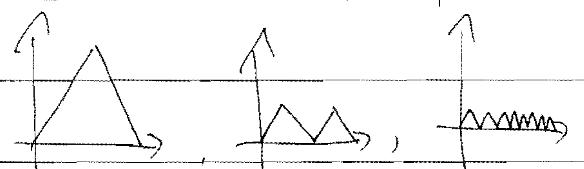


$=f_1(x)+f_2(x)+\cdots$ 其中



$f_1(x)=1-|2x-1|.$

$f_{n+1}(x)=\frac{1}{4}f_n(|2x-1|).\quad n=2,3,\ldots$



若将 $\frac{1}{4}$ 换成更大的 $q<1$. 则 f 可以处处连续且不可导

$|x-x_0|<\delta$ 时有 $-f(x_0)(x-x_0)<f(x)-f(x_0)<f'(x_0)(x-x_0)$ $(x\neq x_0)$. 两边令 $x\to x_0$ 得 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. □

例: $f(x)=|x|$. $x_0=0$. $f'(x_0-)=-1$. $f'(x_0+)=1$.
所以 f 在 x_0 处不可导. 另一方面 f 在 x_0 处连续.

例: ① $f(x)=c$. 则 $f'(x)=0$.

~~② $f(x)=x^\mu$. 则 $f'(x)=\mu x^{\mu-1}$~~

② $f(x)=\exp(x)$. 则 $f'(x)=f(x)$.

③ $f(x)=\log(x)$. 则 $f'(x)=\frac{1}{x}$.

④ $f(x)=x^\mu$. 则 $f'(x)=\mu x^{\mu-1}$.

⑤ $f(x)=\sin(x)$. $f'(x)=\cos x$

$f(x)=\cos x$. $f'(x)=-\sin x$.

定理: 设 $f,g: E\to\mathbb{R}$ 在 $x_0\in E$ 可导. 则
$f\pm g$ $f\cdot g$ f/g $(g\neq 0)$ 也可导. 且有
① $(f\pm g)'=f'\pm g'$. ② $(f\cdot g)'=f'g+fg'$. ③ $(f/g)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

证明: 只证 ② ③

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\ \square$$

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

定理(链式法则) 设 φ 在 t_0 处可导 $\varphi(t_0)=x_0$. f 在 x_0 处可导

则 $f\circ\varphi$ 在 t_0 处可导且有 $(f\circ\varphi)'(t_0)=f'(\varphi(t_0))\cdot\varphi'(t_0)$

证明：定义辅助函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x\neq x_0\\ f'(x_0) & x=x_0\end{cases}$

则 g 连续. 于是 $\dfrac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0}=g(\varphi(t))\dfrac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}$. 再取 $t\to t_0$ 的极限即可. □

定理(反函数求导) 设 $f: E\to\mathbb{R}$ 严格单调且连续.

于是有 $f^{-1}: f(E)\to\mathbb{R}$. 设 f 在 $x_0\in E$ 可导. 则 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$

处也可导. 且有 $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

证明：$f(f^{-1}(y_0))=y_0$. 两边对 y 求导得

$$f'(f^{-1}(y_0))\cdot(f^{-1})'(y_0)=1. \qquad \square$$

例：① $(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

② $(\cos(x^2))'=-\sin(x^2)\cdot(2x)=-2x\sin(x^2)$.

③ $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

④ $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sin'(\arcsin(x))}=\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

⑤ $(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$.

⑥ $f(x) = (u(x))^{v(x)} = \exp(v(x)\log u(x))$.

$f'(x) = \exp(v(x)\log u(x)) \cdot \left(v'(x)\log u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

$= u^v\left(v'\log u + v\cdot\frac{u'}{u}\right)$.

定义：设 $f: E\to\mathbb{R}$ 处处可导，于是可定义 $f': E\to\mathbb{R}$.

若 f' 也处处可导，则可定义 f' 的导数为 $f'': E\to\mathbb{R}$，称为 f 的二阶导数。

一般地，记 f 的 k 阶导数为 $f^{(k)}$，则可定义 $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ (f 的 $k+1$ 阶导数).

例：① $(e^x)^{(k)} = e^x$. ② $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$.

③ $f(x) = \begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $\quad f''(x) = \begin{cases} 12x^2\sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

$f'(x) = \begin{cases} 4x^3\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $\quad f'''$ 在零点不存在，因为 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续.

(Leibniz)

定理：$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

证明：$n=1$ 时显然，假设 n 时成立，考虑 $n+1$ 阶导数

$(f\cdot g)^{(n+1)} = \left((f\cdot g)^{(n)}\right)' = \left(f\cdot g^{(n)} + \binom{n}{1}f'g^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1}f^{(n-1)}g' + f^{(n)}g\right)'$

$= f\cdot g^{(n+1)} + \left(\binom{n}{1}+1\right)f'g^{(n)} + \left(\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\right)f''g^{(n-1)} + \cdots + \left(\binom{n}{n-1}+1\right)f^{(n)}g' + f^{(n+1)}g$ □

Date:
Place:
Reminders

$2=2+2\times 0=0+2\times 1$. $(k_1,k_2)=(2,0),(0,1)$ →

一般公式: →

$$(f^{-1})^{(n)}=\sum_{\substack{0\le k_2,\cdots,k_n\le n-1\\ k_2+2k_3+\cdots+(n-1)k_n=n-1}}(-1)^{k_2+\cdots+k_n}\frac{(n+k_2+\cdots+k_n-1)!}{k_2!\,(2!)^{k_2}\cdots k_n!\,(n!)^{k_n}}(f')^{-(n+k_2+\cdots+k_n)}(f'')^{k_2}\cdots(f^{(n)})^{k_n}.$$

Date:
Place:
Reminders

定理* (Faa di Bruno)

$$\left(f(g(x))\right)^{(n)}=\sum_{\substack{0\le k_1,\cdots,k_n\le n\\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}f^{(k_1+\cdots+k_n)}(g(x))\left(\frac{g'(x)}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{g^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n}.$$

例 $$\left(f(g(x))\right)''=\frac{2!}{2!\,0!}f''(g(x))\cdot\left(\frac{g'(x)}{1}\right)^2+\frac{2!}{0!\,1!}f'(g(x))\cdot\left(\frac{g''(x)}{2!}\right)$$
$$=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))\,g''(x).$$

$$\left(f(g(x))\right)'''=f'''(g(x))\,(g'(x))^3+3f''(g(x))\,g'(x)g''(x)+f'(g(x))\,g'''(x).$$

定理(反函数高阶导数) $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. 记 $f'(f^{-1}(y))=f_x$, $f''(f^{-1}(y))=f_{xx}$, $\cdots$, 则

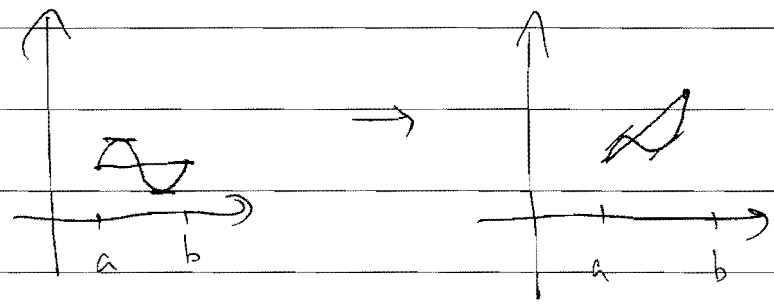
$(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f_x}$. $(f^{-1})^{(k+1)}=\dfrac{1}{f_x}\dfrac{d}{dx}\left((f^{-1})^{(k)}\right)$.

$\Rightarrow (f^{-1})''=-\dfrac{f_{xx}}{f_x^3}$, $(f^{-1})'''=-\dfrac{f_{xxx}f_x-3f_{xx}^2}{f_x^5}$,

$$(f^{-1})^{(4)}=-\frac{f_{xxxx}}{f_x^5}+10\frac{f_{xx}f_{xxx}}{f_x^6}-15\frac{f_{xx}^3}{f_x^7},\ \cdots$$

§3.6 中值定理

定理(Fermat) 若 x_0 是 f 的极值点, 且 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f'(x_0)=0$.



Date:
Place:
Reminders

证明：不妨设 x_0 是极大值点，于是在 x_0 的~~邻~~邻域 U 内，有 $f(x) \le f(x_0)$。当 $x < x_0$ 时，有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$。当 $x > x_0$ 时有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$。于是 ~~左导数~~ $f'(x_0-) \ge 0$。~~右导数~~ $f'(x_0+) \le 0$。因为它们都等于 $f'(x_0)$，所以 $f'(x_0)=0$。 □

定义：若 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 是 f 的驻点。

例 $f(x)=x^3$。$x=0$ 是驻点，但不是极值点。

定理 (Rolle)：设 $f \in C[a,b]$，f 在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

证明：设 f 在 $[a,b]$ 上最小值为 m，最大值为 M。若 $m=M$，则 f 恒为常数，于是 $f'(x)=0$ 对 $\forall x \in (a,b)$。若 $m<M$，注意 $f(a)=f(b)$，所以 m 和 M 中至少有一个是在 $[a,b]$ 的内点 ξ 上取到的。在 ξ 处有 $f'(\xi)=0$。 □

定理 (Lagrange) 设 $f \in C[a,b]$，f 在 (a,b) 上可导，则存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

证明：定义 $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

则 $g(a)=0$，$g(b)=0$，于是存在 $\xi \in (a,b)$，使 $g'(\xi)=0$。即 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。 □

三角函数唯一性：假设方程有两组解 (C_1, S_1), (C_2, S_2)，

定义 $f(x) = C_1(x)S_2(x) - C_2(x)S_1(x)$，则有

$$f'(x) = C_1'S_2 + C_1S_2' - C_2'S_1 - C_2S_1' = -S_1S_2 + C_1C_2 + S_2S_1 - C_2C_1 = 0.$$

而 $f(0)=0$，于是 $C_1S_2 = C_2S_1$. 另一方面，设 $g(x) = C_1(x)C_2(x) + S_1(x)S_2(x)$，

则 $g'(x)=0$. $g(0)=1$，于是 $C_1C_2 + S_1S_2 = 1$. 解线性方程组得

$C_1 = C_2$, $S_1 = S_2$. □

定理(Cauchy) 设 $f, g \in C[a,b]$，且 f, g 在 (a,b) 上可导。

若对 $\forall x \in (a,b)$ $g'(x) \neq 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明：因为 $g'(x) \neq 0$，所以 $g(a) \neq g(b)$. 定义

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$ 则 $h(a) = 0$，$h(b) = 0$

于是有 $\xi \in (a,b)$，使 $h'(\xi) = 0$. □

例：① 若 f 在 E 上可导，且 f' 在 E 上有界，则 f 在 E 上一致连续

证明：对于 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$，使

$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$，于是

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ 即可. □

$\Rightarrow$ $\sin x$, $\arctan x$ 等在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

② f 在 (a,b) 上是常数 $\Leftrightarrow$ f' 恒为零.

证明：$\Rightarrow$ 显然. $\Leftarrow$. 若 $f' \equiv 0$，假设有 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 使

$f(x_1) \neq f(x_2)$，则存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2} \neq 0$. □

定理(Darboux) 设 f 在 $[a,b]$ 上可导，则

i) 对于一切 $\gamma \in [f'(a), f'(b)]$（或 $[f'(b), f'(a)]$），存在 $\xi \in (a,b)$

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

使 $f'(\xi)=\gamma$.

ii) f' 无第一类间断点.

证明: i) 先证 若 $f'(a)<0$, $f'(b)>0$, 则存在 ξ 使 $f'(\xi)=0$.

$f'(a)<0$ 说明存在 $\delta>0$ 使 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 $(a, a+\delta)$ 上小于零,

于是 $f(x)<f(a)$. 所以 $f(a)$ 不是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值. 同理 $f(b)$

也不是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值. 设最小值在 $\xi\in(a,b)$ 处取到, 则 $f'(\xi)=0$

现在对任意的 $f'(a)<f'(b)$, 以及 $f'(a)<\gamma<f'(b)$. 定义 $g(x)=f(x)-\gamma x$

则 $g'(a)<0$, $g'(b)>0$. 于是存在 ξ 使 $g'(\xi)=f'(\xi)-\gamma=0$.

~~ii) 假设 f' 在 x_0 处左右极限都存在, 对于 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 总有~~

~~$f'(x_0+)-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<f'(x_0+)+\varepsilon$, 于是有~~

ii) 假设 f' 在 x_0 处的左右极限都存在, 由 f 在 x_0 处可导知

$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. 取一从右方趋向于 x_0 的数列

x_n. 由 L 中值定理 存在 $x_0<y_n<x_n$. 满足 $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(y_n)$.

于是 $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lim\limits_{n\to\infty}f'(y_n)=f'(x_0+)$.

同理可证 $f'(x_0)=f'(x_0-)$. 于是 f' 在 x_0 处必连续 □.

推论: $\mathrm{sgn}(x)$, $D(x)$ 等一定不是任何函数的导数.

Date:
Place:
Reminders

单调减 $\Leftrightarrow f'(x) \le 0$. →

Date:
Place:
Reminders

§3.7 导数的应用.

一、单调性.

定理. 设 $f \in C[a,b]$, f在(a,b)上可导. 则f在$[a,b]$上单调增 $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0$, $\forall x \in (a,b)$.

证明: 若单调增. 则对$\forall x_0 \in (a,b)$. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$ 对$\forall x \in (a,b)$

所以有$f'(x_0) \ge 0$. 反之. 若 $f'(x) \ge 0$ $\forall x \in (a,b)$成立. 对于 $x_1, x_2 \in [a,b]$

不妨设 $x_1 \le x_2$. 则有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \ge 0$. 于是 $f(x_2) \ge f(x_1)$. 所以单调增. □

推论1 条件同上. 若 $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$. 则f严格单调.

例: $f(x) = x^3$. f严格单调. 但$f'(0) = 0$.

推论2: $f \in C[a,b]$. 在(a,b)上除有限个点外 (在这些点处, 可能不可导 也可能导数为零) (不可能负) 有正的导数. 则f在(a,b)上严格单调.

证明: 设 $x_1, \cdots, x_n \in (a,b)$. 且 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$. 且当 $x \in (a,b) \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$ 时, $f'(x) > 0$. 于是 f在 $[a,x_1], [x_1,x_2], \cdots,$ $[x_n,b]$上严格单调. 于是f在$[a,b]$上严格单调 □.

定理: 设 $f \in C[a,b]$. f在(a,b)上可导. 则f在$[a,b]$上严格单调增

$\Leftrightarrow$ i) $f'(x) \ge 0$, $\forall x \in (a,b)$. ii) f在(a,b)的任何开子区间上不恒为零.

Date: ....
Place: ....
Reminders

证明：$\Rightarrow$ 若有 $(c,d)\subseteq(a,b)$，使 f' 在 (c,d) 上恒为零，则 f 在 (c,d) 上为常数，与严格单调矛盾。

$\Leftarrow$ 若存在 $x_1, x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则对 $\forall x\in[x_1,x_2]$，$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\Rightarrow f(x)=f(x_1)$，所以在 (x_1,x_2) 上有 $f'(x)\equiv 0$，与条件矛盾。 □

例1（三角函数的零点、正负区间、单调区间、周期、π 的定义）

① $S(x)$ 在 $\mathbb{R}_{>0}=(0,+\infty)$ 上至少有一个零点。

② 若 $S(p_1)=0$，$S(p_2)=0$，则 $S(p_1+p_2)=0$，$S(-p_1)=0$。

③ S 的正根中有一个最小的，记为 p。

④ S 的全部根为 np，$n\in\mathbb{Z}$。

⑤ $C(p)=-1$，$C(\frac{p}{2})=0$。

⑥ C 的全部根为 $(n+\frac{1}{2})p$，$n\in\mathbb{Z}$。

⑦ C，S 都以 $2p$ 为最小正周期。

⑧ 各种诱导公式（略）

⑨ C，S 的单调区间（略）

⑩ C，S 的反函数（略）。

证明：① 假设对 $\forall x>0$，$S(x)>0$。（注意 ~~$S(\ )=0$~~ 当 $0<x<1$ 时，$S(x)>0$，所以若有一个 y 使 $S(y)<0$，则由介值定理一定有 $S(z)=0$）。则对 $\forall x>0$，$C(x)>0$。（因为若 $C(x_0)=0$，则 $S(2x_0)=2S(x_0)C(x_0)=0$。若 $C(y)<0$，注意 $C(0)=2>0$，则一定有 $C(y)=0$）。注意 $S'=C$

此处可用中值定理：任取 $x<y$，则

$\frac{C(x)-C(y)}{y-x}=S(\xi)>S(x)$，于是 $S(x)\le\frac{2}{y-x}$，令 $y\to\infty$ 则有 $S(x)=0$，矛盾。

$C'=-S$，所以 S 单调增（且有上界 1），C 单调减且有下界 0，于是 $A=\lim_{x\to\infty}S(x)$，$B=\lim_{x\to\infty}C(x)$ 都存在，于是

$A=\lim_{x\to\infty}S(2x)=2AB$，$B=\lim_{x\to\infty}C(2x)=B^2-A^2$。

由此解得 $A=0$，$B=0$ 或 1，但 $A\ge S(\frac{1}{2})>0$，矛盾。

② 显然。③ 设 $Z=\{x\in\mathbb{R}_{>0}\mid S(x)=0\}$，则 Z 有下界（比如 $\frac{1}{2}$），

Z 非空（由①），于是 Z 有下确界 $p=\inf(Z)$，由连续性知 $S(p)=0$，

于是 $p=\min Z$。④ 设 $S(q)=0$，不妨设 $q>0$。若 q 不是 p 的整数倍，则存在 n，使 $np<q<(n+1)p$，于是 $p'=q-np$ 是比 p 小的正根，这与 p 最小矛盾。⑤ $C(p)^2=1-S(p)^2=1$，所以 $C(p)=\pm1$。

若 $C(p)=1$，则 $S^2(\frac{p}{2})=\frac{1-C(p)}{2}=0$，于是 $\frac{p}{2}$ 是 S 的根，这与 p 最小矛盾。

所以 $C(p)=-1$，于是 $C^2(\frac{p}{2})=\frac{1+C(p)}{2}=0$，所以 $C(\frac{p}{2})=0$。⑥ 由

$C(\frac{p}{2})=0$ 可知 $S(\frac{p}{2})=1$（$S(\frac{p}{2})\ne-1$，因为这将导致 $[\frac{1}{2},\frac{p}{2}]$ 之间存在一个 S 的根）

由 $S(z+\frac{p}{2})=S(z)C(\frac{p}{2})+C(z)S(\frac{p}{2})=C(z)$ 知，z 是 C 的零点当且仅当 $z+\frac{p}{2}=np$。

⑦ $2p$ 是周期不必证明。若 $S(x+2q)=S(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$，则

$S(x+2q)-S(x)=2S(q)C(x+q)$，因为 $C(x+q)$ 不恒为零，所以 $S(q)=0$，

于是 q 是 p 的正整数倍。 □

2. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$。

证明：首先定义 $f(x)=x-\sin x$，则 $f(0)=0$，$f'(x)=1-\cos x$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $f'(x)>0$，于是 f 单调增（严格），所以 $f(x)>f(0)$，即 $x>\sin x$。

Date: ~~W~~ Lambert W 函数

Place:

Reminders

例：$f(y)=ye^{y}$　$f'(y)=ye^{y}+e^{y}$

$\Rightarrow$ 当 $y\geq -1$ 时 f 单调，于是有反函数，记为 $y=W(x)$，

它由方程 $x=W(x)e^{W(x)}$ 确定，且 $W(-\frac{1}{e})=-1$，于是其定义域为 $[-\frac{1}{e},+\infty)$，$W(0)=0$，0 是其唯一零点。

$W'(x)=\dfrac{1}{x}\dfrac{W(x)}{1+W(x)}$，$W''=-\dfrac{W^2(x)(2+W(x))}{x^2(1+W(x))^3}$

这是一个很有用的函数。

Date:

Place:

Reminders

其次，定义 $g(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x} & 0<x\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 则 $g(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$.

$g'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$，所以 $g(x)<g(\frac{\pi}{2})$ 即 $\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{2}{\pi}$. □

二、极值

引理：设 $f\in C[a,b]$，$x_0\in(a,b)$，若存在 $\delta>0$，使得 f' 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上 >0，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上 <0，则 x_0 是 f 的一个严格极大值，即对 $\forall x\in\mathring{B}_\delta(x_0)$，$f(x)<f(x_0)$。（将不等号反号则得严格极小的版本）

证明：f 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上严格增，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上严格减，所以…… □

定理：设 $f\in C(a,b)$，$x_0\in(a,b)$ 是 f 的驻点，设 $f''(x_0)$ 存在。

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值。

(2) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极小值。

证明：只证(1)。注意 $f'(x_0)=0$，于是

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}$$ 所以存在 δ，使得当

$x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，所以是极大。□

以后再说。

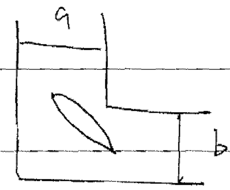
若 $f''(x_0)=0$，则无法确定，此时可进一步考虑更高阶的导数。

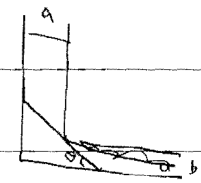
~~若~~

算法：$f:[a,b]\to\mathbb{R}$，二阶可导，求最值。

① 找 $f'(x)=0$ 的根，得驻点 $x_1,\cdots,x_n$。

河道拐弯问题.





$$l(\theta)=\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}$$

$$l'(\theta)=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}(a\sin^3\theta-b\cos^3\theta)$$

$$\Rightarrow \theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

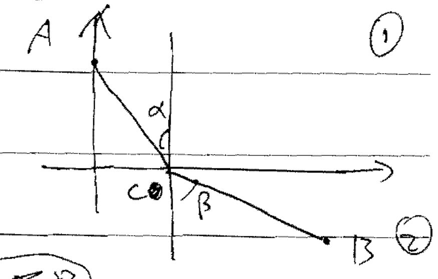
$$\Rightarrow l(\theta)=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

② 计算 $f''(x_i)$, 判断其类型.

③ 计算 $f(x_i)$, $f(a)$, $f(b)$ 找出最值

~~例: $f(x)=(x-1)(x-2)^2$ $(a,b)=$~~

(折射定律)



例: 设有两种均匀介质 ① ②
光在其中的速度分别为 v_1 和 v_2.
一束光从图中A点至B点. 问
当光束所花时间最短时 α, β 之满足什么关系.

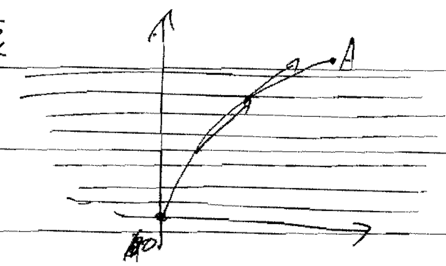
解: 设 $A=(0,h)$, $B=(d,-k)$, $C=(x,0)$. 则

$$T(x)=\frac{1}{v_1}\sqrt{h^2+x^2}+\frac{1}{v_2}\sqrt{k^2+(d-x)^2} \quad x\in[0,d].$$

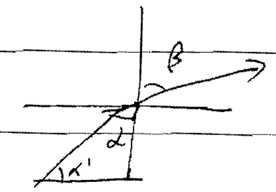
$$T'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{d-x}{v_2\sqrt{k^2+(d-x)^2}}, \text{ 即 } \frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}. \ \square$$

重力

(最速降线). 求从O到A用时最短的轨道. 将動场想象为不均匀的介质. 其中速度与高度有关
$v=\sqrt{2gy}$. 由折射定律



$$\frac{\sin\alpha(x)}{v(y(x))}=\frac{\sin\alpha(x+h)}{v(y(x+h))}$$ 其中 $\sin^2\alpha=1+(y')^2$.



得 $(1+(y')^2)(2gy)=C$

Date: ....
Place: ....

Reminders

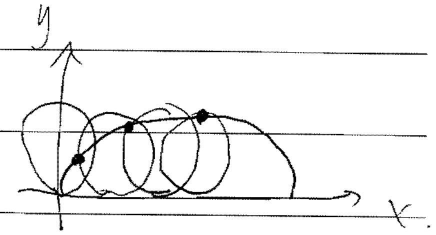
Date: ....
Place: ....

Reminders

不妨设 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时 $y=D$. 则有 $(y')^2+1=\frac{D}{y}$.

解之得参数方程形式的解

$$\begin{cases} x(t)=\frac{D}{2}(t-\sin t) \\ y(t)=\frac{D}{2}(1-\cos t) \end{cases}$$ 即摆线.

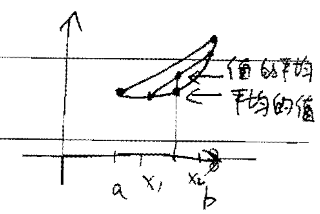


三 凸性

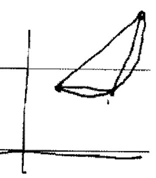
定义 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 若对 $\forall x, y\in[a,b]$ $\forall\lambda\in(0,1)$. 有

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上凸. 若当 $x\neq y$. 时总有不等号成立. 则称 f 严格凸.



定理. f 在 $[a,b)$ 上凸当且仅当 对 $\forall(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$, 以及 $\forall x\in(x_1,x_2)$, 有 $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.



f 严格凸 $\Leftrightarrow$ 上述不等号是严格的.

证明: 记 $\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. 则 $0<\lambda<1$. 若 f 凸. 则有

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)=f\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2\right)=f(x)$$

$$\le\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$ 整理得

所求. □

反之同理.

先证⑤ (在①后) →

$$f'_+(a) \le \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2} \le f'_-(b)$$

于是存在 M 使 $|f(x_2)-f(x_1)| \le M|x_2-x_1|$ 于是连续

③ 若 f'_+ 左连续 则 →

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} f'_+(x) \le f'_-(x_0) \le f'_+(x_0).$$ 于是 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

所以可导.

f'_- 右连续时同理.

定理 设 f 在 $I=[a,b]$ 上凸. 则

① f'_+ 和 f'_- 存在且单调递增. 且 $f'_- \le f'_+$

② f'_+ 右连续. f'_- 左连续.

③ 设 $x_0 \in I$. 若 f'_+ 在 x_0 处左连续, 或 f'_- 在 x_0 处右连续, 则 f 在 x_0 处可导.

④ f 的不可导点至多可数.

⑤ f 连续.

证明: ① 取 $x_0 \in (a,b)$ 固定之. 再取 $x_1 < x_0$, $x_2 > x_0$. 则有

$$\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_2} \ge \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}.$$ 令 $x_2 \to x_0^+$. 左式右边单调递减有下界, 于是极限存在. 此即 f'_+.

令 $x_1 \to x_0^-$, 则上式右边单调递增且有上界, 于是极限存在. 此即 f'_-

由上述 $f'_\pm$ 的构造. 显然有 $f'_- \le f'_+$. 对于 $x_1 < x_2$. 在其中任取一点 x_0, 则 $f'_+(x_1) \le \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \le f'_-(x_2) \le f'_+(x_2)$.

所以 $f'_\pm$ 单调增. ② 取 $x_1 < x_2 < x_3$. 则 $f'_+(x_2) \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

取 $x_2 \to x_1^+$, 注意 f 右边连续. 所以 $\lim_{x_2\to x_1^+} f'_+(x_2) \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$

再取 $x_3 \to x_1^+$. 则 $\lim_{x_2\to x_1^+} f'_+(x_2) \le f'_+(x_1)$ 另一方面

$f'_+(x_2) \ge f'_+(x_1)$, 所以 $\lim_{x_2\to x_1^+} f'_+(x_2) = f'_+(x_1)$. 所以

f'_+ 右连续 同理可证 f'_- 左连续. ④ 显然. 略. □

Date:
Place:
Reminders

定理: 若 f 在 I 上凸 $[a,b]$, 则对 $\forall x_1, \cdots, x_n \in I$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, 有 $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ (若严格, 则 $<$ 当 x 不全相等时)

证明: 对 n 归纳即可. □

推论: f 在 I 上凸, 则对 $\forall x_i \in I$, $\forall \mu_i > 0$, 有

$$f\left(\frac{\sum \mu_i x_i}{\sum \mu_i}\right) \le \frac{\sum \mu_i f(x_i)}{\sum \mu_i}.$$

证明: 取 $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\sum \mu_i}$ 即可. □

定理: $f \in C[a,b]$, f 在 (a,b) 上可导, 则 f 凸 $\Leftrightarrow$ f' 单调增.

证明: $\Rightarrow$ 方向由前一页的定理可知. $\Leftarrow$ 对 $\forall x_1 < x < x_2$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x)$ 使 $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1)$. 存在 $\xi_2 \in (x, x_2)$ 使 $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$. 因为 $\xi_1 < \xi_2$, 所以 $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, 得 f 凸. □

推论: $f \in C[a,b]$, f 在 (a,b) 上有二阶导, 则 f 凸 $\Leftrightarrow$ $f'' \ge 0$.

例 (均值不等式) 设 $a_1 \cdots a_n > 0$. 定义

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} & x \ne 0. \\ (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} & x = 0. \end{cases}$$

则 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续严格单增函数.

证明: 连续性前面已证. 下证单调性. 先设 $0 < \alpha < \beta$. 取 $a_i^\alpha = b_i$

则只需证 $\left(\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}\right)^p < \frac{b_1^p + \cdots + b_n^p}{n}$ 其中 $p = \frac{\beta}{\alpha} > 1$.

设 $g(x) = x^p$, 则 $g'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$. 所以 g 凸. 不等式成立.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

令 $\alpha\to0^+$ 则 $f(0)<f(\beta)$ $(\beta>0)$ 亦成立. 当 $\alpha<\beta<0$ 时. 对 a_i^{-1} 应用 $0<-\beta<-\alpha$ 的结果即可. 取 $\lambda>0$. 则有 $f(\alpha)<f(0)$ $(\alpha<0)$.

所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格增. □

注: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\max(a_1,\dots,a_n)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\min(a_1,\dots,a_n)$.

(加权算术-几何平均) $a_1,\dots,a_n>0$. $\lambda_1,\dots,\lambda_n>0$. $\sum\lambda_i=1$. 则

$$\sum_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}\le\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i$$

证明: 取 $f(x)=-\log(x)$. $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$. 所以凸. 于是

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i\right)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(a_i).$$ 即 $\log\left(\sum\lambda_i a_i\right)\ge\sum\lambda_i\log(a_i)$.

取 exp 得 $\prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}\le\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i$. □

推论: ① (Young 不等式) $x,y>0$, $1<p<\infty$. $\frac1p+\frac1q=1$. 则 $x\cdot y\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$.

② (Hölder 不等式) 对 $x_1,\dots,x_n$. $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$. $1\le p\le\infty$

$$\sum_{i=1}^n|x_iy_i|\le\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac1p}\cdot\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^q\right)^{\frac1q}.$$

证明: 设 $\tilde{x}_i=x_i/\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac1p}$. $\tilde{y}_i=y_i/\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^q\right)^{\frac1q}$. 则

$$\sum_{i=1}^n|\tilde{x}_i\tilde{y}_i|\le\sum_{i=1}^n\left(\frac{|\tilde{x}_i|^p}{p}+\frac{|\tilde{y}_i|^q}{q}\right)=\frac1p+\frac1q=1.$$ □

③ (Cauchy 不等式) $p=q=2$ 的 Hölder 不等式.

Date:
Place:
Reminders

④ (Minkowski不等式)：对 $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

证明：$\sum |x_i + y_i|^p = \sum |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$

$$\le \sum |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

$$\le \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum |y_i|^p\right)\left(\sum |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□.

§3.8 L'Hôspital法则

定理（$\frac{0}{0}$型）设 f, g 在 (a,b) 上可导，且 $g(x) \neq 0$（$g(x) \neq 0$），若 $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$，且 $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（记为 $A \in \mathbb{R}$），则有 $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

证明：定义 $f(a) = g(a) = 0$. 于是 f, g 在 $[a,b)$ 上连续，在 $[a,x]$ 上对 f, g 应用 ~~Cauchy~~ Cauchy中值定理得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

其中 $a < \xi < x$，当 $x \to a^+$ 时，$\xi \to a^+$.

于是

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□.

若上述 f'/g' 仍是 $0/0$ 型，则可再用一次 L'Hospital法则.

同理可证 $x \to b^-$ 的情况. $x \to \pm\infty$ 的情况可通过换元 $x \mapsto \frac{1}{t}$ 变为 $t \to 0$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

的情况.

定理($\frac{\infty}{\infty}$型) 设 $f.g$ 在 $(a.b)$ 上可导 $g(x)\neq 0.\ g'(x)\neq 0$ $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty$.

若 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(记为A) 则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

证明: 对 $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ s.t.\ \forall x\in(a.\ a+\delta)$. 有 $A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon$.

对于 $\forall y (a.\ a+\delta)$. $A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\varepsilon$. 另一方面

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}\right)\Big/\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right).$$

代入上式, 取 $x\to a^+$ 的上极限得

$$\limsup_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\limsup_{x\to a^+}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}\right)\Big/\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)=\limsup_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\leq A+\varepsilon.$$

同理可得 $\liminf\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\geq A-\varepsilon$ 令 $\varepsilon\to 0$. 则有 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$. $\square$.

例 ① $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

② $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\sin x}{\cos^3 x}}{6x}=\frac{1}{3}.$$

③ $$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\mu}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mu x^\mu}=0.$$

④ $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\mu}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)\frac{1}{x^{n-\mu}e^x}=0.$$

其中 $n=[\mu]+1$.

Date: ....
Place: ....

Reminders

Date: ....
Place: ....

Reminders

⑤ (Arnold 的例子) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)}$

连用7次L'Hospital

$$\underbrace{=\cdots=}\ \frac{(-275)-(-107)}{(-341)-(-173)} = 1.$$

§3.9 Taylor 公式.

导数的定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 又可写做 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

它也可看做是在用线性函数在 $x=x_0$ 附近逼近 $f(x)$. 一个自然的问题是, 能否用更高次的多项式逼近 $f(x)$? 答案就是Taylor公式.

定义 设 f 在 x_0 处有直到 n 阶的导数. 定义

$$T_n(f,x_0;x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

称为 f 在 $x=x_0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式.

定理: 设 f 在 $x=x_0$ 处有直到 n 阶的导数. 则 $f(x)=T_n(f,x_0;x)+o(x-x_0)^n$.

证明: $n=1$ 时 即导数定义. 设 $n=k$ 时成立. 考虑极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{k+1}(f,x_0;x)}{(x-x_0)^{k+1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_k(f',x_0,x)}{(k+1)(x-x_0)^k}=0.$$

□.

设 $R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x)$, ~~称~~ 称为 n 阶 Taylor公式的余项

Date:

Place:

Reminders

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11}+\frac{21844}{6081075}x^{13}+\frac{929569}{638512875}x^{15}+o(x^{15}).$$

需要 Bernoulli 数才能写出通项. 其他的还有 $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{x}{e^x-1}$ 等.

⑪ 设 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$. $x_{n+1}=\sin x_n$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,x_n=\sqrt{3}$

$$\lim_{n\to\infty} n x_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(x_n-\frac{1}{6}x_n^3+\cdots)^2}{x_n^2-(x_n-\frac{1}{6}x_n^3+\cdots)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4+o(x_n^4)}{\frac{1}{3}x_n^4+o(x_n^4)}=3.$$ □

Date:

Place:

Reminders

上述定理表明 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$. 这是最弱的一种余项估计. 称为 Peano 型余项. 它已经能够解决很多问题.

当 $x_0=0$ 时. Taylor 定理又称 Maclaurin 定理.

例 ① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

② $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$

③ $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$.

④ $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$.

⑤ $(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$. 得二项定理

其中 $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, 当 $\alpha\in\mathbb{N}$ 时. 若 $k>\alpha$. 则 $\binom{\alpha}{k}=0$. 于是 >0,

⑥ $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$

⑦ $\arcsin x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+1})$.

⑧ $\arcsin^2 x=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2x)^{2k}}{2k^2\binom{2k}{k}}+o(x^{2n})$.

⑨ $$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-(x+x^2)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})(x-\frac{x^3}{6})-(x+x^2)+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\frac{1}{3}.$$

⑩ $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)}$$

Date:

Place:

Reminders

Lagrange 反演公式：设 $x=f(y)$ 在 $y=y_0$ 邻附近有反函数 $y=g(x)$. 设 $x_0=f(y_0)$. 则

$$y=g(x)=y_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!},\quad 其中\ a_n=\lim_{y\to y_0}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left(\frac{y-y_0}{f(y)-x_0}\right)^n.$$

特别若 $y-\alpha\phi(y)=x$. 则对任意函数 $F(y)$, 有

$$F(y)=F(x)+\alpha\phi(x)F'(x)+\frac{\alpha^2}{2}\left(\phi^2(x)F'(x)\right)'+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left(\phi^n(x)F'(x)\right)+\cdots$$

例① Lambert W函数 $W(x)e^{W(x)}=x$. $f(w)=we^w$.

$x_0=y_0=0$. $\frac{y-y_0}{f(y)-x_0}=e^{-y}$ $\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left(e^{-ny}\right)=(-n)^{n-1}e^{-ny}$.

$$\Rightarrow W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^{n-1}}{n!}x^n.$$ (当 $|x|<e^{-1}$ 时收敛)

② Kepler方程 $y-\alpha\sin y=x$. 则

$$y=x+\alpha\sin x+\frac{\alpha^2}{2}(\sin^2 x)'+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(\sin^n x)+o(\alpha^n).$$

Date:

Place:

Reminders

$$\sin(\tan x)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{55}{1008}x^7-\frac{143}{3456}x^9+o(x^{10})$$

$$\tan(\sin x)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{107}{5040}x^7-\frac{73}{24192}x^9+o(x^{10})$$

$$\arcsin(\arctan x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{13}{120}x^5-\frac{341}{5040}x^7+\frac{18649}{362880}x^9+o(x^{10})$$

$$\arctan(\arcsin x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{13}{120}x^5-\frac{173}{5040}x^7+\frac{12409}{362880}x^9+o(x^{10})$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)}=\frac{-\frac{x^7}{30}-\frac{29}{756}x^9+o(x^{10})}{-\frac{x^7}{30}+\frac{13}{756}x^9+o(x^{10})}\to 1.$$

定理：设 f 在 x_0 处有直到 k 阶的导数, 且

$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$. $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

则 当 k 为奇数时. x_0 不是极值点. 当 k 为偶数时. 若 $f^{(k)}(x_0)>0$, 则为极小值. 若 $f^{(k)}(x_0)<0$. 则为极大值.

证明：$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^k\right)$. 于是

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^k}=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+o(1).$$ 下略. □

除 Peano 型余项外. 我们还有更精细的余项估计.

定理. 设 f 在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数. x_0. $x\in(a,b)$. 则

$f(x)=T_n(f,x_0;x)+R_n(x)$.

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 或 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$

$\xi\in(x_0,x)$ (或 (x,x_0)). 它们分别称作 Lagrange 余项和 Cauchy 余项.

Date:
Place:

Reminders

定理：设 f 在 (x_0-r, x_0+r) 上有任意阶导数，且存在 $M>0$ 使得对 $\forall x\in(x_0-r, x_0+r)$ 以及充分大的 $n\in\mathbb{N}$，有 $|f^{(n)}(x)|\le M$。

则 $\boxed{\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0}$ 对任意的 $x\in(x_0-r, x_0+r)$，于是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

证明：$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le M\cdot\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$. □

例：e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\log\frac{1+x}{1-x}$, $\arctan x$, $\arcsin x$, …

Date:
Place:

Reminders

证明：设 $F(t)=T_n(f, t; x)$

$$=f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

则 $F'(t)=f'(t)-f'(t)+f''(t)(x-t)-f''(t)(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$

$$=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

取 $G(t)=(x-t)^{n+1}$，对 F, G 在 (x, x_0)（或 (x_0, x)）上应用Cauchy中值定理得 $\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n/n!}{-(n+1)(x-\xi)^n}$

于是 $f(x)=T_n(f, x_0; x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

若取 $G(t)=x-t$，则同样方法可得 $f(x)=T_n(f, x_0; x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$.

□

一般地，若取 $G(t)=(x-t)^{k+1}$ $(0\le k\le n)$，则

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(k+1)n!}(x-\xi)^{n-k}(x-x_0)^{k+1}$$

以后还会学习积分型余项，这些定量余项可用来函数在区间上的整体性质。Peano余项只能研究局部的性质。

Date:
Place:
Reminders

例：设 f 是 E 上的二阶可导函数，$M_k = \sup\limits_{x\in E} |f^{(k)}(x)|$ $(k=0,1,2)$

① 若 $E=(a,b)$，则 $M_1 \le \frac{2}{b-a}M_0 + \frac{b-a}{2}M_2$.

证明：对 $\forall x\in (a,b)$.

$f(a) = f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2$. $f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(b-x)^2$.

相减得 $(b-a)|f'(x)| = \left|f(b)-f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2-\frac{f''(\eta)}{2}(b-x)^2\right|$

$\le 2M_0 + \frac{M_2}{2}\left[(a-x)^2+(b-x)^2\right] \le 2M_0+\frac{(b-a)^2}{2}M_2$.

所以 $|f'(x)|\le \frac{2}{b-a}M_0+\frac{b-a}{2}M_2$. 再取上确界即可. □

② 若 $E=[a,+\infty)$，则 $M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

证明：对 $\forall x\in [a,+\infty)$. 任取 $t>0$，则有

$f(x+t)=f(x)+f'(x)t+\frac{f''(\xi)}{2}t^2$，于是

$t|f'(x)| = \left|f(x+t)-f(x)-\frac{f''(\xi)}{2}t^2\right|$

$\le 2M_0+\frac{M_2}{2}t^2$. 于是

$|f'(x)|\le \frac{2M_0}{t}+\frac{M_2 t}{2}$. 取 $t=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$，则有 $|f'(x)|\le 2\sqrt{M_0M_2}$. □

再取 sup 即可.

③ 若 $E=(-\infty,+\infty)$，则 $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$.

证明：任取 $x\in \mathbb{R}$, $t>0$. 则有

$f(x+t)=f(x)+f'(x)t+\frac{f''(\xi)}{2}t^2$. $f(x-t)=f(x)-f'(x)t+\frac{f''(\eta)}{2}t^2$.

Date:
Place:

Reminders

相减得 $2t|f'(x)| = |f(x+t)-f(x-t) - \frac{f''(\xi)}{2}t^2 + \frac{f''(\eta)}{2}t^2|$

$\le 2M_0 + M_2 t^2$. 取上确界得

$2tM_1 \le 2M_0 + M_2 t^2$. 当 $t<0$ 时 该式显然也成立. 所以 $M_2 t^2 - 2M_1 t + 2M_0 \ge 0$ 对一切 $t \in \mathbb{R}$ 成立.

于是 $M_1^2 \le 2M_0M_2$. 即 $M_1 \le \sqrt{2M_0M_2}$. □

以上已经说明. 若 M_0, M_2 有限. 则 M_1 也一定有限.

用类似方法可以证明. 若 M_0, M_n 有限, 则 M_k $(k=1,2,\dots,n-1)$ 也有限.

~~§3.10 微分与微商.~~

~~设 $E=(a,b)$. $x_0 \in E$. 记 $C^k(E)$ 为 E上k阶可导且k阶导数连续的函数全体构成的线性空间. 显然 $C^0(E) \supset C^1(E) \supset C^2(E) \supset \cdots$. 记 $A = C^\infty(E) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(E)$. A称为光滑函数代数. 代数是指一个R线性空间上配一个结合且含单位元的双线性乘法. A上的乘法不仅结合还交换.~~

~~记 $m_{x_0} = \{f \in A \mid f(x_0)=0\}$. m_{x_0} 本身亦构成一个代数. 它于是它是A的子代数. 记 $m_{x_0}^k = m_{x_0} \cdot m_{x_0}^{k-1}$. 其中~~

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

§3.10 微分与微商

设 $E=(a,b)$. 记 $C^k(E)$ 为 E 上具有 k 阶连续导数的函数全体. 于是 $C^k(E)$ 都是线性空间, 且有 $C^0(E) \supseteq C^1(E) \supseteq C^2(E) \supseteq \cdots$

记 $A=C^\infty(E)=\bigcap_{k\geq 0} C^k(E)$. A 中元素叫做光滑函数. A 亦是线性空间. 且对 $\forall f,g\in A$. $f\cdot g: E\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)g(x)$ 也属于 A. 于是 A 成为一个 $\mathbb{R}$-代数. (交换, 结合, 有单位)

设 $x_0\in E$. 记 $m_{x_0}=\{f\in A \mid f(x_0)=0\}$. 则 m_{x_0} 在乘法下封闭, 所以是一个子代数. 容易验证对 $\forall f\in m_{x_0}$, $g\in A$. $f\cdot g\in m_{x_0}$. 所以 m_{x_0} 是一个理想. 记 $m_0^k=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{f_1\cdots f_k \mid f_1,\cdots,f_k\in m_0\}$

于是 $m_0\supseteq m_0^2\supseteq m_0^3\supseteq\cdots$

x_0附近$f(x_0)$

称为差分算子

$\Delta f(x)$

定义一个运算 $\Delta: A\to m_{x_0}$, $f(x)\mapsto f(x)-f(x_0)$.

根据 Taylor 公式, $\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+R_1(x)$. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_1(x)}{x-x_0}=0$.

注意若取 $f(x)=x$. 则 $\Delta x(x)=x-x_0$. 于是有 $\Delta f(x)=f'(x_0)\,\Delta x(x)+R_1(x)$

所以有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x(x)}$, 这意味着导数是差分之商的极限 (简称微商)

任意

因为 f 在 x_0 处存在 n 阶导数. 所以上述 Taylor 展开可取得更好一点. 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 定义

Date:
Place:
Reminders

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - T_{n-1}(f, x_0; x)}{(x-x_0)^n / n!} & x \neq x_0 \\ f^{(n)}(x_0). & x = x_0 \end{cases}$$ 则有

$$f(x) = T_{n-1}(f, x_0; x) + g_n(x)\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$ 且 $g_n(x)$ 连续，特别地

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + g_2(x)\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$ 注意 $f'(x_0)(x-x_0) \in m_{x_0}$

$g_2(x)\frac{(x-x_0)^2}{2} \in m_{x_0}^2$.

所以若考虑 Δf 在 $m_{x_0}/m_{x_0}^2$ 中的等价类 则有

$$[\Delta f] = [f'(x_0)(x-x_0)] = f'(x_0)[(x-x_0)].$$

定义：设商映射 $m_{x_0} \to m_{x_0}/m_{x_0}^2$ 为 π. 定义 $d_{x_0} = \pi \circ \delta : A \to m_{x_0}/m_{x_0}^2$，称为 x_0 附近的微分.

于是有 $d_{x_0}f = f'(x_0)\, d_{x_0}x$. 于是 $f'(x_0) = \frac{d_{x_0}f}{d_{x_0}x}$. 或简写为 $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

(注意无论是 df 还是 dx 其实都是线性空间 $m_{x_0}/m_{x_0}^2$ 中的向量. 所以上述除法记号只能理解为它们关于某基的坐标的商.)

§3.10 微分，~~微分高阶微分~~ 与微分形式.

设 $E=(a,b)$. $f: E \to \mathbb{R}$ ~~固有导数~~. f 在 E 上可导. 于是在每一点 $x_0 \in E$，有 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$. 其中 $R_1(x)$ 为一阶 Taylor 余项. 满足 $\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0$.

Date:
Place:
Reminders

$N^{\circ}_{x_0}$ 即 $\{f\in A \mid f(x_0)=f'(x_0)=0\}$. →

若记 $M^{k}_{x_0}=\{f\in A \mid f(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0\}$. 则 $N^{\circ}_{x_0}$ 即 $M^{2}_{x_0}$.

Date:
Place:
Reminders

上式又可写为 $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+R_1(x)$. (*)

记 A° 是 E 上一阶可导函数构成的线性空间, $M^{\circ}_{x_0}=\{f\in A^{\circ} \mid f(x_0)=0\}$. 则 $M^{\circ}_{x_0}$ 是 A° 的子空间. 定义一个映射: $\Delta_{x_0}: A^{\circ}\to M^{\circ}_{x_0}$, $f\mapsto f-f(x_0)$, "$\Delta_{x_0} f$" 则 Δ_{x_0} 是一个线性映射.

继续看(*). 注意 $f(x)-f(x_0)$ 即 $\Delta_{x_0} f(x)$. 而 $x-x_0=\Delta_{x_0} x(x)$, 于是 (*) 可写为 $\Delta_{x_0} f(x)=f'(x_0)\Delta_{x_0} x(x)+R_1(x)$. 而条件 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_1(x)}{\Delta_{x_0} x}=0$. 则等价于 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\Delta_{x_0} f(x)}{\Delta_{x_0} x(x)}$. Δ_{x_0} 称为 x_0 处的差分算子, $\Delta_{x_0} f/\Delta_{x_0} x$ 称为差商. 所以上式意味着"导数等于差商的极限"

进一步考察(*). 我们希望能够舍弃 $R_1(x)$. 这种操作在数学上有个标准做法, 即定义等价关系, 然后考虑等价类.

定义 $N^{\circ}_{x_0}=\{f\in A^{\circ} \mid \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=0\}$. 则可证明 $N^{\circ}_{x_0}$ 是 $M^{\circ}_{x_0}$ 的线性子空间. 我们定义 对于 $f_1, f_2\in M^{\circ}_{x_0}$, $f_1\sim f_2 \Leftrightarrow f_1-f_2\in N^{\circ}_{x_0}$. 相应的等价类的集合即商空间 $M^{\circ}_{x_0}/N^{\circ}_{x_0}$. 其中元素可记为 $f+N^{\circ}_{x_0}$ 或 $[f]$. 记 $\Omega^{\circ}_{x_0}=M^{\circ}_{x_0}/N^{\circ}_{x_0}$. 设 $M^{\circ}_{x_0}\to\Omega^{\circ}_{x_0}$ 的商映射为 π. 即 $\pi(f)=[f]$. 定义 $d_{x_0}: A^{\circ}\to\Omega^{\circ}_{x_0}$, $f\mapsto\pi\circ\Delta(f)$.

Date:
Place:

Reminders

① 记 $Map(X,Y)$ 为 X 到集合 Y 的映射的全体，同时给 $\varphi: X\to Y$，可定义 $\varphi^*: Map(Y,Z) \to Map(X,Z)$，$f \mapsto f\circ\varphi$

② $\varphi: V_1 \to V_2$，$W_1 \subseteq V_1$，$W_2 \subseteq V_2$，$\varphi(W_1) \subseteq W_2$ ⟶

则 $\bar\varphi: V_1/W_1 \to V_2/W_2$，$v + W_1 \mapsto \varphi(v) + W_2$ 是定义好的。

~~下面要说~~

$$\begin{array}{ccc} A'(E) & \xrightarrow{d} & \Omega'(E) \\ \varphi^*\downarrow & & \downarrow\varphi^* \\ A'(D) & \xrightarrow{d} & \Omega'(D) \end{array}$$ 交换。

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & \mapsto & f(x)-f(x_0) & \mapsto & [f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R_1(x)-f(x_0)] & = & [f'(x_0)(x-x_0)] \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & & & & & [f'(x_0)\varphi'(t_0)(t-t_0)] \\ f(\varphi(t)) & \mapsto & f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0)) & \mapsto & [f(\varphi(t_0))+f'(x_0)\varphi'(t_0)(t-t_0)+R(t)-f(\varphi(t_0))] & & \end{array}$$

$= [f'(x_0)\varphi'(t_0)(t-t_0)]$

Date:
Place:

Reminders

则有 $d_{x_0}f = f'(x_0)\,d_{x_0}x$。$d$ 称为 A' 上的微分运算，$d_{x_0}f$ 称为 f 的微分。

上述推导表明，Ω'_{x_0} 中的元素都是 $d_{x_0}x$ 的常数倍，这意味着 $\dim \Omega'_{x_0} = 1$，$d_{x_0}x$ 即为 Ω'_{x_0} 的基，而 $f'(x_0)$ 即 $d_{x_0}f$ 关于基 $d_{x_0}x$ 的坐标，我们记 ~~$f'(x_0) = \frac{df}{dx}$~~ $f'(x_0) = \frac{d_{x_0}f}{d_{x_0}x}$，注意它其实不是数的商而是向量的坐标。因这个记号看起来像微分的商，所以导数也叫微商。

现在考虑两个集合 $D, E \subseteq \mathbb{R}$，它们都是 $\mathbb{R}$ 中的开区间。$\varphi: D \to E$ 是一阶可导映射，$t_0 \in D$，$\varphi(t_0) = x_0 \in E$，~~对于E上的~~ ~~任意函数~~ 对于 $f \in A'(E)$ 可定义一个 D 上的函数 $f\circ\varphi: t \mapsto f(\varphi(t))$。所以由 φ 出发可定义一个 $A'(E) \to A'(D)$ 的映射 $f \mapsto f\circ\varphi$，记它为 φ^*。注意若 $f \in M'_{x_0}(E)$，则 $\varphi^*(f) \in M'_{t_0}(D)$。若 $f \in N'_{x_0}(E)$，则 $\varphi^*(f) \in N'_{t_0}(D)$。于是 φ^* 诱导了 $\Omega'_{x_0}(E)$ 到 $\Omega'_{t_0}(D)$ 的一个映射：$[f] \mapsto [f\circ\varphi]$。具体写出来就是 $\varphi^*(d_{x_0}f) = [f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))]$

$= [f'(\varphi(t_0))\cdot\varphi'(t_0)(t-t_0) + R(t)] = (f\circ\varphi)'(t_0)\,d_{t_0}t$

$= d_{t_0}(\varphi^*(f))$

它也可以这样算：$d_{x_0}f = f'(x_0)\,d_{x_0}x$，$d_{x_0}x = \varphi'(t_0)\,d_{t_0}t$，于是

$d_{t_0}(f\circ\varphi) = f'(x_0)\varphi'(t_0)\,d_{t_0}t \Rightarrow d_{t_0}(f\circ\varphi) = (f\circ\varphi)'(t_0)\,d_{t_0}t$。

这个性质叫一阶微分形式的不变性。

若 $f\in M^k_{x_0}$, $g\in M^l_{x_0}$, 则 $f\cdot g\in M^{k+l}_{x_0}$. 于是由 $\Delta x=x-x_0\in M^1_{x_0}$ → 可定义 $(\Delta x)^n=(x-x_0)^n\in M^n_{x_0}$. 所以有 $[(\Delta x)^n]=[(x-x_0)^n]=d^n_{x_0}x^n$.

若将 $[(\Delta x)^n]$ 记为 $(dx)^n$

~~$d^n_{x_0}x^n$ 不是一个好的基. 因为存在非线性变换的性质~~

现在考虑另一映射 $\varphi: D\to E$. 定义 $A^n(D)$. $M^n_{x_0}(D)$. $N^n_{x_0}(D)$

以及映射 $\varphi^*: A^n(E)\to A^n(D)$. $\varphi^*: M^n_{x_0}(E)\to M^n_{t_0}(D)$. $\varphi^*: N^n_{x_0}(E)\to N^n_{t_0}(D)$

以及 $\varphi^*: \Omega^n(E)\to\Omega^n(D)$.

定理:
$$\begin{array}{ccc} A^n(E) & \xrightarrow{\varphi^*} & A^n(D) \\ \downarrow d^n & & \downarrow d^n \\ \Omega^n(E) & \xrightarrow{\varphi^*} & \Omega^n(D) \end{array}$$
交换.

证明: 取 $f\in A^n(E)$ 则 $\Delta^n_{x_0}f=f-T_{n-1}(f,x_0;x)$

$d^n_{x_0}(f)=\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]$ 另一方面.

$\varphi^*f(t)=f(\varphi(t))$, $\varphi^*\Delta^n_{x_0}(f)(t)=f(\varphi(t))-T_{n-1}(f,x_0;\varphi(t))$

$$\begin{array}{ccccc} A^n(E) & \xrightarrow{\Delta^n} & M^n(E) & \xrightarrow{\pi} & \Omega^n(E) \\ \downarrow\varphi^* & & \downarrow\varphi^* & & \downarrow\varphi^* \\ A^n(D) & \xrightarrow{\Delta^n} & M^n(D) & \xrightarrow{\pi} & \Omega^n(D) \end{array}$$

记 $g(t)=f(\varphi(t))-T_{n-1}(f,x_0;\varphi(t))$.

则可验证 $g(t_0)=\cdots=g^{(n-1)}(t_0)=0$.

$g^{(n)}(t_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\varphi'(t_0)^n$, 所以 $\varphi^*d^nf=\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\varphi'(t_0)^n(t-t_0)^n\right]$

$=d^n_{t_0}\varphi^*(f)$.

现在考虑高阶导数. 设 A^n 为 E 上 n 阶可导函数构成的线性空间. $M^n_{x_0}=\{f\in A^n \mid f(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0\}$. $N^n_{x_0}=M^{n+1}_{x_0}$.

则 $N^n_{x_0}\subseteq M^n_{x_0}\subseteq A^n$. n阶差分算子 $\Delta^n_{x_0}: A^n\to M^n_{x_0}$ 定义为

$\Delta^n_{x_0}f=f-T_{n-1}(f,x_0;x)$, 于是 $\Delta^n_{x_0}f=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$.

$\Delta^n_{x_0}x^n=(x-x_0)^n$. 其中 $R_n(x)\in N^n_{x_0}$. 定义 $\Omega^n_{x_0}=M^n_{x_0}/N^n_{x_0}$

$\pi^n_{x_0}: M^n_{x_0}\to\Omega^n_{x_0}$. $d^n_{x_0}=\pi^n_{x_0}\Delta^n_{x_0}$, 于是有 $d^n_{x_0}f=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}d^n_{x_0}x^n$

高阶微分不再具有不变性. 我们以 $n=2$ 为例.

$d^2f=\frac{f''(x_0)}{2}d^2_{x_0}x^2$. $\varphi^*d^2_{x_0}x^2=\left(\frac{\varphi^2(t)}{2}\right)''\Big|_{t=t_0}d^2_{t_0}t^2=(\varphi(t_0)\varphi''(t_0)+\varphi'(t_0)^2)d^2_{t_0}t^2$.

另一方面. $\varphi^*d^2_{x_0}f=\frac{(f\circ\varphi)''}{2}d^2_{t_0}t^2=\frac{1}{2}(f''(x_0)\varphi'(t_0)^2+f'(x_0)\varphi''(t_0))d^2_{t_0}t^2$.

所以 $\varphi^*d^2_{x_0}f\neq d^2$

若有另一n阶可导映射 $\varphi: D\to E$. 不难验证 $\varphi^*: A^n(E)\to A^n(D)$

$\varphi^*: M^n_{x_0}(E)\to M^n_{t_0}(D)$. $\varphi^*: N^n_{x_0}(E)\to N^n_{t_0}(D)$ 都是定义良好的. 于是

对 $\forall f\in A^n(E)$ 可按如下方式计算 $\varphi^*d^n_{x_0}f$

$\varphi^*(d^n_{x_0}f)=d^n_{t_0}(f\circ\varphi)=[f(\varphi(t))-T_{n-1}(f\circ\varphi,t_0;t)]$

$=\frac{1}{n!}(f\circ\varphi(t))^{(n)}\Big|_{t=t_0}d^n_{t_0}t^n$.

特别地, $\varphi^*(d^n_{x_0}x^n)=\frac{1}{n!}(\varphi^n(t))^{(n)}\Big|_{t=t_0}d^n_{t_0}t^n$

所以此时不可简单地将 $d^n_{x_0}f$ 中的 $d^n_{x_0}x^n$ 替换为 $\varphi^*(d^n_{x_0}x^n)$ 的方式

计算 $\varphi^*(d^n_{x_0}f)$. 例如, 当 $n=2$ 时

高阶微分的正确定义：记 $A^{(n)}=\{f: I\to\mathbb{R} \mid f$ 在 I 上有 n 阶导数$\}$

$M_{x_0}^{(k)}=\{f\in A^{(n)} \mid f(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0\}$ $1\le k\le n+1$ 定义

$\Omega_{x_0}^{(n)}=M_{x_0}^{(1)}/M_{x_0}^{(n+1)}$ ~~$\Omega_{x_0}^{(n)}$ 为 x_0 处 n 阶微分~~. 映射

$\Delta: A^{(n)}\to M_{x_0}^{(1)}$ 仍定义为 $f(x)\mapsto f(x)-f(x_0)$. 于是 n 阶微分可定义为 $d_{x_0}^{(n)}: A^{(n)}\to\Omega_{x_0}^{(n)}$ $f\mapsto \pi^{(n)}\circ\Delta$. 其中 $\pi^{(n)}: M_{x_0}^{(1)}\to\Omega_{x_0}^{(n)}$ 为商映射.

若有 $D\xrightarrow{\varphi}E$. φ 也有 n 阶导数. $t_0\in D$. $\varphi(t_0)=x_0$. 则有拉回映射 $\varphi^*: A^{(n)}(E)\to A^{(n)}(D)$ 以及它的限制 $\varphi^*: M_{x_0}^{(1)}(E)\to M_{t_0}^{(1)}(D)$.

于是有诱导的映射 $\varphi^*: \Omega_{x_0}^{(n)}(E)\to\Omega_{t_0}^{(n)}(D)$.

不难验证

$$\begin{array}{ccccc} A^{(n)}(E) & \xrightarrow{\Delta} & M_{x_0}^{(1)}(E) & \quad f(x) & \longmapsto & f(x)-f(x_0) \\ \downarrow{\varphi^*} & & \downarrow{\varphi^*} & \downarrow & & \downarrow \\ A^{(n)}(D) & \xrightarrow{\Delta} & M_{t_0}^{(1)}(D) & \quad f(\varphi(t)) & \longmapsto & f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0)) \end{array}$$

的交换性. 接下来. 由商空间的定义可知

$$\begin{array}{ccccc} M_{x_0}^{(1)}(E) & \xrightarrow{\pi^{(n)}} & \Omega_{x_0}^{(n)}(E) & \quad f(x) & \longmapsto & [f(x)] \\ \downarrow{\varphi^*} & & \downarrow{\varphi^*} & \downarrow & & \downarrow \\ M_{t_0}^{(1)}(D) & \xrightarrow{\pi^{(n)}} & \Omega_{t_0}^{(n)}(D) & \quad f(\varphi(t)) & \longmapsto & [f(\varphi(t))] \end{array}$$

的交换性. 于是有 n 阶微分的不变性:

$$\begin{array}{ccccc} A^{(n)}(E) & \xrightarrow{d_{x_0}^{(n)}} & \Omega_{x_0}^{(n)}(E) & \quad f(x) & \longmapsto & [f(x)-f(x_0)] \\ \downarrow{\varphi^*} & & \downarrow{\varphi^*} & \downarrow & & \downarrow \\ A^{(n)}(D) & \xrightarrow{d_{t_0}^{(n)}} & \Omega_{t_0}^{(n)}(D) & \quad f(\varphi(t)) & \longmapsto & [f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))] \end{array}$$

~~某些书中常提高阶微分不具有形式不变性. 这是因为它们对高阶微分的定义不对. 但要注意. 根据我们的定义~~

~~$d_{t_0}^n(f\circ\varphi)\ne f$~~

考虑另一映射 $\varphi: D\to E$. 设 φ 也有 n 阶导数. 于是由复合函数求导法则. 对 $\forall f\in A^n(E)$. $f\circ\varphi: D\to\mathbb{R}\in A^n(D)$. 于是 $\varphi^*: A^n(E)\to A^n(D)$ 定义良好. 于是又可限制成为 $\varphi^*: M_{x_0}^n(E)\to M_{t_0}^n(D)$ 和 $\varphi^*: M_{x_0}^n(E)\to M_{t_0}^n(D)$.

以及诱导的映射 $\varphi^*: \Omega_{x_0}^n(E)\to\Omega_{t_0}^n(D)$. 可以验证

$$\begin{array}{ccc} M_{x_0}^n(E) & \to & \Omega_{x_0}^n(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{t_0}^n(D) & \to & \Omega_{t_0}^n(E) \end{array}$$

是可交换的. 而

$$\begin{array}{ccc} A^n(E) & \to & M_{x_0}^n(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^n(D) & \to & M_{t_0}^n(D) \end{array}$$

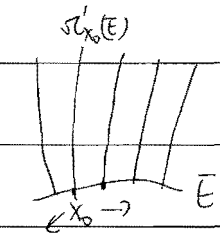
不可交换. 所以

复合后的图

$$\begin{array}{ccccc} A^n(E) & \to & M_{x_0}^n(E) & \to & \Omega_{x_0}^n(E) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A^n(D) & \to & M_{t_0}^n(E) & \to & \Omega_{t_0}^n(E) \end{array}$$

也不可交换. 于是 n 阶微分没有不变性. 除非 $n=1$. 或者 f 本身就在 $M_{x_0}^n(E)$ 中.

~~高阶微分因为不具有不变性. 所以应用不多. 让我们回到一阶微分~~



$\Omega_{x_0}^1$ 叫 x_0 处的余切空间. (另有切空间的概念, 留待多元微积分时再讲) 若让 x_0 动起来. 则每个 x_0 处可

Date:
Place:
Reminders

余切丛: $T^*(E)=E\times(\mathbb{R}dx)$

截面: $s: E\to T^*(E)$, $x\mapsto(x, g(x)dx)$. 某种 $\omega=g(x)dx$.

称为微分1形式.

微分形式的线性空间记为 $\Omega^1(E)$. $d: A^1(E)\to\Omega^1(E)$

$f(x)\mapsto f'(x)dx$

是一个线性映射, 因而是: 若 $f, g\in A^1(E)$ ~~…~~

则 $d(f\cdot g)=f\cdot dg+g\cdot df$.

注意: 高阶微分形式和高阶微分是两码事. →

(这里用到: 若 $f\in A^1$, $\omega\in\Omega^1$, 则 $f\cdot\omega\in\Omega^1$)

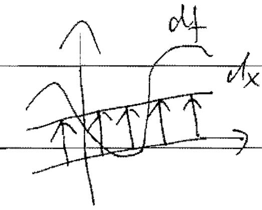
$\omega=g(x)dx$

微分形式的好处: 若 $\varphi: D\to E$, 则 $\varphi^*\omega = g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

若 $\omega=df$, 则 $\varphi^*\omega=d(\varphi^* f)$. 所以 ω 不仅仅是一个 $g(x)$, 它还包含坐标系的信息(dx). 这在积分运算中很有用(需参见定积分一节)

Date:
Place:
Reminders

配一个一维的线性空间. 这样的数学结构叫纤维丛. 将是今后代数拓扑或微分几何学中的重要研究对象.



将 E 画为横轴, Ω_{x_0} 画为纵轴, 将 dx 画出来. 将得到一条线, 它称为纤维丛的截面. df 画出来也是一条线, 它在每个点处的高度即 $f'(x)$, 它是另一个截面. 一般地, 形如 $\omega=g(x)dx$ 的元素在每个 Ω_{x_0} 中定义了一个元素 $[g(x_0)(x-x_0)]$, ω 叫做一阶微分形式. 每个 $f\in A^1$ 都定义了一个一阶微分形式 $\omega=df=f'(x)dx$. 反之, 是否每个微分形式都来自 A^1, 这将是下一章的主题 ~~在更高维空间~~. 在~~多元微分学~~含向的课程中, 高阶微分形式及其在高维曲面上的积分将是统一积分学的主题.

(第4, 积分理论) §3.11 原函数 (不定积分, 反导数)

~~§4.1 不定积分 (或称 Newton 积分)~~

~~设 A^1 是E上可导函数~~ 设 $E\subseteq\mathbb{R}$. 不妨设 $E=[a,b]$. 记 A^1 是 E 上一阶可导的函数全体构成的线性空间. Ω^1 是 E 上的微分形式构成的线性空间. 上一节中定义了一个映射 $d: A^1\to\Omega^1$, $f(x)\mapsto f'(x)dx$. 这是一个线性映射. 一些自然的问题是: d 单吗? d 满吗? $\ker(d)=?$ $\mathrm{Im}(d)=?$ d 可逆吗? 目前我们只能回答其中一个.

引理: $\ker(d)=\{f\in A^1 \mid f(x)\equiv c,\ c\in\mathbb{R}\}=:C$. 平凡.

证明: 若 $f'(x)=0$, $\forall x\in(a,b)$, 则 f 恒为常数. □

Date:
Place:
Reminders

n阶微分的计算：根据定义

$$d^{(n)}_{x_0} f = [f(x) - f(x_0)] = \left[f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)\right]$$

其中 $R_n(x)$ 满足 $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$. 于是 $R_n(x)\in M^{(n+1)}_{x_0}$. 所以

$$d^{(n)}_{x_0}(f) = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right].$$

考虑不变性：$\varphi^* d^{(n)}_{x_0}(f) = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\varphi(t)-\varphi(t_0))^k\right]$.

$d^{(n)}_{t_0}\varphi^*(f) = \left[\sum_{l=1}^{n}\frac{(f\circ\varphi)^{(l)}(t_0)}{l!}(t-t_0)^l\right]$. 它们相等这件事直接证明并不容易. 设 $F(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\varphi(t)-\varphi(t_0))^k$. 这等于要证 $F^{(l)}(t_0) = (f\circ\varphi)^{(l)}(t_0)$. 我们可以利用 Faà di Bruno 公式证明这件事：

$$F^{(l)}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}\right)^l\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\varphi(t)-\varphi(t_0))^k\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(\frac{d}{dt}\right)^l(\varphi(t)-\varphi(t_0))^k\Bigg|_{t=t_0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot\left[\sum_{\substack{0\le i_1\cdots i_l\le l\\ i_1+2i_2+\cdots+li_l=l}}\frac{l!}{(i_1)!(1!)^{i_1}\cdots(i_l)!(l!)^{i_l}}k(k-1)\cdots(k-i_1-\cdots-i_l+1)\right.$$

$$\left.(\varphi(t)-\varphi(t_0))^{k-i_1-\cdots-i_l}\cdot(\varphi'(t))^{i_1}\cdots(\varphi^{(l)}(t))^{i_l}\right]\Bigg|_{t=t_0}$$

$$= \sum_{\substack{0\le i_1\cdots i_l\le l\\ i_1+2i_2+\cdots+li_l=l}}\frac{l!}{(i_1)!(1!)^{i_1}\cdots(i_l)!(l!)^{i_l}}\cdot\frac{(i_1+\cdots+i_l)!}{(i_1+\cdots+i_l)!}\cdot f^{(i_1+\cdots+i_l)}(\varphi(t_0))\,(\varphi'(t_0))^{i_1}\cdots(\varphi^{(l)}(t_0))^{i_l}$$

$$= (f\circ\varphi)^{(l)}(t_0).$$

Date:
Place:
Reminders

积分理论的主要任务就是调整 d' 和 Ω' 的定义，使 d^{-1} 具有好的性质. 不定积分部分主要考虑计算技巧. 所以不妨假设 A 是充分好的函数构成的线性空间，$B=d(A)$，于是 $d: A\to B$ 是满射. 由同态基本定理，$B\cong A/\ker(d)$，于是存在逆映射 $\int: B\to A/C$，这个映射叫做不定积分.（比多样事自定积分，以后自会明白）.

求不定积分即是问，给定 $\omega = f(x)dx$ $\in B$，~~是否存在~~ 如何找到函数 $F(x)\in A$，使 $F'(x)=f(x)$. 此时称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，并记 $\int f(x)dx = F(x)+C$. 显然原函数是不唯一的，但任意两个差一定是常数. 所以只要求出一个即可.

由导数的知识我们可以立刻写出以下的不定积分结果：

$\int 0\,dx = C$. $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$. $\int\frac{1}{x}dx = \log x + C$. $\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}+C$. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$. $\int\cos x\,dx = \sin x + C$.

$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$. $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$. $\int\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. ...

另外，由定义易知以下性质成立 ① $\int$ 是线性的. ② $d\circ\int = id$.
③ $\int df = f + C$ 由此出发又可算出很多不定积分，如

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int 1\,dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C$$

$$\int\tan^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \tan x - x + C.$$

但这些仍然有限. 下面将介绍几种计算不定积分的方法和技巧.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

一、分部积分法

由 $d(f\cdot g) = f\,dg + g\,df$ 直知 $f\cdot g = \int f\,dg + \int g\,df$，于是

$\int f\,dg = f\cdot g - \int g\,df$，或写为

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$.

例① $\int x e^x dx = \int x\,de^x = x\cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

② $\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

③ $\int \log x\,dx = x\log x - \int x\,d\log x = x\log x - x + C$.

④ $\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int \sin x\, e^x dx$.

$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$ 所以可解得

$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)e^x + C$.

$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(-\cos x + \sin x)e^x + C$.

⑤ $\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x\,d\sin x = \cos^{n-1}x\cdot\sin x$

$- \int \sin x\,d(\cos^{n-1} x)$

$= \cos^{n-1}x\cdot\sin x + \int \sin^2 x\,(n-1)\cos^{n-2}x\,dx$

$= \cos^{n-1}x\cdot\sin x + (n-1)\left[\int \cos^{n-2}x\,dx - \int \cos^n x\,dx\right]$

$\Rightarrow \int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$. 同理

$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$，注意

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\cos x\sin x + x) + C$. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos x\sin x) + C$. (本身验证

所以对一切 n，$\int \cos^n x\,dx$ 和 $\int \sin^n x\,dx$ 都可求出.

Date:
Place:
Reminders

另外，亦可反用，如 $\int f(u)du$ 中有一部分 很难推的化简一

问题，则可设 $u=\varphi(x)$，于是 $\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$，

Date:
Place:
Reminders

二、换元法

由复合函数求导法则 $d(f(\varphi(t))) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt$，所以

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(u)du$ 若能求出 $\int f(u)du = F(u)+C$，

则 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C$.

例：① $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2x\cdot d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C = \frac{1}{2}(x+\cos x\sin x)+C$.

② $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

③ $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x\, d\ln x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$.

④ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

⑤ $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(a\cdot b\neq 0)$.

$\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \frac{d(\frac{a}{b}\tan x)}{ab(1+(\frac{a}{b}\tan x)^2)} \Rightarrow \int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+C$.

⑥ $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $x = a\cdot\sin t$ $dx = a\cdot\cos t$

$= \int a^2\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}(t+\cos t\sin t)+C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$.

⑦ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. $x = a\sinh t$, 则 $\sqrt{a^2+x^2} = a\cosh t$，于是

$= \int \frac{a\cosh t}{a\cosh t}dt = \int 1\,dt = t+C = \ln(\frac{x}{a}+\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}})+C = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

⑧ $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$ 设 $u=1+\sqrt{1+x}$. 于是 $x=(u-1)^2-1$.

$dx=2(u-1)du$, 于是

$I=\int\frac{2(u-1)}{u}du=2(u-\log u)+C=2(\sqrt{1+x}-\log(1+\sqrt{1+x}))+C$.

三 有理函数展开法.

有理函数即形如 $R(x)=P(x)/Q(x)$ 的函数. 其中 P, Q 为多项式.

因Q首1的缘故 若 P 的次数大于 Q 的次数 $(\deg P\geq\deg Q)$ 可以做带余除法

$P(x)=Q(x)\cdot m(x)+n(x)$, 于是 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=m(x)+\frac{n(x)}{Q(x)}$. 其中 $m(x)$ 是多项式. 其积分不难求得. 于是只需看 P 的次数小于 Q 的情况.

定理: 设 $R(x)=P(x)/Q(x)$ 为有理函数且 $\deg P<\deg Q$. Q 首1. 则

i) $Q(x)$ 一定可分解为 $Q(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)^{k_i}\cdot\prod_{j=1}^{n}(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$

ii) $R(x)$ 可分解为

$$R(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{A_{ik}}{(x-x_i)^k}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{l_i}\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}.$$

证明略. 因为涉及代数基本定理, 那需要讲完复数才能证. 属于代数学部分的内容.

定理表明, 只需考虑形如 $\frac{A}{(x-a)^k}$ 和 $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$ $(p^2-4q<0)$ 的函数的积分即可

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place: $R(x)$

Reminders

例 ① $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$. $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$.

设 $R(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$. $A=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)R(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{2x-4}=-1$

$B=\lim\limits_{x\to 3}(x-3)R(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-2}{2x-4}=2.$ D.

② $R=\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}$. $Q=x^3+x+3x+3=(x+1)(x^2+3)$. $R=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$.

$A=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)x}{x^3+x^2+3x+3}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+1}{3x^2+2x+3}=-\frac{1}{4}.$

$R(x)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{x+3}{4(x^2+3)}\Rightarrow B=\frac{1}{4}.\ C=\frac{3}{4}.$

③ $R=\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$. $Q=x(x-1)^3$. $R=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$.

$A=\lim\limits_{x\to 0}xR(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+x}{x^4-3x^3+3x^2-x}=-1.$

$B=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^3R(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^3(x^3+1)}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x}=2.$

$C=\lim\limits_{x\to 1}((x-1)^3R(x))'=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+\frac{1}{x})'=1$

$D=\lim\limits_{x\to 1}\frac{((x-1)^3R(x))''}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{x})''=2.$

另一种方法 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{y}{a}+C$. →

对a求导得 $\int \frac{2a}{(y^2+a^2)^2}dy = \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{y}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{y}{a^2+y^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{y}{a} + \frac{y}{2a^2(a^2+y^2)}$$

其中原理要到多元微积分中含参积分部分才能解决.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

回到一般问题. $\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C$. $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$.

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx \longrightarrow \tilde{A}\int \frac{y}{(y^2+a^2)^k}dy + \tilde{B}\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^k}$$

$$\int \frac{y}{(y^2+a^2)^k}dy = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2)}{(y^2+a^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(y^2+a^2) & k=1 \\ \frac{1}{2}\frac{(y^2+a^2)^{1-k}}{1-k} & k\neq 1. \end{cases}$$

最后. 设 $I_k = \int \frac{dy}{(y^2+a^2)^k}$.

$$I_k = \frac{y}{(y^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(y^2+a^2)^{k+1}}dy = \frac{y}{(y^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{a^2+y^2-a^2}{(y^2+a^2)^{k+1}}dy$$

$$= \frac{y}{(y^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}$$

$$\Rightarrow I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\frac{y}{(a^2+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k.$$

例 ① $\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx = -\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^3} + \int\frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int\frac{dx}{x-1}$

$= -\log|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \log(x-1)^2 + C.$

② $\int \frac{5x+6}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+1)+\frac{7}{2}}{x^2+x+1}dx = \frac{5}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{7}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$

$= \frac{5}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

Date:
Place:
Reminders

一般来说最难的一步是求Q的零点，求出来之后后面就是套路了.

四、可有理化的.

① $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$.

设 $t = \tan\frac{x}{2}$. 则 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

于是 $I = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$.

② $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ 设 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. 则 $x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a}$. 就有理了.

③ $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \Rightarrow \sqrt{t^2+1}$, $\sqrt{t^2-1}$, $\sqrt{1-t^2}$.

设 $\sqrt{t^2+1} = tu+1$, $tu-1$ 或 $t-u$.

$\sqrt{t^2-1} = (t-1)u$, $(t+1)u$ 或 $t-u$

$\sqrt{1-t^2} = u(1-t)$, $u(1+t)$ 或 $tu\pm1$.

（三角或双曲函数亦可）

五、其它

① 椭圆积分：$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$. $\deg P = 3$ 或 4.

（若 $\deg P > 4$，则称为超椭圆）

椭圆积分总能化成以下三种标准型之一

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad \int\frac{d\varphi}{(1-h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Date:

Place: [illegible]

Reminders

② 非初等函数

$$\int \frac{e^x}{x}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \sin(x^2)\,dx,\ \int \cos(x^3)\,dx$$

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{dx}{\log x},\ \int \cancel{\sin}\cos(\sin x)\,dx,\ \ldots$$

ADDRESS · 通讯录

Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		