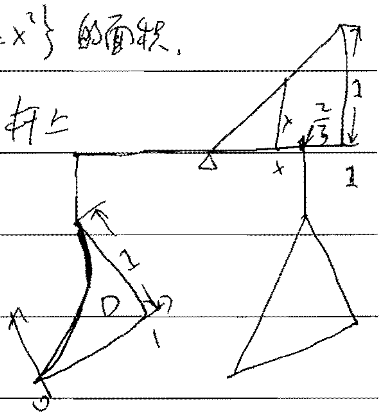
§4. 积分理论

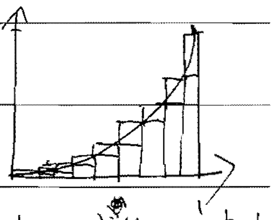
§4.1 从阿基米德到牛顿-莱布尼兹

阿基米德的很多工作已经体现出积分的思想. 我们以抛物线下方的面积这一问题为例来解释他的方法

例 求 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$ 的面积.



阿基米德首先考虑一个如右图放置在杠杆上的三角形的力矩问题. 将三角形垂直切成小条. 那么位于x的小条的高度也是x, 于是力矩正好是x^2. 这个小条将与另一边臂长为1处一个长度为x^2的小条平衡. 令x跑遍$[0,1]$, 则这些长度为x^2的小条正好构成区域D. 所以上述杠杆达到平衡. 另一方面根据三角形重心的性质, 我们可以把三角形挂在臂长为$\frac{2}{3}$的位置上, 力矩是一样的. 于是有 $S_D\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Rightarrow S_D=\frac{1}{3}$.



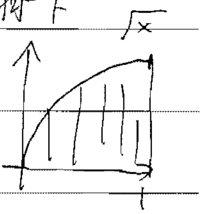
如果不想摆弄杠杆和力矩, 也可按如下方法计算: 将抛物线下方区域等分为宽度为$\frac{1}{n}$的小条, 并用矩形代替每个小条. 有两种代替方法, 结果分别增大和减小. 设$f(x)=x^2$. 两种方法分别给出

$$S_{小}=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}. \qquad S_{大}=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

于是 $S_{小}\le S_D<S_{大}$. 令$n\to\infty$, 则有 $S_D=\frac{1}{3}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}-(n-1)^{\frac{3}{2}}}=\cdots=\frac{2}{3}.\quad\longrightarrow$$

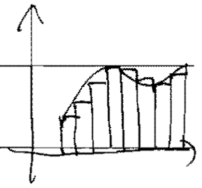
这种方法有它的局限性. 例如, 如果把抛物线翻一下



即设 $f(x)=\sqrt{x}$. 则需求 $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. 没有显式表达式, 尽管从直观上不难知道 S 应为 $\frac{2}{3}$.

如果是更复杂的函数 $f(x)$, 区域 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$ 也可分成小条. 并有 $S_n=\sum_{k=0}^{n}f(a+\frac{k}{n}(b-a))\frac{b-a}{n}$ 作为 S_D 的近似值. 不难想像, 当 f 具有比较好的性质时, 应有 $\lim_{n\to\infty}S_n=S_D$.



定义: 设 $f\in C[a,b]$. 对于 $n\in\mathbb{N}$ $(n\ne0)$ 定义

$$S_n(f;a,b)=\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}.$$

引理1. $\lim_{n\to\infty}S_n(f;a,b)$ 存在. 记它为 $S(f;a,b)$, 叫做 f 在 $[a,b]$ 上的牛顿-莱布尼茨积分.

证明: 我们用 Cauchy 准则, 即证对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n,m>N$, 有 $|S_n-S_m|<\varepsilon$. 首先, 由 f 的一致连续性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 取 $N\in\mathbb{N}$ 满足 $N>\frac{b-a}{\delta}$. 于是对 $n,m>N$, 有 $\frac{b-a}{n}<\delta$, $\frac{b-a}{m}<\delta$. 注意 $n\cdot m$ 也大于 N. 我们来考虑 $|S_{nm}-S_n|$:

$$|S_{n\cdot m}-S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n\cdot m-1} f\left(a+\frac{k}{n\cdot m}(b-a)\right)\frac{b-a}{n\cdot m} - \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}\right|$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\left| f\left(a+\frac{i\cdot m+j}{n\cdot m}(b-a)\right) - f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|\cdot\frac{b-a}{n\cdot m}.$$

注意 $\left(a+\frac{i\cdot m+j}{n\cdot m}(b-a)\right) - \cancel{f}\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right) = \frac{j}{n\cdot m}(b-a) < \frac{b-a}{n} < \delta.$

所以 $|S_{n\cdot m}-S_n| < \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot\frac{b-a}{b\cdot m} = \frac{\varepsilon}{2}$. 同理可得 $|S_{n\cdot m}-S_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $|S_n-S_m| < |S_{n\cdot m}-S_n| + |S_{n\cdot m}-S_m| < \varepsilon$. □.

推论: 若定义 $\tilde{S}_n(f;a.b) = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}$, 则 $\lim_{n\to\infty}|\tilde{S}_n - S_n| = 0$. 于是 $\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_n = S$.

证明. $|\tilde{S}_n - S_n| = |(f(b)-f(a))(b-a)/n| \to 0$. □.

~~在上述记号中~~ 在记号 $S(f;a.b)$ 中 总有 $a<b$. 我们规定 若 $a>b$. 则 $S(f,a.b) = -S(f.b.a)$. ~~要~~ 另外 $S(f;a.a)=0$. 这样一来. 对 $\forall x.y \in [a.b]$. 我们都可谈论 $S(f;x.y)$ 了.

引理2. 对于 $x \in [a.b]$. 定义 $F(x)$ = $S(f,a.x)$, ~~则 F(x) 是~~ 连续的.

~~即 $\lim_{x\to x_0} S(f,a.x) = S(f,a.x_0)$.~~

证明: 只需证 $\lim_{h\to 0} S(f,a.x+h) = S(f,a.x)$.

对于$\varepsilon>0$，仍由一致连续，存在$\delta_0>0$，s.t. $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ 满足$|x_1-x_2|<\delta_0$，有$|f(x_1)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4(X-a)}$。再设$f$在$[a,b]$上的最大值为$M$。取$\delta < \min(\delta_0, \frac{\varepsilon}{16M})$。下证对$\forall h$满足$|h|<\delta$，有$|S(f.a.x+h)-S(f.a,x)|<\varepsilon$。

对于一个给定的满足$|h|<\delta$的h，首先可取N_1，使得对$\forall n>N_1$，有$|S(f;a,x+h)-S_n(f;a.x+h)|<\frac{\varepsilon}{4}$。同样地可取$N_2$，使得对$\forall n>N_2$，有$|S(f;a.x)-S_n(f;a.x)|<\frac{\varepsilon}{4}$。再取$N_3$使得对$\forall n>N_3$有$\left|\frac{x+h-a}{n}\right|<|h|$。任取一个$n$满足$n>\max(N_1, \frac{x+h-a}{x-a}(N_2+1), N_3)$。令$m=\left[\frac{x-a}{x+h-a}\cdot n\right]$，则$m>N_2$。于是

$$|S(f;a.x+h)-S(f;a.x)|$$
$$\le \underbrace{|S_n(f;a.x+h)-S(f;a.x+h)|} + \underbrace{|S_m(f;a.x)-S(f;a.x)|}$$
$$+ \underbrace{|S_n(f;a.x+h)-S_m(f,a.x)|} < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+(\cdots)$$ 其中

$$|S_n(f;a.x+h)-S_m(f;a,x)|$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right)\cdot\frac{x+h-a}{n} - \sum_{k=0}^{m-1} f\left(a+\frac{k}{m}(x-a)\right)\cdot\frac{x-a}{m}$$

~~$= \sum_{k=0}^{m-1}\left(f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right)-f\left(a+\frac{k}{n}(x-a)\right)\right)$~~ $-\sum_{k=0}^{m-1} f\left(a+\frac{k}{m}(x-a)\right)\frac{x-a}{m}$

$$=\sum_{k=0}^{m-1} f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right)\cdot\underset{\sim}{\frac{x+h-a}{n}} + \sum_{k=m}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right)\frac{x+h-a}{n}$$

$$\frac{x-a}{m}+\frac{x+h-a}{n}-\frac{x-a}{}$$

$$\frac{x-a}{x+h-a}n-1 < m < \frac{x-a}{x+h-a}n. \qquad m-1 < \frac{x-a}{x+h-a}\cdot n-1$$

$$\Rightarrow \frac{x+h-a}{n} < \frac{x-a}{m} < \frac{x-a}{\frac{x-a}{x+h-a}n-1} = \frac{x+h-a}{n-\frac{x+h-a}{x-a}}.$$

$$0 < \frac{x-a}{m} - \frac{x+h-a}{n} < (x+h-a)\left(\frac{1}{n-\frac{x+h-a}{x-a}} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{x+h-a}{n\left(n-\frac{x+h-a}{x-a}\right)}\cdot\frac{x+h-a}{x-a}$$

$$= \frac{x+h-a}{n}\cdot\frac{1}{\frac{x+h-a}{x-a}n-1}.$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\left[f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right) - f\left(a+\frac{k}{m}(x-a)\right)\right]\cdot\frac{x-a}{m} \qquad \leftarrow T_1$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right)\left(\frac{x+h-a}{n} - \frac{x-a}{m}\right) \qquad \leftarrow T_2$$

$$+ \sum_{k=m}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right)\cdot\frac{x+h-a}{n}. \qquad \leftarrow T_3.$$

对于 T_1，注意 $\left|\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right) - \left(a+\frac{k}{m}(x-a)\right)\right|$

$$\leq k\cdot\left|\frac{x+h-a}{n} - \frac{x-a}{m}\right| \leq \underbrace{(m-1)\cdot\frac{1}{\frac{x-a}{x+h-a}\cdot n-1}\cdot\frac{x+h-a}{n}}_{\text{见左页}} < \frac{x+h-a}{n}$$

$< |h| < \delta < \delta_0$. 于是 $\left|f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right) - f\left(a+\frac{k}{m}(x-a)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4(x-a)}$

于是 $|T_1| < \frac{\varepsilon}{4}$.

对于 T_2. $|T_2| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right)\right|\cdot\left|\frac{x+h-a}{n} - \frac{x-a}{m}\right|$

$$\leq n\cdot M\cdot\frac{x+h-a}{n\left(\frac{x-a}{x+h-a}n-1\right)} = M\cdot\frac{x+h-a}{n}\cdot\frac{1}{\frac{x-a}{x+h-a}-\frac{1}{n}}$$ ~~$M\cdot\frac{(x+h-a)^2}{x-a}\cdot\frac{1}{n}$~~

~~我们可假设 n 再大一点，使得 $\frac{x-a}{x+h-a}-\frac{1}{n} > 1$（若 $h>0$ 这自动成立，若 $h<0$，则要取较大的 n~~

$$\underbrace{< M\cdot|h|\cdot\frac{x+|h|-a}{x-|h|-a}}_{\text{见下页}} < 2M|h| < 2M\cdot\delta < \frac{\varepsilon}{8}.$$

$\frac{1}{n} < \frac{|h|}{x+h-a}$ $= \frac{x+h-a}{x-|h|-a}$

$\frac{1}{\frac{x-a}{x+h-a} - \frac{1}{n}} < \frac{1}{\frac{x-a}{x+h-a} - \frac{|h|}{x+h-a}}$

$\frac{x-a}{x+h-a}n - 1 < m < \frac{x-a}{x+h-a}n$

$\cancel{\frac{hn}{x+h-a}} < (n-m)\frac{x+h-a}{n} < \left(n - \frac{x-a}{x+h-a}n + 1\right)\frac{x+h-a}{n}$

$\Rightarrow h < (n-m)\frac{x+h-a}{n} < h + \frac{x+h-a}{n}.$

对于 T_3, $\left|\sum_{k=m}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(x+h-a)\right)\frac{x+h-a}{n}\right|$

$\le M\cdot(n-m)\cdot\frac{x+h-a}{n}$ 注意

$\underbrace{h < (n-m)\frac{x+h-a}{n} < h + \frac{x+h-a}{n}}_{见左页}$ 所以 $|T_3| \le 2M|h| < \frac{\varepsilon}{8}$.

最后, $|S(f;a,x+h) - S(f;a,x)|$

$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8}\right) = \varepsilon.$ □.

推论: 对于 $x \in (a,b)$. $S(f,x,b)$ 关于 x 是连续的.

证明: 考虑 $g: [-b,-a] \to \mathbb{R}$ $g(x) = f(-x)$.

$S_n(f,x,b) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}(b-x)\right)\frac{b-x}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(-x-\frac{k}{n}(b-x)\right)\cdot\frac{b-x}{n}$

$= \sum_{k=1}^{n} g\left(-b+\frac{k+1}{n}(b-x)\right)\cdot\frac{b-x}{n} = \tilde{S}_n(g,-b,-x).$

因此, $S(f,x,b) = S(g,-b,-x)$. 所以 $S(f,x,b)$ 关于 x 连续. □.

引理3. 对于(任意的) $x \in (a,b)$.

$S(f;a,x) + S(f;x,b) = S(f,a,b).$

证明: 设 $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$. 先考虑 $\lambda \in \mathbb{Q}$ 的情形. 对 $\forall \varepsilon > 0$.

取 N_1, N_2, N_3, 使得: $n > N_1 \Rightarrow |S_n(f;a,x) - S(f,a,x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$n > N_2$, $|S_n(f,x,b) - S(f;x,b)| < \frac{\varepsilon}{3}$. $n > N_3$, $|S_n(f,a,b) - S(f,a,b)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

取一个 $n > \max(\lambda N_1, (1-\lambda)N_2, N_3)+1$，且 $n\lambda \in \mathbb{N}$.

取 $m_1 = \lambda n$ $m_2 = (1-\lambda)n$，则 $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$，且 $m_1 > N_1, m_2 > N_2$.

于是 $|S(f; a, x) + S(f; x, b) - S(f; a, b)|$

$< \varepsilon + |\underbrace{S_{m_1}(f; a, x) + S_{m_2}(f, x, b) - S_n(f, a, b)}|$ 而

$$\sim = \sum_{k=0}^{m_1-1} f(a+\frac{b-a}{n}k)\cdot\frac{b-a}{n} + \sum_{k=m_1}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}\cdot k)\frac{b-a}{n}$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}k)\frac{b-a}{n} = 0.$$ 所以由 $\varepsilon \to 0$ 即可.

若 $\lambda \notin \mathbb{Q}$. 取一串 $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{Q}$，且 $\lambda_n \to \lambda$. $x_n = a + \lambda_n(b-a)$.

则有 $S(f, a, x_n) + S(f; x_n, b) = S(f, a, b)$. 令 $n \to \infty$. 由利

用 S 的连续性即可. □

(先猜后做)

定理：对于 $x \in (a, b)$ $\frac{d}{dx} S(f; a, x) = f(x)$.

证明：$\frac{d}{dx} S(f, a, x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(f; a, x+h) - S(f; a, x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{S(f; x, x+h)}{h}$

对 $\varepsilon > 0$ 取 $\delta > 0$ 使对 $\forall y \in B_\delta(x)$，有 $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 对于 $|h| < \delta$.

取 N，使 $n > N \Rightarrow |S_n(f; x, x+h) - S(f, x, x+h)| < \frac{\varepsilon}{2}|h|$. 于是

$$\left|\frac{S(f, x, x+h)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{S(f, x, x+h) - S_n(f, x, x+h)}{h} + \frac{S_n(f, x, x+h)}{h} - f(x)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x+\frac{k}{n}h) - f(x)\right| < \varepsilon.$$ □

映射

定理：[illegible] $D: C'[a,b]/\ker(D) \longrightarrow C[a,b]$ 是一个同构，其逆映射由 $f \longmapsto \int_a^x f(t)dt + C$ 给出.

牛顿-莱布尼兹公式（先微后积）

推论：~~若f有原函数F(x)~~ 设 $f \in C[a,b]$. 若已知 $f(x) = F'(x)$，则 $S(f;a,b) = F(b) - F(a)$.

证明：$\frac{d}{dx} S(f;a,x) = \frac{d}{dx} F(x)$，所以 $S(f;a,x) = F(x) + C$. 注意当 $x=a$ 时 $S(f;a,x)=0$，于是 $C = -F(a)$，所以 $S(f,a,x) = F(x) - F(a)$，再取 $x=b$ 即可. □

上述结论又可总结为如下定理.

~~定理：设 $A = C'[a,b]$，$B = C[a,b]$ [illegible] $D: A \to B$，$f(x) \longmapsto f'(x)$，$S: B \to A$，$f(x) \longmapsto \int_a^x f(x)dx$ kerD. [illegible] 则有同构 $A/C \xrightarrow{\tilde{D}} B$. 其中 $\tilde{D}$ 是由 D 诱导的映射，$\tilde{S} = \pi \circ S$，其中 π 为 $A \to A/C$ 的投射.~~

§4.2 Riemann 积分

牛顿和莱布尼茨并未给出积分的严格定义，甚至柯西也没能完整地给出. 历史上第一个严格的积分理论是黎曼给出的. 与上节的等分区间法相比，黎曼的构造主要有两个改变：①区间不再是等分的，可以按任意方式分割，② 函数的取值也不再要求为区间左端点，任意一点都可以. 这样的改变有两个好处：首先定义允许更宽松的条件，使各种证明可以得以简化，其次，函数不再要求是连续的. 也有一些缺点，例如定义本身变得比较繁

~~一个分割等价于给定一组[illegible]的~~ →

一个分划也常用相应的闭区间组 $\{I_i\}_{i=1-n}$ $I_i=(x_{i-1},x_i)$ 表示. 标记点 $\xi_i\in I_i$. 一个带标记的分划又可记为 $\{(I_k,\xi_k)\}_{k=1}^{n}$

记 $\|P\|=\max_{1\le i\le n}|I_i|$ 叫做 $\|P\|$ 的粒度. →

则 Riemann 积分可表示为 $\int_a^b f(x)dx := \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,\xi)$

一些显然的性质: ① $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)+g(x))dx$, ② $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ →

③ 若 $f(x)\ge g(x)$ $(\forall x\in I)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

别人新的问题产生了, 比如什么样的函数是 Riemann 可积的? 这个问题一直到勒贝格可积性定理才得到比较完善地解决. 我们将在下一节证明这一定理.

定义: ① 设 $I=[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间. I 的一个分划是指一个有限点列 $P=(x_0,\cdots,x_n)$ 满足

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

② I 的一个带标记的分划是指一个分划 $P=(x_0,\cdots,x_n)$ 和一个有限点列 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 满足 $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ $(i=1,2,\cdots n)$

③ 对于一个带标记的分划 (P,ξ), 定义

$$S(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|I_i|$$

叫做 f 关于带标记分划 (P,ξ) 的 Riemann 和.

④ 对于 $\delta>0$, 分划 P 叫做关于 δ 精细的, 如果 $|I_i|<\delta$, $i=1,2,\cdots,n$.

简称 δ 细

或 $\|P\|<\delta$.

⑤ 设 f 是 I 上的实值函数, $A\in\mathbb{R}$. 若对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何 δ-细的分划 P 以及 P 的一组标记点 ξ, 有

$$|S(f,P,\xi)-A|<\varepsilon,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 并记 $A=\int_a^b f(x)dx$.

⑥ I 上的 Riemann 可积函数全体记为 $R[a,b]$. 它显然是一个线性空间.

例 ① $f(x)=1$. $S(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=b-a$,

所以 $\int_a^b f(x)dx=b-a$.

② $f(x)=x$ $S(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x_i-x_{i-1})$，注意 $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$，所以

$\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}(x_i-x_{i-1})\le S\le\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-x_{i-1})$. 它可变形为

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i-x_{i-1})^2\le S-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i^2-x_{i-1}^2)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i-x_{i-1})^2$$

只要取 $A=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i^2-x_{i-1}^2)=\frac{b^2-a^2}{2}$. $\delta=\frac{2\varepsilon}{b-a}$，则有

$$|S-A|<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i-x_{i-1})^2<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i-x_{i-1})\delta=\frac{2\varepsilon}{b-a}\cdot\frac{b-a}{2}=\varepsilon.$$

所以 $\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$，这和N-L法的结果一致.

(必要条件)

引理：若 $f\in R[a,b]$，则f有界. (以后ξ

证明：设 $A=\int_a^b f(x)dx$. 于是对 $\varepsilon=1$ 存在 δ，使得对 $\forall\|P\|<\delta$，有 $|S(f,P,\xi)-A|<\varepsilon$. 于是

$$\varepsilon>|S(f,P,\xi)-A|=\left|f(\xi_1)|I_1|+\sum_{i=2}^{n}f(\xi_i)|I_i|-A\right|$$

$$\ge|f(\xi_1)||I_1|-\sum_{i=2}^{n}|f(\xi_i)||I_i|-|A|$$

所以 $|f(\xi_1)|<\frac{1}{|I_1|}\left(\varepsilon+|A|+\sum_{i=2}^{n}|f(\xi_i)||I_i|\right)$.

固定 $\xi_2,\cdots,\xi_n$，上式说明f在 I_1 上是有界的. 同理可得f在每个 I_i 上有界. 于是f在I上有界. □.

类比 N-L 积分中 $S_{n,m}-S_n$ 的计算过程 →

$\sup_{x,y}|f(x)-f(y)| = \sup_{x,y}(f(x)-f(y))$ = ~~$\sup_x f(x) -$~~ →

$=\sup_y\left(\sup_x f(x)-f(y)\right)=\sup_x f(x)-\inf_y f(y)=M-m.$

下面将给出可积性的几个充分必要条件，首先准备一些定义

定义：① 若 P, $\tilde{P}$ 是 I 的两个分划，若 P 的分划点集是 $\tilde{P}$ 的分划点集的子集，则称 $\tilde{P}$ 是 P 的一个加细 ~~等价地说，记 $I_1, \cdots, I_n$ 是 P 给出的小区间，则 $\tilde{P}$ 的每个小区间一定包含于某个 I_i 中，且包含于 I_i 的 $\tilde{P}$ 的小区间正好构成 I_i 自身的一个分割，所以 $\tilde{P}$ 中的小区间可用 i,j 来编号，其中 $I_{ij}\subseteq I_i$，且 $I_{i1},\cdots,I_{in_i}$ 构成 I_i 的分割，于是有 $|I_i|=\sum_{j=1}^{n_i}|I_{ij}|$~~

② 对于集合 E 上的有界函数 $f: E\to\mathbb{R}$，定义 $\omega(f,E)=\sup_{x,y\in E}|f(x)-f(y)|$，叫做 f 在 E 上的振幅. ~~若 f 有界，则 $\omega(f,E)$ 是有限数~~

若记 $M=\sup_{x\in E}f(x)$，$m=\inf_{x\in E}f(x)$，则 $\omega(f,E)=M-m$.

~~定理（振幅判据）设 f 在 I 上有界，则 $f\in R[a,b] \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. 对任何 δ-细的分割 P 有 $\sum_{i=1}^{n}\omega(f,I_i)|I_i|<\varepsilon$.~~

~~或可写为 $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f,I_i)|I_i|=0$.~~

~~证明：~~

③ 对于有界函数 $f: I\to\mathbb{R}$ 以及 I 的分划 P，定义

$\overline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i|I_i|$，$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i|I_i|$.

其中 $M_i=\sup_{x\in I_i}f(x)$，$m_i=\inf_{x\in I_i}f(x)$，于是

$0\le\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i|I_i|$，

$\omega_i=M_i-m_i=\omega(f,I_i)$.

可叫振幅和.

$\overline{S}$ 和 $\underline{S}$ 分别叫 Darboux 上和与 Darboux 下和.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

引理：设 $f: I \to \mathbb{R}$ 有界，P 是 I 的一个分划，$\tilde{P}$ 是 P 的一个加细，且 $\tilde{P}$ 的分划点比 P 的分划点多 l 个，则

$$\underline{S}(f,P) \le \underline{S}(f,\tilde{P}) \le \underline{S}(f,P) + l\omega\|P\|.$$

$$\overline{S}(f,P) \ge \overline{S}(f,\tilde{P}) \ge \overline{S}(f,P) - l\omega\|P\|.$$

其中 $\omega = \omega(f,I)$.

证明：只需证 $l=1$ 的情况。设 $P=(x_0,\cdots,x_n)$，$\tilde{P}$ 比 P 多了一个 x' 满足 $x_{i-1}<x'<x_i$。于是 $\underline{S}(f,P)$ 中的 $m_i|I_i|$ 在 $\underline{S}(f,\tilde{P})$ 中变为 $\underbrace{\left(\inf_{x\in[x_{i-1},x']} f(x)\right)}_{m_i'}(x'-x_{i-1}) + \underbrace{\left(\inf_{x\in[x',x_i]} f(x)\right)}_{m_i''}(x_i-x')$. 则 $m_i'\ge m_i$, $m_i''\ge m_i$

所以 $\underline{S}(f,\tilde{P})-\underline{S}(f,P) = m_i'(x'-x_{i-1}) + m_i''(x_i-x') - m_i|I_i|$

$$\ge m_i[(x'-x_{i-1})+(x_i-x')] - m_i|I_i| = 0.$$

另一方面，$\underline{S}(f,\tilde{P})-\underline{S}(f,P) \le M_i[(x'-x_{i-1})+(x_i-x')]-m_i|I_i|$

$$= \omega_i|I_i| \le \omega\|P\|.$$

对上和的证明是类似的。 □.

推论：设 P_1, P_2 是两个分划，则 $\underline{S}(f,P_1) \le \overline{S}(f,P_2)$

证明：设 P 是 P_1,P_2 的分点合并得到的新分划，则 P 是 P_1 的加细，也是 P_2 的加细，于是

$$\underline{S}(f,P_1) \le \underline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P) \le \overline{S}(f,P_2).$$ □.

根据推论，下和构成的集合有上界，上和构成的集合有下界

$\underline{A}$ 记为 $\underline{\int_a^b} f(t)dt$，$\overline{A}$ 记为 $\overline{\int_a^b} f(t)dt$. 则有

② $\overline{\int_a^b} f(t)dt + \overline{\int_a^b} g(t)dt \geq \overline{\int_a^b} (f(t)+g(t))dt$

① $\overline{\int_a^b}(-f(t))dt = -\underline{\int_a^b} f(t)dt$

③ $\underline{\int_a^b} f(t)dt + \underline{\int_a^b} g(t)dt \leq \underline{\int_a^b}(f(t)+g(t))dt$

④ 若 $c>0$. 则 $\overline{\underline{\int_a^b}} c f(t)dt = c\overline{\underline{\int_a^b}} f(t)dt$.

$\overline{\underline{\int}}$ 表示 $\overline{\int}$ 或 $\underline{\int}$

⑤ 若 $f \geq g$. 则 $\overline{\underline{\int_a^b}} f(t)dt \geq \overline{\underline{\int_a^b}} g(t)dt$.

⑥ $\left|\overline{\underline{\int_a^b}} f(t)dt\right| \leq \overline{\underline{\int_a^b}} |f(t)|dt$

⑦ $\overline{\underline{\int_a^b}} f(t) = \overline{\underline{\int_a^c}} f(t)dt + \overline{\underline{\int_c^b}} f(t)dt$.

iii)' 对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists P$ s.t. $|\overline{S}(f.P)-\underline{S}(f.P)| < \varepsilon$ →

证明: iii)'⇒i) $0 \leq \overline{S}-\underline{S} \leq \overline{S}(f.P)-\underline{S}(f.P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{S}=\underline{S}$.

iii)⇒iii)' 对ε取δ. 再取P即可.

于是可取确界: $\underline{A} = \sup_P \underline{S}(f.P)$. $\overline{A} = \inf_P \overline{S}(f.P)$

称为f在[a.b]上的Darboux上积分和Darboux下积分.

引理: $\lim_{\|P\|\to 0} \overline{S}(f.P) = \overline{A}$. $\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f.P) = \underline{A}$.

证明: 只证下和的情况: 由定义有 $\underline{A} = \sup_P \underline{S}(f.P)$.

于是对 $\forall\varepsilon>0$ 存在分割 P_0 使 $\underline{S}(f.P_0) > \underline{A}-\frac{\varepsilon}{2}$.

设 P_0 有k个属于(a.b)的分点. 取 $\delta < \frac{\varepsilon}{2k\omega}$. 对 $\forall \|P\| < \delta$

设 $\tilde{P}$ 是P和 P_0 合并得到的分割

于是 $\tilde{P}$ 比P至多多k个分点.

$\underline{A} \geq \underline{S}(f.P) \geq \underline{S}(f.\tilde{P}) - k\omega\|P\| \geq \underline{S}(f.P_0) - k\omega\|P\|$

$> \underline{A} - \frac{\varepsilon}{2} - k\omega\delta > \underline{A}-\varepsilon$.

所以 $\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f.P) = \underline{A}$. □

定理: 设f是I上的有界函数. 则以下等价

i) $f \in R[a.b]$.

ii) 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. $\forall P_1, P_2$ $\|P_1\|, \|P_2\| < \delta$. 以及 $\forall \xi_1 . \xi_2$ 有

(Cauchy准则) $|S(f.P_1.\xi_1) - S(f.P_2.\xi_2)| < \varepsilon$.

iii) (振幅判据) 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$. s.t. $\forall \|P\| < \delta$. 有

$\sum_{i=1}^{n} \omega(f.I_i)|I_i| < \varepsilon$. 即 $\lim_{\|P\|\to 0}(\overline{S}(f.P) - \underline{S}(f.P)) = 0$.

iv) (Darboux 判据) $\underline{A} = \overline{A}$.

证明：i) ⇒ ii) [illegible] 设 $\int_a^b f(x)dx = A$. 则对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

使得对 $\|P_1\|, \|P_2\| < \delta$. 任取 ξ 有 $|S(f.P_1\ \xi_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$|S(f.P_2.\xi_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $|S(f.P_1.\xi_1) - S(f.P_2.\xi_2)| < \varepsilon$.

ii) ⇒ iii) 在 ii) 中取 $P_1 = P_2 = P$. 则对 $\forall \xi_1.\xi_2$. 有

$$|S(f.P.\xi_1) - S(f.P.\xi_2)| < \varepsilon.$$

即 $$\left|\sum_{i=1}^{n} (f(\xi_{1,i}) - f(\xi_{2,i}))|I_i|\right| < \varepsilon$$ [illegible] (若不然. 交换它们的

对一切 $\xi_{1,i}. \xi_{2,i} \in I_i$ 成立. 不妨设 $f(\xi_{1,i}) > f(\xi_{2,i})$. 角色)

于是 $\sum_{i=1}^{n} (f(\xi_{1,i}) - f(\xi_{2,i}))|I_i| < \varepsilon$. 取 $f(x) - f(y)$ 的上确界得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f.I_i)|I_i| < \varepsilon.$$

iii) ⇒ iv). 对于 $\forall \varepsilon > 0$. 存在 $\delta > 0$ 使得 $\forall \|P\| < \delta$. 有

$\sum_{i=1}^{n} \omega(f.I_i)|I_i| < \varepsilon$ 取定一个这样的 P. 则有

$$0 \le \overline{A} - \underline{A} \le \overline{S}(f.P) - \underline{S}(f.P) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f.I_i)|I_i| < \varepsilon.$$

所以 $\overline{A} = \underline{A}$. 以及 ξ

iv) ⇒ i) 设 $A = \overline{A} = \underline{A}$. 则对任意的分割 P, 有

~~$\underline{S}(f.P) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|I_i| \le \overline{S}$~~

$$\underline{S}(f.P) \le S(f.P.\xi) \le \overline{S}(f.P)$$

当 $\|P\| \to 0$ 时 ~~$0 \le \overline{S}(f.P) - \underline{S}(f.P) \to 0$. 得~~

$\underline{S}\to\underline{A}=A$. $\overline{S}\to\overline{A}=A$. 于是 $S\to A$. □

推论: ① 若 f 单调, 则 $f\in R[a.b]$

② 若 $f\in C[a,b]$, 则 $f\in R[a.b]$

③ 若 $f\in C[a.b)$. 则 f 的 NL积分和 R积分相同.

证明: ① 不妨设 f 递增. 若 $f(a)=f(b)$. 则 f 为常数. 自然可积.

若 $f(a)<f(b)$. 对于 $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. 则对于任意 δ 细的分划 P

$\sum_{i=1}^{n}\omega(f.I_i)|I_i| = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))(x_i-x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot\delta$

$= (f(b)-f(a))\cdot\delta = \varepsilon$. 所以可积.

② 因为 f 一致连续. 所以 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. $\forall s.t\in I$, $|s-t|<\delta$ 有 $|f(s)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. 对于一个 δ 精细的分划 P.

$\sum_{i=1}^{n}\omega(f.I_i)|I_i| = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)|I_i| = \sum_{i=1}^{n}(f(s_i)-f(t_i))|I_i|$

$< \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)|I_i| = \varepsilon$. 所以可积.

~~③ 对 $\forall\varepsilon>0$. 存在 $n\in N$. 使 $|S_n(f;a.b)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. 存在 P. 使 $|S(f.P.\xi)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $S_n(f;a.b)-$~~

③ 对 $\forall\varepsilon>0$. 存在 N. 使 $\forall n>N$. 有 $|S_n(f;a.b)-A_1|<\frac{\varepsilon}{2}$.

存在 $\delta>0$ 使得任何关于 δ 细的分划 P 有 $|S(f.P,\xi)-A_2|<\frac{\varepsilon}{2}$.

现在取一个 n, 使 $\frac{b-a}{n}<\delta$. 于是 $x_i=a+i\frac{b-a}{n}$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 构成一个 δ 细的分划. 取 $\xi_i=x_{i-1}$. 于是 $S_n(f;a.b)=S(f.P.\xi)$. 所以

$|A_1-A_2| < |S_n(f.a.b)-A_1| + |S(f.P.\xi)-A_2| < \varepsilon$. □

且有 $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. →

~~证明: 对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ 使 $\|P\|<\delta$ 有 $|S(f,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx|<\varepsilon$~~
~~现在考虑包含 c 点的 P. 则它给出了 $[a,c]$ 和 (c,b) 的两个分割 P' 和 P''. 且有 $\|P'\|<\delta$ $\|P''\|<\delta$. 以及 $S(f,P,\xi)=S(f,P',\xi')+S(f,P'',\xi'')$~~
~~所以我们有 $|S(f,P',\xi')+S(f,P'',\xi'') - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$. 对 P~~

证明: 对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta$. 使 $\forall [a,b]$ 的 δ 细分割 P
有 $|S(f,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}$. 对 $\forall [a,c]$ 的 δ 细分割 P'
有 $|S(f,P',\xi') - \int_a^c f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}$. 对 $\forall [c,b]$ 的 δ 细分割 P''.
有 $|S(f,P'',\xi'') - \int_c^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{3}$. 现在考虑 $[a,b]$ 的一个包含 c 点的 δ 细分割 P. 则它诱导了 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的两个分割 P' 和 P''. 且有 $\|P'\| \le \|P\|$ $\|P''\| \le \|P\|$. 所以 P' 和 P'' 都是 δ 细的. 此时有 $S(f,P,\xi) = S(f,P',\xi') + S(f,P'',\xi'')$. 所以

$$\left|\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^c f(x)dx - S' + \int_c^b f(x)dx - S'' - \int_a^b f(x) + S\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \square$$

(与等分区间时证法类似. 只不过无需分有理无理讨论了)

其它性质: ① 若 $f \in R[a,b]$. 则 $|f| \in R[a,b]$. 且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

② 对 I 的任何子区间 $[c,d]$. 若 $f \in R[a,b]$, 则 $f \in R[c,d]$.

③ 若 $f, g \in R[a,b]$. 则 $f \cdot g \in R[a,b]$

证明①: 因为 $||f(x)|-|f(y)|| \le |f(x)-f(y)|$ 所以 $\omega(|f|, I_i) \le \omega(f, I_i)$. 所以 $|f| \in R[a,b]$. 接下来. 注意 $|S(f,P,\xi)| \le S(|f|,P,\xi)$. 两边对 P 取 $\|P\| \to 0$ 的极限即可.

② 由 $f \in R[a,b]$ 知. 对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$. s.t. $\forall P$, $\|P\|<\delta$, 有 $\sum_{i=1}^n \omega(f,I_i)|I_i| < \varepsilon$. 现在考虑 $[c,d]$ 的一个分割 P_0. 满足 $\|P_0\|<\delta$. 在 $[a,b]\setminus[c,d]$ 中添加一些点, 使得它们和 P_0 构成 $[a,b]$ 的一个 δ 细的分割. 设 P_0 对应的小区间是 $I_k \cdots I_{k+l}$. 则有 $\sum_{i=k}^{k+l} \omega(f,I_i)|I_i| < \sum_{i=1}^n \omega(f,I_i)|I_i| < \varepsilon$. 所以 $f \in [c,d]$.

③ 设 $M = \sup_{x\in I} |f(x)|$. 对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta$ 使对 $\forall \delta$ 细的 P 有 $\sum_{i=1}^n \omega(f,I_i)|I_i| < \frac{\varepsilon}{2M}$. 现在考虑 $f^2(x)$. 注意 $|f^2(x_1) - f^2(x_2)|$
$= |f(x_1)+f(x_2)||f(x_1)-f(x_2)| \le 2M|f(x_1)-f(x_2)|$. 所以
$\sum_{i=1}^n \omega(f^2,I_i)|I_i| \le 2M\sum_{i=1}^n \omega(f,I_i)|I_i| < \varepsilon$. 于是 f^2 可积.

对于 $f, g \in R[a,b]$. $f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right) \in R(a,b)$. $\square$

~~下面考虑要~~ 由上述性质②. 对 $f \in R[a,b]$ 及 $\forall x \in (a,b]$. $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 存在. 于是可以进一步考虑 $F(x)$ 的各种性质

补充③：且有 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

证明：$F_\lambda(x)=(f(x)-\lambda g(x))^2$. 则 $\int_a^b F_\lambda(x)dx \ge 0$. □

以及Hölder不等式 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1\le p\le\infty$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

先积分再求导OK. 但是反过来先求导再积分未必可行

Volterra构造了一个函数. 它处处可导, 且导函数有界. 但导函数不是Riemann可积的 (~~[illegible]~~ 1877 ~~[illegible]~~)

~~定理：设F∈C[a,b]. 且F在(a,b)上可导. f∈R[a,b]~~

~~且对∀x∈(a,b). F'(x)=f(x). 则~~ (细节见下页)

定理：设F在[a,b]上可导 $f=F'$ 在[a,b]上可积, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

证明：任取一个分割P. 则 $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n (F(x_i)-F(x_{i-1}))$

由中值定理 $F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$, 于是

$\underline{S}(f,P) < F(b)-F(a)=S(f,P,\xi) < \overline{S}(f,P)$ 对P取极限得

$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$. □

实际上可证Lipschitz连续.

引理. F(x)是连续的. (若定义 $U(x)=\overline{\int_a^x} f(t)dt$. $L(x)=\underline{\int_a^x} f(t)dt$. 则 U. L也连续)

证明：即证明 $\lim_{h\to0}(F(x_0+h)-F(x_0))=0$. 而 $|F(x_0+h)-F(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx\right|$

$\le \int_{x_0}^{x_0+h}|f(x)|dx \le M\cdot h\to0$, 其中 $M=\sup\limits_{x\in I}|f(x)|$. □

定理：设 $f\in R[a,b]$. $x_0\in(a,b)$. 若f在 x_0 连续则F在 x_0 可导.

且 $F'(x_0)=f(x_0)$. ($U'(x_0)=L'(x_0)=f(x_0)$. 证法类似)

证明：$\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)=\dfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt-\dfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(x_0)dt$

$=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt$. 因为f在 x_0 处连续 所以对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$

使得当 $|t-x_0|<\delta$ 时. 有 $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$. 于是对于 $|h|<\delta$. 有

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt\right|\le\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt$$

$<\frac{1}{h}\varepsilon\cdot h=\varepsilon$. 所以 $F'(x_0)=f(x_0)$. □

~~推论. ① 若 $f\in C[a,b]$. 则 $F\in C^1[a,b]$. 且 $F'=f$.~~ $\int_a^x f(t)dt$

~~② 若 $f=F'$. 则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$~~

~~推论: ① 若 $f\in C[a,b]$. 则 $F(x)=\int_a^x f(x)dx\in C[a,b]$ 且 $F'(x)=f(x)$.~~

~~② 若F可导且 $F'\in R[a,b]$.~~

利用上述定理很容易得到连续情况的微积分基本定理. 接下来的

例 (非 Riemann 可积的有界导数) 首先回忆一下 Cantor 集的构造. 从 $[0,1]$ 开始, 先去掉中间 $\frac{1}{3}$ 的开区间, 得到两个闭区间的并 $[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. 再从剩下的两段中分别去掉它们的 $\frac{1}{3}$, 得到四个闭区间的并 $[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$. 依次类推. 最后剩下的就是 Cantor 集. 易知 K 是零测集. $|K|\leq|\mathbb{R}|$. 且 K 无处稠密.

下面考虑所谓的胖 Cantor 集. 构造方法类似, 但每次挖去的区间长度不再是 $\frac{1}{3^n}$ 而是 $\frac{1}{4^n}$. 这样挖去的总长度为

$$\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4^2}+4\times\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{1}{2}.$$

所以胖 Cantor 集不是零测的.

记挖去的区间依次为 $I_1, I_2, \ldots$. 在 I_n 的中心取一个闭区间 J_n, 满足 $|J_n|=|I_n|^2$. ~~在 I_n 上任取一个连续函数. 它在~~ 下面构造一

若将可数改为有限, 它叫 Jordan 零测集. 这是一个 → 没什么用的概念

个函数 $f: I\to\mathbb{R}$, 它在每个 I_n 上连续. 在 I_n 中点取 1. 在 $K\cup\bigcup_{n=1}(I_n\setminus J_n)$ 上取零. 且取值总在 0, 1 之间. 接下来可以证明:

1. f 在 K 上不连续. 因为 K 非零测. 所以 f 不是 R 可积的.
2. 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则 $F'(x)=f(x)$. 所以 f 是一个有界的导函数.

如果允许 f′ 无界, 则简单得多. 取 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 即可.

另外, 根据 Darboux 定理, 若 f 有第一类间断点, 则一定没有原函数. 所以"有原函数"和"Riemann 可积"互不包含.

问题是如果去掉连续的条件会如何? 这包含两个问题.

① 若 f 非连续, 则 F 未必可导. 求 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ 是否还有意义?

② 若 F 可导, 但 F′ 非连续, 则是否有 $f\in R[a,b]$, 且 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$?

我们将在下两节中继续讨论这些问题

§4.3 Lebesgue 定理

Lebesgue 定理是对 Riemann 可积性的一个更精细的刻画. 用它可直接推出上一节中用振幅判据证明的那些结论.

首先引入一个概念

定义 设 $X\subseteq\mathbb{R}$. 若对 $\forall\varepsilon>0$, 存在开区间 $I_1, I_2, \cdots$ 构成 X 的开覆盖, 且 $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\varepsilon$. 则称 X 为 Lebesgue 零测度集, 简称零测集.

例: ① 空集是零测集 ② 有限或可数点集是零测集 ([illegible]是零测集)
③ Cantor 集是零测集 ④ 长度非零的区间不是零测集.

性质: ① 若 $X_1, X_2, \cdots$ 是零测集, 则 $\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k$ 也是零测集.
② 若 $Y\subseteq X$. X 是零测集. 则它是零测集.

定理 (Lebesgue) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界. 则 $f\in R[a,b]\iff$ f 的不连续点构成一个零测集.

~~$\omega(f, x_0) = \limsup_{x\to x_0} f(x) - \liminf_{x\to x_0} f(x)$ (一) (之前的某次作业~~

~~于是引理2显然~~

~~首先利用振幅给连续性的一个刻画.~~

~~引理1. 对于 $x_0 \in I$. 记 $\omega(f, x_0) = \lim_{r\to 0^+} \omega(f, B_r(x_0))$, 则 $\omega(f, x_0) = \limsup_{x\to x_0} f(x) - \liminf_{x\to x_0} f(x)$ 理[illegible]~~

首先利用振幅给出连续性的一个方便的刻画.

引理1. 对于 $x_0 \in I$. 记 $\omega(f, x_0) = \lim_{r\to 0^+} \omega(f, B_r(x_0))$. (因为单调递减有下界所以极限存在. ~~[illegible]~~) 则 f 在 x_0 处 连续 ⟺ $\omega(f, x_0) = 0$.

证明: 连续 ⟺ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.t. ~~[illegible]~~ $x, y \in B_\delta(x_0)$. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ~~$\omega(f, B_\delta(x_0)) < \varepsilon$~~.

⟺ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall 0 < r < \delta$. $\omega(f, B_r(x_0)) < \varepsilon$ ⟺ $\omega(f, x_0) = 0$. □

对于 ~~[illegible]~~ $n \in \mathbb{N}$. 记 $D_m(f) = \{x \in I \mid \omega(f, x) > \frac{1}{m}\}$. $D(f) = \{x \in I \mid f$ 在 x 处不连续$\}$

那么显然有 $D(f) = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$. 于是 $D(f)$ 是零测集 ⟺ 对 $\forall m \in \mathbb{N}$. D_m 是零测集.

~~引理1: 对 $\forall x_0 \in I$ [a, b], $\lim_{r\to 0^+} \omega(f, B_r(x_0))$ 存在. 它叫 f 在 x_0 处的振幅. 记为 $\omega(f, x_0)$.~~

~~证明: $\omega(f, B_r(x_0)) \geq 0$. 因为若 $r_1 < r_2$. 则 $B_{r_1}(x_0) \subseteq B_{r_2}(x_0)$. 于是 $\omega(f, B_{r_1}(x_0)) \leq \omega(f, B_{r_2}(x_0))$. 所以 $\omega(f, B_r(x_0))$ 关于 r 单调递减有下界. 所以极限存在. □~~

~~引理2. f 在 $x_0 \in I$ 处连续 ⟺ $\omega(f, x_0) = 0$.~~

~~证明: ⟹ 若 f 在 x_0 处连续 则由 Cauchy 准则. 对 $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0$. s.t. 当 $x, y \in B_\delta(x_0)$ 时. 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 于是 $\omega(f, B_\delta(x_0)) < \varepsilon$. 于是对 $\forall r < \delta$. 有 $\omega(f, B_r(x_0)) < \varepsilon$. 所以 $\lim_{r\to 0^+} \omega(f, B_r(x_0)) = 0$.~~

~~⟸ 若 $\omega(f, x_0) = 0$. 则 对 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$. s.t. $\forall 0 < r < \delta$ 有 $\omega(f, B_r(x_0)) < \varepsilon$ 于是对 $\forall x, y \in B_r(x_0)$. $|f(x) - f(y)| < \omega(f, B_r(x_0)) < \varepsilon$. 所以 f 在 x_0 连续!~~

~~对于 $\delta > 0$. 记 $D_\delta = \{x \in I \mid \omega(f, x) \geq \delta\}$. $D(f) = \{x \in I \mid$ f 在 x 处不连续$\}$.~~

~~引理3. $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$~~

~~证明: 由引理2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}} \subseteq D(f)$. 反之. 对于 $\forall x \in D(f)$. 则 $\omega(f, x) > 0$. 于是存在 $n \in \mathbb{N}$. s.t. $\frac{1}{n} < \omega(f, x)$. 于是 $x \in D_{\frac{1}{n}}$. □~~

~~(Cousin) 引理4. 设 $\delta: I\to\mathbb{R}$ 满足 $\delta(x)>0$. 则存在 I 的带标记分划 (P,ξ) 使 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$.~~

~~证明:~~

引理2. (Cousin) 设 $\delta: I\to\mathbb{R}$ 满足 $\delta(x)>0$. ($\forall x\in I$). 则存在 I 的带标记分划 (P, ξ), 使 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$ $(i=1\cdots n)$.

证明: 用区间套的证法. 将 I 二等分: $I=I'\cup I''$. 于是 δ 也是 I' 和 I'' 上的恒正函数. 若在 I' 和 I'' 上有符合要求的分划, 则它们的并就给出 I 上的符合要求的分划. 所以 若 I 上没有这样的分划, 则 I' 和 I'' 之中至少有一个也没有. 记它为 I_1. 将 I_1 再作二等分, 则又有 I_2 没有这样的分划. 如此继续, 得区间套 $I=I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$. 于是存在唯一的 $t\in\bigcap_{k=0}^{\infty}I_k$. 因为 $\lim_{k\to\infty}|I_k|=0$. 所以必然有 k 使 $|I_k|<\delta(t)$. 于是 $I_k\subseteq B_{\delta(t)}(t)$, 即 (I_k, t) 本身就构成 I_k 的符合要求的分划. 矛盾 □.

Lebesgue 定理的证明: ⇒ 只要证 对 $\forall m\in\mathbb{N}$ $(m\neq 0)$ D_m 是零测集, 对 $\forall\varepsilon>0$. 存在 I 的分划 P, 使得 $\sum_{k=1}^{n}\omega(f,I_k)|I_k|<\frac{\varepsilon}{2m}$. ~~设 $D_m'=D_m-P$. 因为 P 是有限集~~ ~~所以只要证~~ 设 $D_m'=D_m-P$. 因为 P 有限. 所以总可被长度和小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的开区间盖住. 接下来只要证明 D_m' 也可被这样的开区间盖住即可. 将 I_k 分为两类: 与 D_m' 相交的和与 D_m' 不相交的. 记

$T=\{k\in\{1,\cdots,n\} \mid I_k\cap D_m'\neq\varnothing\}$.

于是有 $D_m'\subseteq\bigcup_{k\in T}I_k$ 接下来我们证明 $\sum_{k\in T}|I_k|<\frac{\varepsilon}{2}$.

对于$k\in T$，任取一个 $x\in D_{\frac{1}{m}}\cap I_k$，则有 $\omega(f,x)>\frac{1}{m}$. 因为x不是I_k的端点. 所以存在 $\delta>0$ 使 $B_\delta(x)\subseteq I_k$. 于是 $\omega(f,I_k)\geq\omega(f,B_\delta(x))\geq\omega(f,x)>\frac{1}{m}$

所以有 $\sum_{k\in T}|I_k|<m\cdot\sum_{k\in T}\frac{|I_k|}{m}<m\sum_{k\in T}\omega(f,I_k)|I_k|<m\cdot\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon$. 必要性证完.

$\Leftarrow$：设 $\omega(f,I)=\omega$. 因为$D(f)$零测. 所以对$\forall\varepsilon>0$. 存在 $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ s.t. $D(f)\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}J_k$. $\sum_{k=1}^{\infty}|J_k|<\frac{\varepsilon}{2\omega}$. ~~对于~~ 现在定义一个正值函数 $\delta:I\to\mathbb{R}$:

① 若 $x\in D(f)$. 则x属于某个J_k. 于是存在δ_1，使 $B_{\delta_1}(x)\subseteq J_k$. 定义 $\delta(x):=\delta_1$.

② 若 $x\notin D(f)$. 即f在x处连续. 于是存在δ_2，使 $\omega(f,B_{\delta_2}(x))<\frac{\varepsilon}{2|I|}$.

根据Cousin引理，存在一个I的带标记分割 $(\{I_i\},\xi_i)_{i=1}^{n}$ 满足 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$. 记 $T=\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid\xi_i\in D(f)\}$. 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f,I_i)|I_i|=\sum_{i\in T}\omega(f,I_i)|I_i|+\sum_{i\notin T}\omega(f,I_i)|I_i|$$

$$<\sum_{i\in T}\omega\cdot|I_i|+\sum_{i\notin T}\frac{\varepsilon}{2|I|}|I_i|$$

$$<\omega\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|J_k|+\frac{\varepsilon}{2|I|}\cdot|I|<\omega\cdot\frac{\varepsilon}{2\omega}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\qquad\square$$

推论：① 连续函数Riemann可积 ($D(f)=\phi$).

② 单调函数Riemann可积 ($D(f)$可数).

③ 若 $f\in R[a,b]$. 则 $f\in R[c,d]$. 若 $[c,d]\subseteq[a,b]$.

(零测集的子集仍是零测集)

Date:
Place:

Reminders

例：① 若 $f(x)\geq 0$. $\int_a^b f(x)dx=0$. 则 $f(x)=0$ a.e.

证明：假设 $D=\{x\in I \mid f(x)>0\}$ 不是零测集. 于是必有 $x\in D$ 使 f 在 x 处连续. 于是有 x 的邻域 $B_r(x)$, f 在 $B_r(x)$ 上恒 $>\overset{f(x)-\varepsilon}{0}$. 于是 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_{x-r}^{x+r} f(x)dx > 2r(f(x)-\varepsilon)>0$, 矛盾. □

② 若 $f=0$ a.e., 则 $\int_a^b f(x)dx=0$.

证明：~~对 $\varepsilon>0$. 用 $\{J_n\}$ 将 $D=\{x\in I \mid f(x)\neq 0\}$ 覆盖. 于是~~ 且 $\sum|J_n|<\varepsilon/M$

~~$\left|\int_a^b f(x)dx\right| < M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon$.~~ 见下页. □

推论：若 $f=g$ a.e., 则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

③ $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$. "=" 成立当且仅当存在 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 使 $\lambda f+\mu g=0$ a.e. 在 x 的某一开邻域上恒有 $f(x)>g(x)$. 矛盾. □

④ 若 $f,g\in C[a,b]$. $f=g$ a.e., 则 $f=g$. 证明：若 $f(x)-g(x)=a>0$. 则

错误的定理：设 F 在 I 上连续. F 可导 a.e. 且 $f=F'$ a.e. 连续. 则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

反例：Cantor 函数.

解决办法：将"连续"换成"Lipschitz 连续" 此时 a.e. 可导可去掉 (Lebesgue 微分定理).

$C^1\subseteq$ L-连续 $\subseteq$ 一致连续 $\subseteq$ 连续.

L-连续 $\subseteq$ 绝对连续 $\subseteq$ 有界变差 $\subseteq$ 几乎处处可微.

Date:
Place:

Reminders

定义：设 $P(x)$ 是依赖变量 $x\in\overset{I}{(a,b)}$ 的命题. 若 $D=\{x\in I \mid P(x)$ 不成立$\}$ 是一个零测集. 则称 P 在 I 上几乎处处成立 (a.e.).

于是 Lebesgue 定理又可叙述为：$f\in R[a,b] \Longleftrightarrow f$ 连续 a.e.

(先积再微)

定理：设 $f\in R[a,b]$. $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则 F 几乎处处可导. 在不可导点随意规定 F' 的值, 则有 $F'(x)=f(x)$ 几乎处处成立.

接下来, 自然的问题是先微后积是否正确. 或者说 N-L 公式. 先看个例子

~~例：回忆一下 Cantor 集 C 的构造. 设 $I=[0,1]$. 将 $x\in I$ 表示成 3 进制小数 $x=0.a_1a_2\cdots$. (注意我们允许非标准的表示. 例如 $1=0.222\cdots$), C 定义为 $C=\{x\in I \mid a_n\neq 1\}$. 下面定义一个函数 $G: I\to I$, 规定若 $x\in C$, 将 x 写为 $x=\sum 2\cdot 3^{-n_i}$, 则 $G(x)=\sum 2^{-n_i}$. 接下来. 注意到~~

例：先回忆一下 Cantor 集的构造. 设 $I=[0,1]$. 将 $x\in I$ 表示为 3 进制小数 $x=0.a_1a_2\cdots$ (注意我们允许非标准小数. 例如 $1=0.222\cdots$), Cantor 集 C 定义为 $C=\{x\in I \mid a_n\neq 1,\ \forall n\}$. 它也可按如下方式构造:

接上页：② $f\in R[a,b]$. $f=0$ a.e. 求证 $\int_a^b f(x)dx=0$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta_0>0$ 使得对任意 $\|P\|<\delta_0$. 以及ξ有

$$\left|\int_a^b f(x)dx-S(f,P,\xi)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $E=\{x\in I\mid f(x)\neq 0\}$. E零测. 于是存在 $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}J_i$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty}|J_i|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 其中 $M=\sup_{x\in I}|f(x)|$. 现在定义 $\delta: I\to\mathbb{R}$ $x\mapsto\delta(x)$, 其中 $\delta(x)=\begin{cases}\min(\delta_x,\delta_0/2) & x\in E\\ \delta_0/2 & x\notin E\end{cases}$ (δ_x 使 $B_{\delta_x}(x)\subseteq J_k$ (对某k)), 则由Cousin引理得~~[illegible]~~分划 (P,ξ). 它自动是δ_0细的. 于是

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\left|\int_a^b f(x)dx-S(f,P,\xi)\right|+|S(f,P,\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}+\left|\sum_{\xi_i\in E}f(\xi_i)|J_i|\right|<\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\ \square$$

若取 $x=(0.\overset{\text{0或2}}{a_1\cdots a_{n-1}}\,1\,2)_3$, $y=(0.a_1\cdots a_{n-1}\,2\,2)_3$.

则 $G(x)=(0.\frac{a_1}{2}\cdots\frac{a_{n-1}}{2}1)_2$, $G(y)=(0.\frac{a_1}{2}\cdots\frac{a_{n-1}}{2}11)_2$.

所以 ~~[illegible]~~ $|x-y|=\frac{1}{3^n}$. $|G(x)-G(y)|=\frac{1}{2^{n+1}}$. 所以不可能存在 M 使 $|G(x)-G(y)|<M|x-y|$ 对 $\forall x,y\in I$ 成立. 因此G不是L连续的.

几乎处处可导且导数几乎处处为零的函数叫奇异函数. →

事实上可以证明 对 $\forall x,y\in[0,1]$.

$|G(x)-G(y)|\le|x-y|^{\alpha}$. $\alpha=\frac{\log 2}{\log 3}$. 所以 G 是$\alpha$-Hölder连续

简单证法：既然R可积. 只对任一分划取ξ处于E之外即可. □

先从I中去掉中间$\frac{1}{3}$. 即去掉所有~~[illegible]~~ $a_1=1$ 的x. 然后从剩下的两段中再去掉$\frac{1}{3}$. 即去掉所有 $a_2=1$ 的x. 因为此时 $a_1=0$或2. 所以是两段. 下面依次类推, 最后剩下的集合即C.

下面定义一个单调增函数 $G:[0,1]\to[0,1]$. 首先规定, 若$x\in C$, $x=0.a_1a_2\cdots$, 将所有a_n中的2替换成1. 然后再将其视为2进制数所得结果即$G(x)$. 或者可以~~[illegible]~~这样做. 记 $A=\{n\in\mathbb{N}\mid a_n=2\}$. 于是 $x=\sum_{n\in A}\frac{2}{3^n}$. 则定义 $G(x)=\sum_{n\in A}\frac{1}{2^n}$. 注意对于一个被去掉的开区间. 它的左端点比如是 ~~[illegible] 右端点~~ $x=0.a_1a_2\cdots a_m1=0.a_1a_2\cdots a_m022\cdots$, 右端点是 y $0.a_1a_2\cdots a_m122\cdots=0.a_1a_2\cdots a_m2$. ~~[illegible]~~ $x,y\in C$. 根据G的定义, $G(x)=0.\frac{a_1}{2}\cdots\frac{a_m}{2}011\cdots1=0.a_1\cdots a_m1$. $G(y)=0.\frac{a_1}{2}\cdots\frac{a_m}{2}1$. 所以 $G(x)=G(y)$. 因为G是单调的, 所以对于 $\forall x<z<y$, 有 $G(z)=G(x)$. 所以G的图像由无穷多个部分组成, 它也叫魔鬼楼梯

对于 $\forall x\in I\setminus C$. G在x的一个邻域内是常数, 所以 $G'(x)=0$. 注意C是零测集. 所以 G a.e.可导. 且 $G'=0$ a.e. 于是 $\int_0^1 G'(x)dx=\int_0^1 0dx=0$. 但是另一方面, $G(1)-G(0)=1$. 所以 $\int_0^1 G'(x)dx\neq G(1)-G(0)$. 即 NL公式对G~~[illegible]~~和G'不成立. □

前面证明过, R可积函数的变上限积分是Lipschitz连续的. 上例的函数不是Lipschitz的. 这是NL公式失效的原因.

L连续 ⇒ a.e.可导. →

定理的证明: 设 $G(x)=\int_a^x f(x)dx$, 则 G L连续. a.e可导.

且 $G'(x)=f(x)=F'(x)$ (a.e) 于是 $G(x)-F(x)$ [illegible] $= C$.

取 $x=a \Rightarrow C=-F(a)$. 于是 $\int_a^b f(x)dx = G(b) = F(b)-F(a)$. □

此外用到 L连续 ⇒ ae可导, 这是个非平凡的结果 →

所以此证明仍不够初等. (不过可以把ae可导做为条件, 但那样就[illegible])

Lebesgue定理充分性的

新证明: 设 f有界, ae连续, 则 f R可积

设 $F(x)=\overline{\int_a^x} f(t)dt-\underline{\int_a^x} f(t)dt$. f有界 ⇒ F L连续.

f ae连续 ⇒ F ae可导. 且有 $F'=0$ ae, 于是F是常数.

注意 $F(a)=0$ 所以 $F(x)\equiv 0$. 于是上、下积分始终相等. 所以 f R可积. □

~~定理(先微分后积) 设F在[a.b]上Lipschitz连续. f在[a.b]上Riemann可积, 且 $f=F'$ a.e., 则 $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$~~

~~定理(先微分后积) 设F在[a.b]上Lipschitz连续, 于是F几乎处处可导. 设 $f=F'$ (在不可导点随意定义f的值). 若f~~

定理(先微分后积) 设F在[a.b]上Lipschitz连续(于是a.e.可导), 且 $f=F'$ 在[a.b]上 R可积. 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

先证明一个引理(它事实上还可推出Lebesgue定理)

引理: 设 $h:[a.b]=I\to\mathbb{R}$ Lipschitz连续, 且 $h'(x)=0$ a.e. 则h是常数.

证明: 我们的目标是证明对 $\forall x\in I$ 及 $\forall\varepsilon>0$ $|h(x)-h(a)|<\varepsilon$. 设 $D=\{x\in I \mid h'(x)$ 不存在或 $h'(x)\neq 0\}$, 于是D是零测集, 于是对于前面给定的 $\varepsilon>0$, 存在开区间集 $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$, 满足 $D\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}J_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}|J_k|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 其中M为Lipschitz常数, 即 $|h(x)-h(y)|\leq M|x-y|$. 下面在I上定义一个正值函数

$\delta: I\to\mathbb{R}$, ① 若 $x\in D$, 则 $x\in$ 某 J_k, 于是存在 $\delta_1>0$ 使 $B_{\delta_1}(x)\subseteq J_k$. 定义 $\delta(x):=\delta$

② 若 $x\notin D$, 则 $h'(x)$ 存在且等于零, 于是存在 δ_2 使得对 $\forall y_1,y_2\in B_{\delta_2}(x)$,

有 $|h(y_1)-h(y_2)| < |y_1-y_2|\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

对于 $\forall x\in I$, 对于 $\delta:[a,x]\to\mathbb{R}$ 应用Cousin引理, 于是存在分割 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^{n}$

满足 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$. 设 $T=\{i\in\{1\ldots n\} \mid \xi_i\in D\}$. 于是有

若一个性质 $P(x)$ $(x\in I)$ 满足 $S=\{x\in I \mid P(x)$ 不成立$\}$ 至多可数 →

→ 则称 P 在 S 上近乎处处成立. (nearly everywhere. n.e.)

(此术语不常见)

引理: $h\in C(I)$, h n.e. 可导 且 $h'(x)\ge 0$ (n.e.) 则 h 单调增 →

$$|h(x)-h(a)|\le\sum_{i=1}^{n}|h(x_i)-h(x_{i-1})| = \left(\sum_{i\in T}+\sum_{i\notin T}\right)|h(x_i)-h(x_{i-1})|$$

$$\le M\cdot\sum_{i\in T}|x_i-x_{i-1}|+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i\notin T}|x_i-x_{i-1}| < M\cdot\sum_{k=1}^{\infty}|J_k|+\frac{\varepsilon}{2(\underset{b}{\cancel{x}}-a)}\overset{\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|}{\cancel{(x-a)}}$$

$$<\cancel{M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+}\ M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2(\underset{b}{\cancel{x}}-a)}(\cancel{x}-a)<\varepsilon.$$ □

(连续的验证不是太方便. 所以我们还有如下这个更好用的推论.

推论: 设 $F:I\to\mathbb{R}$, 连续且只有至多可数的不可导点,

若 $f=F'$ Riemann 可积, 则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

先证一个引理.

引理: 设 $h:I\to\mathbb{R}$ 连续且有至多可数的不可导点, 且 在可导处 $h'(x)\ge 0$,

则 h 是单调增的.

证明: 设 $S=\{c_1,c_2,\cdots\}\subseteq I$. h 在 $I\setminus S$ 上可导且 $h'\ge 0$.

定义一个 $\delta: I\to\mathbb{R}$: ① 若 $x\in S$, 设 $x=c_n$ 由连续性, 存在 $\delta_1>0$ 使得对 $\forall y_1,y_2\in B_{\delta_1}(x)$, 有 $|h(y_1)-h(y_2)|<\frac{\varepsilon}{2^n}$. ② 若 $x\notin S$ 则存在 $\delta_2>0$ 使得对 $\forall y_1,y_2\in B_{\delta_2}(x)$ 且 $y_1>y_2$, 有 $h(y_1)-h(y_2)>-\varepsilon(y_1-y_2)$. (利用 $h'\ge 0$).

对于任何 $I'=[c,d]$ $(c<d)$ $\subseteq[a,b]$, 由 Cousin 引理 存在 I' 的 δ 细分割, 则有

~~$|h(d)-h(c)|\le\sum_{\xi_i\in S}|h(x_{i-1})-h(x_i)|+\sum_{\xi_i\notin S}|h(x_{i-1})-h(x_i)|$~~

$$h(\underset{d}{\cancel{x}})-h(c)=\sum_{\xi_i\in S}\left(h(x_i)-h(x_{i-1})\right)+\sum_{\xi_i\notin S}\left(h(x_i)-h(x_{i-1})\right)$$

① 若f在[a,b]上L连续，设其Lipschitz常数为M，则有

$$V(f,P)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} M|x_i-x_{i-1}| = M\cdot(b-a).$$

所以f有界变差．

② 若f单调，不妨设其单调增，则

$$V(f,P)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})) = f(b)-f(a).$$

所以f也有界变差．

$$-\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \varepsilon\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) = -\varepsilon(1+b-a).$$

令 $\varepsilon\to 0$，则有 $h(d)\geq h(c)$． □

推论的证明：只需证这样的F是Lipschitz连续的．因为$f=F'$已可积，所以f有界．于是F'在 除一个至多可数集上有界．设这个界为M．取 $h(x)=Mx-F(x)$．则 h 连续，h'除至多可数集存在．且h'除至多可数集 ≥ 0 于是h单调．所以对任意 $c,d\in I$．$h(c)\leq h(d)\Rightarrow F(d)-F(c)\leq M(d-c)$．同理可证 $-M(d-c)\leq F(d)-F(c)$．因此 $|F(d)-F(c)|\leq M|d-c|$． □

最后的问题是，为什么Lipschitz连续的函数a.e.可导？这实际是Lebesgue微分定理的推论：

定理（Lebesgue微分定理）设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$有界变差，则f a.e.可导（且导数有限）．

(bounded variation)

有界变差：对于 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 以及[a,b]的分划P．定义 $V(f,P)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 对于固定的f，若$\{V(f,P)\mid P是[a,b]的分划\}$有上界，则称f在[a,b]上有界变差．并记 $V_a^b(f)=\sup_P\{V(f,P)\}$，叫f在[a,b]上的全变差．

③ 若 F_1. F_2 单调增. 则 $f=F_1-F_2$ BV. 因为

$$|f(x)-f(y)|=|F_1(x)-F_2(x)-F_1(y)+F_2(y)|$$
$$\le |F_1(x)-F_1(y)|+|F_2(x)-F_2(y)|$$

④ 若f在I上BV. 则f在I上有界.

证明: $|f(x)|\le |f(a)|+V_a^x(f)\le |f(a)|+V_a^b(f)$. □.

例: $f:[0.1)\to\mathbb{R}$. $f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

则f连续但不有界变差. 考虑 $P_m=\{0.\frac{1}{2m}.\frac{1}{2m-1}.\cdots\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.1\}$.

则 $V(f.P)=1+2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m})$ 无上界. □.

① 若f在I上BV. 则在I的任何子区间上BV.

性质: ② 设 $x\in I$. 则 $V_a^x(f)+V_x^b(f)=V_a^b(f)$.

③ 记 $F_1(x)=V_a^x(f)$. $F_2(x)=$ ~~$f(x)=F(x)$~~ $F_1(x)-f(x)$ 则 F_1. F_2 都单调增

证明: ① 子区间的分划可延拓为大区间的分划 于是有

$$V(f\cdot P)\le V(f\cdot\tilde{P})\le V_a^b(f).$$

② 设P是一个分划. 则对$\forall x\in I$. 不妨设 $x\in\mathring{I}_i$. ~~则有~~ 设$\tilde{P}$是P添加x而得到的新分划, 于是有 $V(f.\tilde{P})=V(f.P)+|f(x_i)-f(x)|+|f(x)-f(x_{i-1})|-|f(x_i)-f(x_{i-1})|\ge V(f\cdot P)$. 从x处将$\tilde{P}$断开成为$[a.x]$和$[x.b]$的两个分划$P'$ P'', 则有 $V(f.\tilde{P})=V(f\cdot P')+V(f.P'')$. 于是

$$V(f\cdot P)\le V(f\cdot\tilde{P})=V(f.P')+V(f.P'')\le V_c^x(f)+V_x^b(f).$$

对P取sup得 $V_a^b(f)\le V_a^x(f)+V_x^b(f)$. 另一方面, 任对$[a.x]$. $[x.b]$的分划P'. P''可拼成$[a.b]$的分划P. 于是

$$V(f\cdot P')+V(f\cdot P'')\le V(f.P)\le V_a^b(f)$$

对P'. P''取sup得 $V_a^x(f)+V_x^b(f)\le V_a^b(f)$. 所以②得证.

③ 由②知. 若 $x>y$. 则 $F_1(x)-F_1(y)=V_y^x(f)\ge 0$. 所以单调. 对于$F_2$.

$$F_2(x)=F_1(x)-f(x)=F_1(y)+V_y^x(f)-f(x).$$ 于是

$$F_2(x)-F_2(y)=F_1(y)+V_y^x(f)-f(x)-F_1(y)+f(y)=V_y^x(f)-(f(x)-f(y)).$$

注意 $f(x)-f(y)=V(f\cdot P_0)$. $P_0=\{y.x\}$. 于是 $V_y^x(f)\ge f(x)-f(y)$. □

推论: ① f BV ⟺ f可写为两个单调增函数之和.

② f BV. 则f的不连续点至多可数

~~当 S 本身就是闭区间(或紧集)时, 在这了的个数可以是有限的, 这就是 Cousin 引理. 所以右边的引理可以看成 Cousin 引理的某种 Lindelöf 变化.~~ →

下面来证明 Lebesgue 微分定理. 首先定义 Dini 导数:

$$D^+f(x)=\limsup_{y\to x^+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad D_+f(x)=\liminf_{y\to x^+}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$D^-f(x)=\limsup_{y\to x^-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\quad D_-f(x)=\liminf_{y\to x^-}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

显然 f 在 x 处有有限的导数 ⟺ 如下不等式成立. (其中 $D_-\le D^-$ 和 $D_+\le D^+$ 是平凡的)

$$-\infty < D^+f(x)\le D_-f(x)\le D^-f(x)\le D_+f(x)\le D^+f(x)<+\infty$$

若我们能证明对任意的BV函数 f 有 $D^+f\le D_-f$ a.e., 则将其应用到 $-f$ 上, 并注意 $D^+(-f)=-D_+f$, $D_-(-f)=-D^-(f)$, 则可推出 $D^-f(x)\le D_+f(x)$. 所以我们只需证明 ① $|D^+f(x)|<+\infty$ a.e. ② $D^+f(x)\le D_-f(x)$ a.e. 设 $E_\infty=\{x\in I \mid D^+f(x)=+\infty$ 或 $D^+f(x)=-\infty\}$, $E^+_-=\{x\in I\mid D^+f(x)>D_-f(x)\}$. 则只需证明 E_∞ 和 E^+_- 是零测集. E^+_- 又可写为 $\bigcup_{B,A\in\mathbb{Q}} E_{B,A}$ 其中 $E_{B,A}=\{x\in I\mid D^+f(x)>B+A$ 且 $D_-f(x)<B-A\}$. 于是只要证 $E_{B,A}$ 零测. 注意替换 $g(x)=f(x)-Bx$, 则 g BV, 且 $D^+g(x)=D^+f(x)-B$, $D_-g(x)=D_-f(x)-B$. 便只需证明 $E_A=\{x\in I\mid D^+f(x)>A$ 且 $D_-f(x)<-A\}$ 和 E_∞ 对任意的BV函数 f 零测即可. 这将是下面的两个主要结果. 要证明它们, 我们先准备一些引理.

~~引理1 设 $S\subseteq\mathbb{R}$, $\delta: S\to\mathbb{R}_{>0}$. 则存在可数多个闭区间 $\{I_i\}_{i=1}^\infty$, 它们除端点外互不相交, 以及 $\xi_i\in I_i\cap S$, 使得 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$ 且 $S\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty I_i$.~~

~~证明: 按如下方式构造 $\{I_i\}_{i=1}^\infty$. ① 取 $n=0$. 置 $\mathcal{U}=\{\}$. ② 对每个 $n\in\mathbb{N}(n\neq0)$ 将 $[-n,n]$ 等分成 $2n\cdot2^n$ 个小区间. 若其中有某个, 比如叫 J, 满足 $\exists\xi\in J\cap S$ 且 $J\subseteq B_{\delta(\xi)}(\xi)$ 且 $J\nsubseteq[-(n-1),(n-1)]$, 则将 J 添加进 $\mathcal{U}$. 最后这个 $\mathcal{U}$ 就是所求. 它显然的元素显然最多交于端点, 且每个 J 都对应一个 $\xi\in S$ 使 $J\subseteq B_{\delta(\xi)}(\xi)$. 最后只需验证 $S\subseteq\bigcup\mathcal{U}$. 对于 $\forall x\in S$, 找一个 n 使 $x\in(-n,n)$ 且 $\delta(x)>2^{-n}$.~~

~~证明: 设 $\mathcal{U}=\{I_i\}_{i=1}^\infty$, 按如下方式构造 $\mathcal{U}$.~~

~~① 取 $n=0$. 置 $\mathcal{U}=\emptyset$.~~

~~② 对每个 $n\in\mathbb{N}(n\neq0)$, 将 $[-n,n]$ 等分成 $2n\cdot2^n$ 个小区间, 若其中有某个 J 满足 $\exists\xi\in J\cap S$ 使 $J\subseteq B_{\delta(\xi)}(\xi)$, 则将 J 添加进 $\mathcal{U}$. 这样得到的 $\mathcal{U}$ 显然是可数的. 若有某对 $J\cap J'$ 不是端点, 则必有 $J\subseteq J'$ 或 $J'\subseteq J$, 所以只需留大的. 所以可以保证两两最多只交于端点. 条件 $J\subseteq B_{\delta(\xi)}(\xi)$ 是自动成立的. 所以只需验证包含关系 $S\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty I_i$. 设 $x\in S$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $x\in(-n,n)$ 且 $\delta(x)>2^{-n}$. 若 x 已被第 n 步的某个 J 覆盖, 则无需再做什么. 若没有, 则它一定落在某个 $[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]$ 之中, 于是 $[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]\subseteq(x-\delta(x),x+\delta(x))$, 所以此区间会被选中为 $\mathcal{U}$ 的元素.~~ □

Date:
Place:
Reminders

Dini 导数:

$D^+ f(x) = \limsup_{y\to x^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$D_+ f(x) = \liminf_{y\to x^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$D^- f(x) = \limsup_{y\to x^-} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

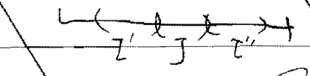
$D_- f(x) = \liminf_{y\to x^-} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

→

Date:
Place:
Reminders

引理2 设 $\{I_1 \cdots I_n\}$ 是有限多个开区间，则存在 $\{1,\cdots,n\}$ 的子集 Q，使得对 $\forall i,j\in Q$，$I_i\cap I_j=\emptyset$，且 $\sum_{i\in Q}|I_i| \geq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}|I_i|$

证明：先取 Q 为空集，然后选 $I_1\cdots I_n$ 中最大的 I_i 添加到 Q 中，然后去掉和 I_i 相交的，再选剩下的中最大的 I_j 添加到 Q 中，再去掉与 I_j 相交的，有限步后停止，~~得到的Q~~ 因为每次去掉的区间长度最多不超过3了，所以剩下的区间长度不小于原区间长度的 $\frac{1}{3}$.



□

引理3 设 f 在 I 上 BV，则 $E_\infty=\{x\in I: D^+f(x)=+\infty$ 或 $D^+f(x)=-\infty\}$ 是零测集

证明：记 $M=V_a^b(f)$，（由 E_∞ 的定义）对 $\forall\varepsilon>0$，$x\in E_\infty$，存在 $h_x>0$ 使
$|f(x+h_x)-f(x)|>\frac{12M}{\varepsilon}\cdot h_x$，于是我们得到 E_∞ 上的一个正值函数 $\delta: E_\infty\to\mathbb{R}_{>0}$，$x\mapsto h_x$，所以由引理1，存在可数多个闭区间 $\{I_i\}$ 以及 $\xi_i\in I_i\cap E_\infty$ 满足 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$，$E_\infty\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$.

因为 $E_\infty\subseteq I$，所以可取 $I_i\subseteq I$，于是 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$ 有限，所以存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<2\sum_{i=1}^{n}|I_i|$.

接下来，对 $\{B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)\}_{i=1}^{n}$ 应用引理2，不妨设 $\{B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)\}_{i=1}^{q}$ 满足 $\{B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)\}_{i=1}^{q}$ 互不相交，且 $\sum_{i=1}^{n}|B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)|\leq 3\sum_{i=1}^{q}|B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)|$.

最后

$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<2\sum_{i=1}^{n}|I_i|<12\sum_{i=1}^{n}h_{\xi_i}<12\cdot\frac{\varepsilon}{12M}\sum_{i=1}^{q}|F(\xi_i+h_{\xi_i})-F(x_i)|\leq\varepsilon$ □

Date:
Place:

Reminders

闭区间互不相交指它们的交至多有端点. →

Date:
Place:

Reminders

~~$P=\{x_0<x_1<\cdots<x_n\}$~~

~~引理4. 设 $f: I\to\mathbb{R}$. P是I的分割. $A>0$.~~

~~·若 $f(a)\le f(b)$. 设 $T=\{i\in\{1\dots n\}\mid \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}<-A\}$.~~

~~·若 $f(a)\ge f(b)$. 设 $T=\{i\in\{1\dots n\}\mid \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}>A\}$.~~

~~则 $\mathrm{Var}(f,P)>|f(b)-f(a)|+A\sum_{i\in T}|I_i|$.~~

~~证明: 当 $f(a)\le f(b)$ 时~~

~~$$
\begin{aligned}
|f(b)-f(a)| &= f(b)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\
&=\sum_{i\in T}(f(x_i)-f(x_{i-1}))+\sum_{i\notin T}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\
&<-A\sum_{i\in T}(x_i-x_{i-1})+\sum_{i\notin T}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\
&\le -A\sum_{i\in T}|I_i|+V(f,P).
\end{aligned}
$$~~

~~若 $f(a)\ge f(b)$ 同理.~~ $\square$

第一个引理可看成是Cousin引理的某种推广:

引理1. 设 $S\subseteq\mathbb{R}$. $\delta: S\to\mathbb{R}_{>0}$. 则存在可数多个互不相交的闭区间 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使得 ① $S\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ ② 存在 $\xi_i\in I_i\cap S$ 使得 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$.

证明: 设 $\mathcal{U}=\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$. 按如下方式构造 $\mathcal{U}$.

第0步: 置 $\mathcal{U}=\{\}$.

第1步: 将 $[-1,1]$ 等分成4个小区间. 若其中有某个, 称为J, 满足存在 $\xi\in J\cap S$, 且 $J\subseteq B_{\delta(\xi)}(\xi)$. 则将它添加进$\mathcal{U}$. 所有这样的$J$都添加完成后进入下一步.

⋮

第n步: 将 $[-n,n]$ 等分成 $2n\cdot 2^n$ 个小区间. 若其中有某个J满足存在 $\xi\in J\cap S$ 且 $J\subseteq B_{\delta(\xi)}(\xi)$ (且它不在已添加过的J中), 则将它添加进$\mathcal{U}$. 所有

这样的J都添加完后进入下一步. ---

最终得到的$\mathcal{U}$即为所求. 首先它显然是可数的. 其次, 任何两个 J' 和 J'' 若相交则一定是一个包含另一个, ~~所以会被去掉一个~~. 所以它们不可能都在$\mathcal{U}$中. 最后, 对于 $x\in S$, 取n使 $x\in(-n,n)$ 且 $\delta(x)>2^{-n}$. 若x已经在第n步之前被覆盖, 则无需再做什么. 若不然, 则一定存在k, 使 $x\in J_k=[k2^{-n},(k+1)2^{-n})$. 因为 $2^{-n}<\delta(x)$, 所以 $J_k\subseteq B_{\delta(x)}(x)$. 于是 J_k 在$\mathcal{U}$中. 所以有 $S\subseteq\bigcup\mathcal{U}$. □

下一个引理是有限开区间组的一个简单的组合性质.

引理2. 设$\{I_1,\cdots,I_n\}$是有限多个开区间, 则存在$\{1,\cdots,n\}$的子集Q

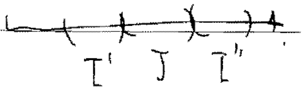
(Austin) 使得: ① $I_i\cap I_j=\phi$ $\forall i,j\in Q$. ② $\sum_{i\in Q}|I_i|\geq\frac{1}{3}\cancel{\sum_{i=1}^{n}|I_i|}\,|\bigcup_{i=1}^{n}I_i|$

证明: 先取Q为空集. 选$I_1,\cdots,I_n$中最大的一个, 不妨设其为J, 将其下标添加到Q中. 然后去掉所有和J相交的I_i. 注意, 因为J最大, 所以与J相交的那些开区间长度最大不超过$2|J|$. 所以 ~~去掉部分的长度~~ $|J|$ 大于或等于与它交非空的所有I_i (包括它自己) 的并的长度的$\frac{1}{3}$.

接下来, 再选剩下的I_i中最大的一个, 并将它的下标加入Q中. 然后再去掉与I_i相交的I_i's. 同理可知, 去掉的部分的长度小于这一步涉及到的总长度的$\frac{1}{3}$.

这个步骤有限步后会终止. 于是Q就是所求.

□



这里用可数个闭区间覆盖了 E_∞. 易知这个用开区间覆盖是等价的. →
因为可以先用长度为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的闭区间覆盖, 然后将每个闭区间扩大一点成为开区间. 并使扩大的总长度 $<\frac{\varepsilon}{2}$.

引理3. E_∞ 是零测集.

证明: 记 $M=V_a^b(f)$. 设 $x\in E_\infty$, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $h_x>0$, 使得 $|f(x+h_x)-f(x)|>\frac{12M}{\varepsilon}h_x$. 于是可定义 $\delta: E_\infty\to\mathbb{R}_{>0}$, $x\mapsto h_x$,
由引理1. 存在 $\{I_i\}$ 及 $\xi_i\in I_i\cap E_\infty$ 满足 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$, 且 $E_\infty\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$
注意 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$ 有限. 所以存在 n 使 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<2\sum_{i=1}^{n}|I_i|$. ~~接下来考虑开区间组 $\{(\xi_i,\xi_i+h_{\xi_i})\}_{i=1}^{n}$. 由引理2. 存在 $Q\subseteq\{1\dots n\}$ (不妨取 $Q=\{1\dots q\}$) 使得 $\{(\xi_i,\xi_i+h_{\xi_i})\}_{i=1}^{q}$ 互不相交, 且有 $\sum_{i=1}^{q}h_{\xi_i}\geq\frac{1}{3}\left|\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i,\xi_i+h_{\xi_i})\right|$ 最后, $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<2\sum_{i=1}^{n}|I_i|\leq 2\left|\bigcup_{i=1}^{n}(\xi_i,\xi_i\right.$~~

接下来考虑开区间组 $\{B_{h_{\xi_i}}(\xi_i)\}_{i=1}^{n}$. 由引理2. 存在 $Q\subseteq\{1\dots n\}$ (不妨设 $Q=\{1\dots q\}$) 使得 $\{B_{h_{\xi_i}}(\xi_i)\}_{i=1}^{q}$ 互不相交. 且有 $\sum_{i=1}^{q}h_{\xi_i}\geq\frac{1}{3}\left|\bigcup_{i=1}^{n}B_{h_{\xi_i}}(\xi_i)\right|$
最后. $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\leq 2\sum_{i=1}^{n}|I_i|\leq 2\left|\bigcup_{i=1}^{n}B_{h_{\xi_i}}(\xi_i)\right|\leq 12\sum_{i=1}^{q}h_{\xi_i}$

$$<\frac{\varepsilon}{M}\sum_{i=1}^{q}|f(\xi_i+h_{\xi_i})-f(\xi_i)|<\varepsilon.$$ 所以 E_∞ 零测. □

为了证 E_A 是零测集. 我们还需要一个"逆向行驶"引理.

引理4. 设 $f: I\to\mathbb{R}$. P 是 I 的一个分划 $P=\{x_0<x_1<\dots<x_n\}$. $A>0$

- 若 $f(a)\leq f(b)$, 记 $T=\{i\in\{1\dots n\}\mid\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}<-A\}$.
- 若 $f(a)\geq f(b)$, 记 $T=\{i\in\{1\dots n\}\mid\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}>A\}$.

则有 $V_a^b(f)>|f(b)-f(a)|+2A\sum_{i\in T}|I_i|$.

证明：若 $f(b) \geq f(a)$，则

$$|f(b)-f(a)| = f(b)-f(a) = \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right) = \left(\sum_{i\in T}+\sum_{i\notin T}\right)\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)$$

$$< -A\sum_{i\in T}|I_i| + \sum_{i\notin T}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)$$

注意 $\sum_{i\notin T}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right) \leq \sum_{i\notin T} V_{I_i}(f) = V_I(f) - \sum_{i\in T} V_i(f) < V_I(f) - \sum_{i\in T} A|I_i|$

所以 $V_I(f) > |f(b)-f(a)| + 2A\sum_{i\in T}|I_i|$. D.

Lebesgue微分定理的证明：我们只需再证 E_A 为零测集。记 $M = V_a^b(f)$。

对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \overset{\{y_0<\cdots<y_N\}}{P}$ 使 $V(f,P) > M - \frac{A\varepsilon}{6}$。设 $E' = E_A \setminus \{y_0,\cdots,y_N\}$.

对于 $x \in E'$，它一定位于某两个之间，即 $y_{i-1} < x < y_i$.

- 若 $f(y_{i-1}) \leq f(y_i)$，选取一个 $y_{i-1} < a_x < x$，使 $\frac{f(x)-f(a_x)}{x-a_x} < -A$ $(\Leftarrow D_-f(x) < -A)$.
- 若 $f(y_{i-1}) > f(y_i)$，选取一个 $x < b_x < y_i$，使 $\frac{f(b_x)-f(x)}{b_x-x} > A$ $(\Leftarrow D^+f(x) > A)$.

记 $J_x = (a_x, x)$ 或 $[x, b_x)$。再记 $h_x = |J_x|$。定义 $\delta: E' \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto h_x$。于是存在 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ 以及 $\xi_i \in I_i \cap E'$ 满足 $I_i \subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$，且 $E_\infty \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$。类似引理3，可选 n 使 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| < 2\sum_{i=1}^{n}|I_i|$。下面考虑有限开区间组 $\{B_{h_{\xi_i}}(\xi_i)\}_{i=1}^{n}$。由引理2，存在 $Q \subseteq \{1,\dots,n\}$（不妨设它为 $\{1,\dots,q\}$）使得 $\{B_{h_{\xi_i}}(\xi_i)\}_{i=1}^{q}$ 互不相交，且有 $2\sum_{i=1}^{q} h_{\xi_i} \geq \frac{1}{3}\left|\bigcup_{i=1}^{n} B_{h_{\xi_i}}(\xi_i)\right|$，于是有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| < 2\sum_{i=1}^{n}|I_i| < 2\left|\bigcup_{i=1}^{n} B_{h_{\xi_i}}(\xi_i)\right| < 12\sum_{i=1}^{q} h_{\xi_i}.$$

另一方面，取 $\tilde{P}$ 为 P 添加所有 $\{\xi_i\}_{i=1}^{q}$ 后得到的新分划.

Cousin引理可改述为：对任意规范δ存在δ细的分划. →

显然，当δ取为常数时，这就是Riemann积分. →

在每个$[y_{i-1}, y_i]$上对新分划P应用引理4，则有

$$V_{y_{i-1}}^{y_i}(f) > |f(y_i)-f(y_{i-1})| + 2A\sum_{j\in T_i}|J_{\xi_j}|.$$

其中$T_i=\{j\in\{1,\dots,q\} \mid J_{\xi_j}\subseteq[y_{i-1}, y_i]\}$

于是

$$M = \sum_{i=1}^{N} V_{y_{i-1}}^{y_i}(f) > \sum_{i=1}^{N}|f(y_i)-f(y_{i-1})| + 2A\sum_{i=1}^{q}|J_{\xi_i}|$$

$$= V(f,p)+2A\sum_{i=1}^{q}h_{\xi_i} > M-\frac{A\varepsilon}{6}+2A\sum_{i=1}^{q}h_{\xi_i}.$$

所以有$\sum_{i=1}^{q}h_{\xi_i} < \frac{\varepsilon}{12}$，于是$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| < \varepsilon$. 这就证完了$E_A$的零测性. □

§4.4 Kurzweil-Henstock积分.

KH积分是Riemann积分的推广. 它甚至包含Lebesgue积分作为其特例. 它具有很多好的性质. 使得微积分基本定理以及以后的很多定理都可以以最强的形式出现在初等数学分析中.

定义：① 设$I=[a,b]$. I上任何一个正值函数$\delta: I\to\mathbb{R}_{>0}$都叫一个规范(gauge).　　记为$(P,\xi)\ll\delta$

② 设δ是I上的规范. P是I的分划. ξ是标记点组. 若对任意的$i=1,\dots,n$. $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$，则称$(P,\xi)$是δ-细的.

③ 设$f: I\to\mathbb{R}$. $A\in\mathbb{R}$. 若对$\forall\varepsilon>0$ ∃I上的规范δ，使得对任意δ细的(P,ξ). 都有$|S(f,P,\xi)-A|<\varepsilon$. 则称f在I上K-H可积. 并记$f=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{可省略}}}{\underline{(KH)}}\int_a^b f(x)dx$.

(4) KH可积函数构成的线性空间记为KH[a,b].

推论：若 $f\in R[a,b]$ 则 $f\in KH[a,b]$. 且有 →

$$(R)\int_a^b f(x)dx=(KH)\int_a^b f(x)dx.$$

证明：由定义显然有 $R[a,b]\subseteq KH[a,b]$. 且 $(R)\int_a^b f(x)dx$ 与 $(KH)\int_a^b f(x)dx$ 都满足定义条件. 所以相等. □

例：① $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. 求证 $\int_0^1 f(x)dx=2$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$. 定义 $\delta(x)=\begin{cases}\min(\frac{x}{2},\frac{x^{\frac{3}{2}}}{4}\varepsilon), & x>0\\ \frac{\varepsilon^2}{16} & x=0\end{cases}$

则对任意 δ 细带标分划 (P,ξ), 若 $\xi_i\neq 0$. 则 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i)\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$

$\Rightarrow x_{i-1}>\frac{\xi_i}{2}$. 于是 $\sqrt{\xi_i}\sqrt{x_{i-1}}(\sqrt{\xi_i}+\sqrt{x_{i-1}})>\xi_i^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)>\frac{\xi_i^{\frac{3}{2}}}{2}$. 所以

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\xi_i}}-\frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}}\right|=\frac{\xi_i-x_{i-1}}{\sqrt{\xi_i}\sqrt{x_{i-1}}(\sqrt{\xi_i}+\sqrt{x_{i-1}})}<\frac{\delta(\xi_i)}{\frac{1}{2}\xi_i^{\frac{3}{2}}}\le\frac{\varepsilon}{2}.$$ 同理可得

$\left|\frac{1}{\sqrt{\xi_i}}-\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$. 注意 $\frac{1}{\sqrt{x_i}}<\frac{2}{\sqrt{x_i}+\sqrt{x_{i-1}}}<\frac{1}{\sqrt{x_{i-1}}}$. 所以 $\left|\frac{2}{\sqrt{x_i}+\sqrt{x_{i-1}}}-\frac{1}{\sqrt{\xi_i}}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是 $\left|2\sqrt{x_i}-2\sqrt{x_{i-1}}-f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right|\le(x_i-x_{i-1})\cdot\frac{\varepsilon}{2}$.

若 $\xi_1=0$. 则 $\left|2\sqrt{x_1}-2\sqrt{x_0}-f(\xi_1)(x_1-x_0)\right|=2\sqrt{x_1}<2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16}}=\frac{\varepsilon}{2}$.

所以有 $|S(f,P,\xi)-2|$ （若 $\xi_1\neq 0$）

$$=\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^n(2\sqrt{x_i}-2\sqrt{x_{i-1}})\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})<\varepsilon.$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=2}^n\left|f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-(2\sqrt{x_i}-2\sqrt{x_{i-1}})\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=2}^n(x_i-x_{i-1})\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$ （若 $\xi_1=0$）

所以总有 $\int_0^1 f(x)dx=2$. □

性质：① 积分值是唯一的.

证明：若有 A_1, A_2 同时满足条件. 即对 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1: I\to\mathbb{R}_{>0}$ 使 $\forall (P,\xi)\ll\delta_1$ $|S(f,P,\xi)-A_1|<\frac{\varepsilon}{2}$. 且 $\exists\delta_2: I\to\mathbb{R}_{>0}$ 使 $\forall(P,\xi)\ll\delta_2$ 有 $|S(f,P,\xi)-A_2|<\frac{\varepsilon}{2}$. 现在取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

再取一个 $(P,\xi)\ll\delta$. 则有 $(P,\xi)\ll\delta_1$, $(P,\xi)\ll\delta_2$. 于是

$$|A_1-A_2|\le|S(f,P,\xi)-A_1|+|S(f,P,\xi)-A_2|<\varepsilon.$$ □

② Cauchy 准则成立：f 在 I 上 KH 可积 $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta: I\to\mathbb{R}_{>0}$ s.t. $\forall(P_1,\xi_1)\ll\delta$, $(P_2,\xi_2)\ll\delta$. 有

$$|S(f,P_1,\xi_1)-S(f,P_2,\xi_2)|<\varepsilon.$$ （不妨设 $\delta_{n+1}\le\delta_n$）.

证明：$\Rightarrow$ 显然. 下证 $\Leftarrow$. 取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$. 于是存在 δ_n 使任何 (P_1,ξ_1), $(P_2,\xi_2)\ll\delta_n$. 有 $|S(f,P_1,\xi_1)-S(f,P_2,\xi_2)|<\varepsilon_n$

固定一个这样的 (P_1,ξ_1). 则有 $|S(f,P_2,\xi_2)|<\varepsilon+S(f,P_1,\xi_1)$. 所以 $A_n=\{S(f,P,\xi)\mid(P,\xi)\ll\delta_n\}$ 是有界集. 设 $U_n=\sup A_n$, $V_n=\inf A_n$. 于是有 $U_n-V_n\le\frac{1}{n}$. 因为我们取的 $\delta_{n+1}\le\delta_n$. 所以 δ_{n+1} 细的带标记分划自动是 δ_n 细的. 于是 $A_{n+1}\subseteq A_n$. 所以 $[V_{n+1},U_{n+1}]\subseteq[V_n,U_n]$. 所以 $I_n=[V_n,U_n]$ 构成一个闭区间套. 其长度趋于零 所以存在唯一一点 $A\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$.

现在对于 $\forall\varepsilon>0$. 取 n 使 $\varepsilon_n<\varepsilon$. 令 (P,ξ) 是 δ_n 细的带标分划. 则有 $S(f,P,\xi)\in I_n$. $A\in I_n$. 所以 $|S(f,P,\xi)-A|<\frac{1}{n}<\varepsilon$. 所以 $(KH)\int_a^b f(x)dx=A$. □

② 设 $E \subseteq [0,1]$ 是一个可数集. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$.
则 $\int_0^1 f(x)dx=0$.

证明: 设 $E=\{x_1, x_2, \cdots\}$. 定义 $\delta: I \to \mathbb{R}$. $x \mapsto \delta(x)$.

$\delta(x)=\begin{cases}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}} & x=x_k\\ 1 & x\notin E\end{cases}$. 则对任意δ细带标分划 (P,ξ) 有

$$|S(f,P,\xi)| = \Big|\sum_{\xi_i\in E} f(\xi_i)|I_i|\Big| = \Big|\sum_{\xi_i\in E}|I_i|\Big| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}=\varepsilon.$$ □

推论: $\int_0^1 D(x)dx = 0$.

例①表明无界函数可以是KH可积的. 例②的推论表明处处不连续的函数也可以是KH可积的.

这种特殊的δ将δ细的P的某个点锚固在c点. 这是 一)
KH积分中很常用的一种技术.

---

③ 若 $f \in KH[a,b]$ 则对任意 $[c,d] \subseteq [a,b]$. 有 $f\in KH[c,d]$

证明: 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta: I \to \mathbb{R}_{>0}$ 使 $\forall (P_1,\xi_1), (P_2,\xi_2) \ll \delta$ 有

$$|S(f,P_1,\xi_1) - S(f,P_2,\xi_2)| < \varepsilon.$$

现在~~专 $[c,d]$ 的 δ细带标分划 而~~ 对于 $[c,d]$ 的两个δ细带标分划 (P_1',ξ_1') 和 (P_2',ξ_2'). 可取 $[a,c]$, $[d,b]$ 的分划 (Q_1,η_1) 和 (Q_2,η_2). 使 $(P_i,\xi_i)=(Q_1,\eta_1)\cup(P_i',\xi_i')\cup(Q_2,\eta_2)$ $(i=1,2)$
成为 $[a,b]$ 的δ细带标分划. 于是有

$$|S(f,P_1',\xi_1')-S(f,P_2',\xi_2')| = |S(f,P_1,\xi_1)-S(f,P_2,\xi_2)| < \varepsilon.$$ □

~~④ 若 $f\in KH[a,b]$ 则对 $\forall c\in[a,b]$. 有 $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.~~

④ 若 $f\in KH[a,c]\cap KH[c,b]$. 其中 $c\in I$. 则
$f\in KH[a,b]$. 且有 $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

证明: 对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $[a,c]$ 的规范 δ_1 和 $[c,b]$ 的规范 δ_2 使得对任意
$[a,c]$ 的 δ_1 细带标分划 (P_1,ξ_1) 有 $|S(f,P_1,\xi_1)-\int_a^c f(x)dx|<\frac{\varepsilon}{2}$ ①
对 $[c,b]$ 的 δ_2 细带标分划 (P_2,ξ_2) 有 $|S(f,P_2,\xi_2)-\int_c^b f(x)dx|<\frac{\varepsilon}{2}$. ②

现在取 $[a,b]$ 的一个规范: $\delta: I\to\mathbb{R}_{>0}$.

$$\delta(x)=\begin{cases}\min(\delta_1(x), \frac{c-x}{2}) & a\le x<c\\ \min(\delta_1(c), \delta_2(c)) & x=c\\ \min(\delta_2(x), \frac{x-c}{2}) & c<x\le d\end{cases}$$

则对任意δ细的 $[a,b]$ 的带标分划 P 设 c 在 I_k 中.

则必有 $\xi_k = c$. 因为若 $\xi_k < c$. 则由 δ 的定义. $\delta(\xi_k) < \frac{c-\xi_k}{2}$.

于是 $\frac{c+\xi_k}{2} = \xi_k - \frac{c-\xi_k}{2} < \xi_k - \delta(\xi_k) < \xi_k + \delta(\xi_k) < \frac{c+\xi_k}{2}$ 矛盾. $\xi_k > c$ 同理.

于是 相应的 Riemann 和可写为

$$S(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)|I_i| + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)|I_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)|I_i| + f(\xi_k)(c - x_{k-1}) + f(\xi_k)(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)|I_i|.$$

$$= S(f,P_1,\xi_1) + S(f,P_2,\xi_2).$$

易知 其中 (P_1,ξ_1). (P_2,ξ_2) 分别是 δ_1 细和 δ_2 细的. 所以之前的不等式 ① ② 成立. 所以

$$\left|S(f,P,\xi) - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\right| < \varepsilon. \qquad \square.$$

⑤ 若 $f \in KH[a,b]$. 定义 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ $x \in [a,b]$. 则 F 连续

证明: 只需证 F 左连续. 右连续可由 $f(x)$ 的左连续得到.

由线性函数 $t \mapsto f(x)(x-t)$ 的连续性可知. 对 $\forall \varepsilon > 0$ 存在 $\delta_0 > 0$ 使得当 $t \in (x-\delta_0, x)$ 时. 有 $|f(x)(x-t)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 由于在 $[a,x]$ 上的 KH 可积性. 存在规范 $\delta_1: [a,x] \to \mathbb{R}_{>0}$ 以及 δ_1 细的带标分划 (P_1,ξ_1) 满足 $|S(f,P_1,\xi_1) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 选一个 $t \in (x - \min(\delta_1(x), \delta_0), x)$,

由于在 $[a,t)$ 的 KH 可积性 存在 $[a,t]$ 的规范 $\delta_2: [a,t] \to \mathbb{R}_{>0}$ 以及 δ_2 细的带标分划 (P_2,ξ_2), 使 $|S(f,P_2,\xi_2) - F(t)| < \frac{1}{3}$. 现在定义

$\delta: [a,x] \to \mathbb{R}_{>0}$ 如下:

Henstock 引理: 首先定义, 若 $\{I_i\}_{i=1}^{q}$ 是 $I=[a,b]$ 的一组互不相交的闭子区间, 则称它们是 I 的一个子分划. 若有 $\xi_i \in I_i$ 使 $I_i \subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$ 则称 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^{q}$ 是 I 的一个 δ 细带标子分划.

引理(Henstock) 若 $f\in KH[a,b]$. 则对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta: I\to \mathbb{R}_{>0}$ 使得对任意 δ 细带标子分划 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^{q}$, 有

$$\sum_{i=1}^{q}\left|\int_{I_i} f(x)dx - f(\xi_i)|I_i|\right| < \varepsilon.$$

~~Henstock 引理: 设 $f\in KH[a,b]$. 于是对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $\delta: I\to\mathbb{R}_{>0}$, 使得对任意 δ 细的带标分划 (P,ξ), 有 $|S(f,P,\xi)-\int_a^b f(x)dx|<\varepsilon$. 现在对 (P,ξ) 的任一子集 $\{([u_i,v_i],\xi_i)\}_{i=1}$, 有~~

~~$$\sum_{i=1}^{Q}\left|\int_{u_i}^{v_i} f(x)dx - f(\xi_i)(v_i-u_i)\right| < \varepsilon.$$~~

证明: 我们首先证明若估计成 $\left|\sum_{i=1}^{q}\left(\int_{I_i} f(x)dx - f(\xi_i)|I_i|\right)\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$ 则结论成立.

对于 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $\delta: I\to\mathbb{R}_{>0}$ 使得 I 的任何 δ 细带标分划 (P,ξ) 有 $\left|S(f,P,\xi)-\int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. 对于一个子分划 (Q_0,ξ) $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^{Q}$, $I\setminus\bigcup_{i=1}^{Q} I_i$ 总是有限多个不交的区间. 设它们对应的闭区间为 $I_{Q+1},\cdots,I_N$. 任取一个正数 $\eta>0$, 在每个 I_i $(i=Q+1,\cdots,N)$ 上可取一个 δ 细分划 (Q_i,η_i)

$$\delta(\xi)=\begin{cases}\min(\delta_1(\xi),\delta_2(\xi)) & a\le\xi\le t\\ \delta_1(\xi) & t<\xi<x\\ \min(\delta_1(x),\delta_0) & \xi=x\end{cases}$$

再取一个带标分划 $(P,\xi)=(P_2,\xi_2)\cup\{(x,[t,x])\}$. 于是 ~~则 (P,ξ) 是 δ 细的分~~

$S(f,P,\xi)-F(x) = S(f,P_2,\xi_2)+f(x)(x-t)-F(t)+F(t)-F(x)$. 所以

$|F(t)-F(x)| \le |S(f,P,\xi)-F(x)| + |S(f,P_2,\xi_2)-F(t)| + |f(x)(x-t)|$

注意 P 是 δ_1 细的. 所以 $|S(f,P,\xi)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 于是 $|F(t)-F(x)|<\varepsilon$.

所以有 $\lim_{t\to x}F(t)=F(x)$. □

此程仿微积基本定理.

定理 $F(x)$ 同上. 则 F 在 ~~(a,b)~~ $[a,b]$ 上 a.e. 可导. 且 $F'=f$ a.e.

证明: F 在 x 处可导且 $F'=f$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. $\forall u,v$ 满足 $x\in[u,v]\subseteq B_\delta(x)$, 有 $|F(v)-F(u)-f(x)(v-u)|<\varepsilon(v-u)$. 于是 F 在 x 不可导或 $F'\ne f$ $\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0$ $\exists u,v$ 满足 $x\in[u,v]\subseteq B_\delta(x)$ 有 $|F(v)-F(u)-f(x)(v-u)|\ge\varepsilon_0(v-u)$.

设 E 是所有使 F 不可导或 $F'(x)\ne f(x)$ 的 x 构成的集合. 于是 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 其中 $E_n=\{x\in I \mid \forall\delta>0\ \exists u,v$ s.t. $x\in[u,v]\subseteq B_\delta(x)$, 且 $|F(v)-F(u)-f(x)(v-u)|>\frac{1}{n}(v-u)\}$. 要证 E 零测只需证 E_n 零测.

下面的做法与 Lebesgue 微分定理的证明非常相似. 固定一个 $n\in\mathbb{N}$, 考虑 E_n.

对于 $\forall\varepsilon>0$. 存在规范 $\delta: I\to\mathbb{R}_{>0}$ s.t. ~~$\left|S(f,P,\xi)-\int_a^b f dx\right|<\frac{\varepsilon}{6n}$~~ Henstock 引理成立.

使得 $\left|S(f,Q_i,\eta_i)-\int_{I_i}f(x)dx\right|<\frac{\mu}{N-Q}$. 接下来, $(P,\xi)=(Q_0,\xi_0)\cup\{(Q_i,\xi_i)\}_{i=Q+1}^{N}$ 构成 I 的δ细带标记分划. 于是有

$$S(f,P,\xi)=S(f,Q_0,\xi_0)+\sum_{i=Q+1}^{N}S(f,Q_i,\eta_i)$$ 所以

$$\left|S(f,Q_0,\xi_0)-\sum_{i=1}^{Q}\int_{I_i}f(x)dx\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{Q}\left(f(\xi_i)|I_i|-\int_{I_i}f(x)dx\right)\right|=\left|S(f,P,\xi)-\sum_{i=Q+1}^{N}S(f,Q_i,\eta_i)-\sum_{i=1}^{Q}\int_{I_i}f(x)dx\right|$$

$$=\left|\left(S(f,P,\xi)-\int_a^b f(x)dx\right)-\sum_{i=Q+1}^{N}\left(S(f,Q_i,\eta_i)-\int_{I_i}f(x)dx\right)\right|$$

$$\leq\left|S(f,P,\xi)-\int_a^b f(x)dx\right|+\sum_{i=Q+1}^{N}\left|S(f,Q_i,\eta_i)-\int_{I_i}f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+(N-Q)\cdot\frac{\mu}{N-Q}=\frac{\varepsilon}{3}+\mu.$$ 因为 μ 是任意的, 所以令 $\mu\to 0$ 得

$$\left|\sum_{i=1}^{Q}\left(\int_{I_i}f(x)dx-f(\xi_i)|I_i|\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}.$$

对于原问题, 设 Q_0^+ 是使 $\int_{I_i}f(x)-f(\xi_i)|I_i|\geq 0$ 的 (I_i,ξ_i), $Q_0^-=Q_0\setminus Q_0^+$. 则有

$$\sum_{(I,\xi)\in Q_0^+}\left|\int_I f(x)dx-f(\xi)|I|\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}.$$ 于是

$$\sum_{(I,\xi)\in Q_0}\left|\int_I f(x)dx-f(\xi)|I|\right|=\left(\sum_{Q_0^+}+\sum_{Q_0^-}\right)\leq\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon.$$

□

由 E_n 的定义, 对每个 $x\in E_n$, 存在 u_x, v_x 满足 $x\in(u_x,v_x]\subseteq B_{\delta(x)}(x)$, 使得 $|F(v_x)-F(u_x)-f(x)(v_x-u_x)|>\frac{1}{n}(v_x-u_x)$. 现在定义一个 E_n 上的规范 $\delta_1:E_n\to\mathbb{R}_{>0}$ 满足 $B_{\delta_1(x)}(x)\subseteq(u_x,v_x)$. 则 $\{B_{\delta_1(x)}(x)\}_{x\in E_n}$ 构成 E_n 的开覆盖, 于是存在可数个互不相交的闭区间 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $E_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ 以及 $\xi_i\in I_i\cap E_n$ 满足 $I_i\subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$. 设 $L=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$. 再取 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\sum_{i=1}^{N}|I_i|>\frac{L}{2}$. 由 Austin 引理, 存在 $\{1,\cdots,N\}$ 的子集 (不妨设为 $\{1,\cdots,Q\}$) 使

$$\sum_{i=1}^{Q}(v_{\xi_i}-u_{\xi_i})\geq\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N}(v_{\xi_i}-u_{\xi_i}).$$ 于是

$$\sum_{i=1}^{Q}(v_{\xi_i}-u_{\xi_i})\geq\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N}(v_{\xi_i}-u_{\xi_i})\geq\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N}|I_i|>\frac{L}{6}.$$

另一方面, $\{([u_{\xi_i},v_{\xi_i}],\xi_i)\}_{i=1}^{Q}$ 构成 I 的一个δ细的子分划. 所以由 Henstock 引理,

$$\sum_{i=1}^{Q}\left|\int_{u_{\xi_i}}^{v_{\xi_i}}f(x)dx-f(\xi_i)(v_{\xi_i}-u_{\xi_i})\right|<\frac{\varepsilon}{6n}.$$

于是

$$\frac{\varepsilon}{6n}>\sum_{i=1}^{Q}\left|\int_{u_{\xi_i}}^{v_{\xi_i}}f(x)dx-f(\xi_i)(v_{\xi_i}-u_{\xi_i})\right|=\sum_{i=1}^{Q}\left|F(v_{\xi_i})-F(u_{\xi_i})-f(\xi_i)(v_{\xi_i}-u_{\xi_i})\right|$$

$$>\sum_{i=1}^{Q}\frac{1}{n}(v_{\xi_i}-u_{\xi_i})>\frac{L}{6n}.$$ 所以 $L<\varepsilon$. 于是 E_n 是零测集.

□

下面考虑先微后积形向的微积分基本定理. 先来一个[illegible]引理.

Date:
Place:

Reminders

此定理中，f 的可积性是结论的一部分，不再是条件之一，这大大改进了 Riemann 积分版本的相应定理.

此 δ 表明对 $\forall \xi \neq a$，$\xi - \delta(\xi) > a$，于是 $B_{\delta(\xi)}(\xi)$ 一定盖不住 a. ⟶

[illegible] I_1 所以要想覆盖 a，必有 $\xi_1 = a$.

Date:
Place:

Reminders

定理：若 $F \in C[a,b]$ 在 (a,b) 上可导，$f = F'$，则 $f \in KH(a,b)$ 且有 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

证明：任取一个 $c \in (a,b)$，我们只需证 $f \in KH(a,c]$ 且 $\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a)$，接下来对 $f(-x)$ 应用上述结果可知 $f \in KH[c,b)$，于是 $f \in KH(a,b)$ 且有所求证的等式.

因为 F 在 a 连续，所以对 $\forall \varepsilon > 0$ 存在 $M_1 > 0$ 使得对 $\forall v \in [a, a+M_1)$，有 $|F(v) - F(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 另一方面，因为 $\lim_{v \to a^+} f(a)(v-a) = 0$，所以存在 $M_2 > 0$ 使对 $\forall v \in (a, a+M_2)$ $|f(a)(v-a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 因为 F 在 $(a,c]$ 上可导，所以对每个 $x \in (a,c]$，存在 $\eta(x) > 0$ 使得对 $\forall u, v$ 满足 $x \in [u,v] \subseteq B_{\eta(x)}(x)$，有 $|F(v) - F(u) - f(x)(v-u)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(v-u)$. 现在定义一个规范

$$\delta : [a,c] \to \mathbb{R}_{>0}. \quad \delta(x) = \begin{cases} \min(M_1, M_2) & x = a \\ \min(x-a, \eta(x)). & x \in (a,c] \end{cases}$$

现在设 (P, ξ) 是一个 δ 细规范，上述 δ 将 ξ_1 锚固在 a 点，而 $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))$，于是

$$\left| F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) \right|$$

$$= \left| F(x_1) - F(x_0) - f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \sum_{i=2}^{n} \left(F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right) \right|$$

$$\leq |F(x_1) - F(a)| + |f(a)(x_1 - a)| + \sum_{i=2}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

□

Date:
Place:

Reminders

Cousin 引理的 Lindelöf 推广中就有这种“分划”. 只不过是无穷的

Date:
Place:

Reminders

可以通过允许 F 在有限多或可数无穷多点上没有导数来加强上述结论. 最强的版本则要引入新的概念.

$\delta: E \to \mathbb{R}_{>0}$ 是 E 上的规范.

定义: ① 设 $E \subseteq I = [a,b]$. $P = \{([u_i, v_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ 是 I 的带标记子分划. (P,ξ) 叫 $(\delta\text{-}E)$ 细的, 如果 $\xi_i \in E$, 且 $[u_i, v_i] \subseteq B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$.

② $F: I \to \mathbb{R}$ 叫做在 $E \subseteq I$ 上具有可略变差, 如果对于 $\varepsilon > 0$ 存在 E 上的规范 δ 使得对任意 (δ, E) 细的带标记子分划 (P,ξ), 有 $\sum_{i=1}^{n} |F(v_i) - F(u_i)| < \varepsilon$.

性质: ① 若 F 在 E 上有可略变差, 则 F 在 E 上连续.

② 若 E 可数且 F 在 E 上连续, 则 F 在 E 上有可略变差.

③ Cantor 函数在 Cantor 集上没有可略变差 (因此不是每个在 E 上连续的函数都有可略变差).

证明: ① 对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta: E \to \mathbb{R}_{>0}$ 使得对任意 (δ, E) 细带标子分划 (P,ξ) 有 $\sum_{i=1}^{n} |F(v_i) - F(u_i)| < \varepsilon$. 特别地, 对 $x \in E$, 以及任意 u, v 满足 $x \in [u,v] \subseteq B_{\delta(x)}(x)$. $([u,v], x)$ 本身即一个带标子分划. 所以有 $|F(v) - F(u)| < \varepsilon$. 取 $x = u$ 或 v 可得对 $\forall y \in B_{\delta(x)}(x)$, 有 $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$. 此即 $\lim_{y \to x} F(y) = F(x)$. 所以 F 在 x 连续

② 设 $E = \{x_1, x_2, \cdots\}$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, F 在 x_k 处连续 $\Rightarrow \exists \delta_k > 0$, 使得对 $\forall u, v \in B_{\delta_k}(x_k)$. $|F(u) - F(v)| < \frac{\varepsilon}{2^k}$. 定义 $\delta: E \to \mathbb{R}_{>0}$
$x_k \mapsto \delta_k$.

补性质：设 f 在 E 上 a.e 为零 求证 (KH)$\int_a^b f(x)dx=0$. →

证明：设 $E=\{x\in I \mid f(x)\neq 0\}$. 于是 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 其中 $E_n=\{x\in I \mid n-1<|f(x)|\le n\}$. E 零测 ⇒ E_n 零测 于是对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $\{I_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ 使 $E_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{n,i}$ $\sum_{i=1}^{\infty}|I_{n,i}|<\frac{\varepsilon}{n\cdot 2^n}$. 对于 $x\in E$, x 必属于 E_n. 于是存在 $I_{n,i}$ 使 $x\in I_{n,i}$. 于是可取 $\delta_x>0$ 使 $B_{\delta_x}(x)\subseteq I_{n,i}$. 定义 $\delta: I\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\delta(x)=\begin{cases}\delta_x & x\in E\\ 1. & x\notin E\end{cases}$

则对任意 δ 细带标分划 (P,ξ) 有

$$|S(f,P,\xi)|=\left|\sum_{\xi_i\in E}f(\xi_i)|I_i|\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\xi_i\in E_n}f(\xi_i)|I_i|\right|$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\xi_i\in E_n}|f(\xi_i)|\,|I_i|\le\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{\xi_i\in E_n}|I_i|<\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|I_{n,i}|<\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{\varepsilon}{n\cdot 2^n}\;=\varepsilon$$ □

推论：Cantor $\overset{F}{\text{函数}}$在 Cantor $\overset{K}{\text{集}}$上非变差可略 ↗

证明：若 F 在 K 上变差可略. 注意 $F'(x)=0$. $x\in I\setminus K$.

所以有 $F(x)-F(0)=\int_0^x 0\,dx$. 于是 $F(x)\equiv 0$. 矛盾. □

对任意 (δ,E) 细分划 (P,ξ) $\sum_{i=1}^{n}|F(v_i)-F(u_i)|\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon$.

③ 可通过下面的定理直接推出. 此处从定义出发的证明就省略了. □

(广义积分的补充性质)

引理：设 $f\in KH[a,b]$. $F(x)=\int_a^x f(x)dx$. $E=\{x\in I \mid F$ 在 x 处不可导或 $F'\neq f\}$, 则 F 在 E 上有可略变差

证明：之前已证明 E 是零测集. 于是不妨设 f 在 E 上取值为零. 对于任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta: I\to\mathbb{R}$ 使得对任意 δ 细的带标分划 $\{(I_i,\xi_i)\}_{i=1}^{n}$ 有 $\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{I_i}f(x)dx-f(\xi_i)|I_i|\right|<\varepsilon$. 现在设 (P,ξ) 是一个 (δ,E) 细的带标分划 于是 $\xi_i\in E$, $f(\xi_i)=0$. 所以有

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{I_i}f(x)dx\right|=\sum_{i=1}^{n}|F(v_i)-F(u_i)|<\varepsilon \quad \text{其中 } I_i=[u_i,v_i].$$

所以 F 在 E 上变差可略. □

(广义积分, N-L 公式)

定理：设 F 在 [a,b] 上连续. 且除一个零测集 E 以外可导且在 E 上变差可略. 定义 $f(x)=\begin{cases}F'(x) & x\in I\setminus E\\ 0 & x\in E\end{cases}$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

证明：对 $\forall\varepsilon>0$. F 在 E 上变差可略 ⇒ $\exists\delta_1: E\to\mathbb{R}_{>0}$ 使得对 $\forall$(δ,E) 细的分划 $\{([u_i,v_i],\xi_i)\}$ 有 $\sum_{i=1}^{n}|F(v_i)-F(u_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 对于 $x\in I\setminus E$. 由 $F'(x)=f(x)$ 知 存在 δ_x 使得对任意 u, v 满足 $x\in[u,v]\subseteq B_{\delta_x}(x)$, 有

$$|F(v)-F(u)-f(x)(v-u)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

于是可定义 规范 $\delta: I\to\mathbb{R}$.

$$x\mapsto\delta(x)=\begin{cases}\delta_1(x) & x\in E\\ \delta_x. & x\notin E\end{cases}$$

(缺换KH可积. AC版微积分基本定理. 可测集, …)

对于δ细的带标分割(P,ξ).

$$\left|S(f,P,\xi)-(F(b)-F(a))\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-(F(x_i)-F(x_{i-1}))\right)\right|$$

$$\leq \sum_{\xi_i\in E}\left|f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-(F(x_i)-F(x_{i-1}))\right|$$

$$+\sum_{\xi_i\notin E}\left|f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-(F(x_i)-F(x_{i-1}))\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon.$$ □.

§4.5 积分的其它性质

回到Riemann积分的世界

定理(第一积分中值定理) 设 $f\in C[a,b]$. $g\in R[a,b]$. $g\geq 0$. 则存在 $\xi\in[a,b]$. 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

证明: 设 $m\leq f(x)\leq M$. 于是 $m\,g(x)\leq f(x)g(x)\leq M\,g(x)$ 积分得

$m\int_a^b f(x)\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx$. 若 $\int_a^b g(x)dx=0$. 则 $\int_a^b f(x)g(x)=0$.

于是任意 $\xi\in[a,b]$ 满足条件. 若 $\int_a^b g(x)dx>0$. 则有

$m\leq\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M$ 所以由连续函数介值定理. 存在 $\xi\in[a,b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ □.

推论: 取 $g(x)=1$. 得 存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ □.

定理(第二积分中值定理). 若 $f \in R[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上单调.

(1) 若 g 减, $g \geq 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 若 g 增. $g \geq 0$. 则存在 $\eta \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\eta^b f(x)dx$$

(3) 存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

证明(1): 设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 则 F 连续于是有最小和最大值 m 和 M.

~~若 $g(a)=0$ 则 g~~ 设 $L=\sup\limits_{x\in I}|f(x)|$. 因为 g 单调. 所以可积. 所以对 $\forall\varepsilon>0$

存在分割 P. 使 $\sum_{i=1}^n \omega(g,I_i)|I_i| < \frac{\varepsilon}{L}$. 于是

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(g(x)-g(x_{i-1}))dx + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$\leq L\cdot\sum_{i=1}^n \omega(g,I_i)|I_i| + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i)-F(x_{i-1}))$$

$$< L\cdot\frac{\varepsilon}{L} + \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1})-g(x_i)) + F(b)g(x_{n-1}). \leq \varepsilon + Mg(a).$$

同理可得 $\int_a^b f(x)g(x)dx \geq -\varepsilon + mg(a)$. 于是有 (若 $g(a)=0$. 则 g 恒为零. 平凡, 所以可设 $g(a)>0$)

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)} \leq M.$$ 由 F 的连续性知. 存在 ξ. 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)F(\xi).$$

(2). 与(1)同理. 或换元 $x \mapsto a+b-x$ 变成(1).

(3) 若 g 递减. 令 $\varphi(x)=g(x)-g(b)$. 则由(1)知(3)成立.

若 g 递增. 令 $\varphi(x)=g(b)-g(x)$. 仍由(1)知(3)成立. □

推论：若 $u,v\in C^n[a,b]$，则 →

$$\int_a^b u(x)v^{(n)}(x)dx=\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)\right)\Bigg|_a^b+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}(x)v(x)dx.$$

证明：对 n 归纳即可。 □

Taylor余式的

定理（积分余项）$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$

证明：$R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x)$. 于是 $R_n^{(k)}(x_0)=0$. $k=0,\dots,n$.

$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$. 所以

$$R_n(x)=\int_{x_0}^x R_n'(t)dt=(t-x)R_n'(t)\Big|_{x_0}^x-\int_{x_0}^x(t-x)R_n''(t)dt$$

$$=-\frac{1}{2}(t-x)^2R_n''(t)\Big|_{x_0}^x+\int_{x_0}^x\frac{(t-x)^2}{2}R_n'''(t)dt=\cdots$$

先取 δ_2,δ_4. 再取 δ_1,δ_3 →

$$=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

此处要求 $f\in C^{n+1}[a,b]$.
比 (和(余项要求的强. □

□

例：① $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}x\,d(\sin x)=\left[\cos^{m-1}x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^{m-2}x\,dx$

$=(m-1)(I_{m-2}-I_m)$

$$\Rightarrow I_m=\frac{m-1}{m}\cdot I_{m-2}.\Rightarrow\begin{cases}I_{2n-1}=\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.\\ I_{2n}=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Riemann-Stieltjes 积分

定理（分部积分）设 $u,v\in C^1[a,b]$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

证明：$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ 所以

$$u(b)v(b)-u(a)v(a)=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx.$$ □

定理（换元法连续版）设 $f\in C[a,b]$. $\varphi\in C^1([\alpha,\beta]\to[a,b])$ 且 $\varphi(\alpha)=a$. $\varphi(\beta)=b$. 则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

证明：设 $F(x)=\int_a^x f(x)dx$. 则 F 可导. 于是 $F(\varphi(t))$ 可导且有

$$(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

所以 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$ □

定理（换元法R可积版）设 $f\in R[a,b]$. $\varphi\in C^1[\alpha,\beta]$. φ 严格单调增

$\varphi(\alpha)=a$. $\varphi(\beta)=b$. 则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

证明：对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_1>0$ 使 $[a,b]$ 的任一 δ_1 细分划 $\{([x_{i-1},x_i],\xi_i)\}_{i=1}^n$ 有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 对于 $\delta_1>0$. 由 φ 一致连续. 存在 $\delta_3>0$ 使得对任一 $t',t''\in[\alpha,\beta]$. $|t'-t''|<\delta_3$. 有 $|\varphi(t')-\varphi(t'')|<\delta_1$.

同样对于 $\varepsilon>0$. 存在 $\delta_2>0$ 使 $[\alpha,\beta]$ 的任一 δ_2 细分划 $\{([t_{i-1},t_i],\tau_i)\}_{i=1}^n$ 有 $\left|\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})-\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

由 φ' 连续于是 R 可积知 存在 δ_4. 使对任意分划 $\{[t_{i-1},t_i]\}_{i=1}^n$. 有 $\sum_{i=1}^n\omega(\varphi',[t_{i-1},t_i])(t_i-t_{i-1})<\frac{\varepsilon}{3M}$. 其中 $M=\sup_{x\in I}|f(x)|$.

② $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx \qquad x = \frac{\pi}{2} - y$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^m(\frac{\pi}{2}-y)\cdot d(\frac{\pi}{2}-y)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m y\,dy = \begin{cases} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}. & m=2n-1 \\ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}. & m=2n \end{cases}$

③ $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad x = \cos\theta$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\theta(-\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta$

$= \frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

④ $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx,\ J = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx.$

$I = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} d(\frac{\sin\beta x}{\beta}) = \left[e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{\beta}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{\beta} e^{-\alpha x}\alpha\,dx$

$= 0 + \frac{\alpha}{\beta}J.$

$J = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} d(-\frac{\cos\beta x}{\beta}) = \left[-e^{-\alpha x}\frac{\cos\beta x}{\beta}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{\cos\beta x}{\beta} e^{-\alpha x}\alpha\,dx$

$= \frac{1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}I.$

$\Rightarrow I = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \qquad J = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$

⑤ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx$

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\sin 2x}{2}dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin(2x)\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin x\,dx = \frac{1}{2}(I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log\sin x\,dx)$

$= \frac{1}{2}(I + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx) = I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\log 2.$ □.

现在取 $\delta < \min(\delta_2.\delta_3.\delta_4)$. 则对 δ 细的分割 $\{([t_{i-1}.t_i].\tau_i)\}$.

设 $x_i = \varphi(t_i).\ \xi_i = \varphi(\tau_i).$ 则 $|x_i - x_{i-1}| = |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \delta_1.$

所以 $\{([x_{i-1}.x_i].\xi_i)\}_{i=1}^n$ 是 δ_1 细的. 于是有

$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right|$ 由 Lagrange. $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\eta_i)(t_i - t_{i-1})$

$\le \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\right| + \left|\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right|$

$+ \left|\sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})\right|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^n |f(\varphi(\tau_i))|\,|\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\eta_i)|(t_i - t_{i-1})$

$\le \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\sum_{i=1}^n \omega(\varphi'.[t_{i-1}.t_i])(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$ □.

反常积分: 设 $[a.b)$ 是 $\mathbb{R}_\infty$ 的区间, $f: [a.b) \to \mathbb{R}$.
若对 $\forall c \in [a.b)$. $f \in R[a.c]$. 且 $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$ 存在 (记为A) 则
记 $\int_a^b f(x)dx = A$. 称为 f 在 $[a.b)$ 上的反常积分.

定理(Hake) 设 $[a.b]$. $f: I \to \mathbb{R}$. 则 $f \in KH[a.b] \Leftrightarrow$ 存在 $A \in \mathbb{R}$.
s.t. $\forall c \in [a.b)$. $f \in KH[a.c]$. 且 $\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)dx = A$. 此时有 $A = \int_a^b f(x)dx$.
证明略. 需要 Henstock 引理.

续前: $\sin^{2n+1}(x) \le \sin^{2n}(x) \le \sin^{2n-1}(x)$. 在$[0, \frac{\pi}{2}]$上积分得

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},\ 即$$

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}.$$ 求 $n\to\infty$ 的极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}.\ 即$$

平面区域的面积到重积分部分统一处理. →

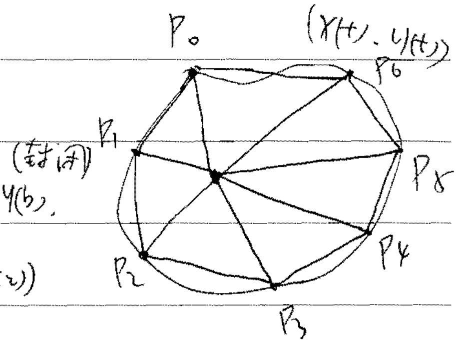
$$\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n+1}\left[\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right]^2$$ 它等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$ 这两个极限都叫Wallis公式.

高中解析几何小练习 →

§4.6 定积分的应用.

一. 面积.



设 $I=[a,b]$. $x, y: I\to\mathbb{R}$ 是 C^1 函数 满足: ① $x(a)=x(b)$, $y(a)=y(b)$.

② 对于 $t_1<t_2\in I$, $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$ 当且仅当 $t_1=a$, $t_2=b$. (不自交).

则映射 $t\mapsto(x(t), y(t))$ 定义了平面上的简单闭曲线 γ 我们可按如下方式定义它所围区域的面积.

对于区间 I 的任一分划 $P=\{\overset{a}{\overset{\shortparallel}{t_0}}<t_1<\cdots<t_{n-1}<\overset{b}{\overset{\shortparallel}{t_n}}\}$.

设 $P_i=(x(t_i), y(t_i))$ $(i=0,1,\cdots,n)$. 则折线 $\overrightarrow{P_0P_1P_2\cdots P_n}$ 给出曲线 γ 的一个近似. 它所围多边形的面积为

$$S(\gamma, P) = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix}x_{n-1} & y_{n-1}\\ x_n & y_n\end{vmatrix}\right).$$

其中 $x_i=x(t_i)$, $y_i=y(t_i)$. 于是

$$S(\gamma, P) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})y(t_i)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\left(y(t_{i+1})-y(t_i)\right) - \sum_{i=0}^{n-1}\left(x(t_{i+1})-x(t_i)\right)y(t_i)\right]$$

注意 $y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + \cdots y''(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)^2$

$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + \cdots x''(\eta_i)(t_{i+1}-t_i)^2$

$y_{i+1}-y_i=y'(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$

~~(有限)~~

~~当 C^2 减弱为 C^1 甚至分段 C^1 时，面积仍可如此定义.~~ →

$$\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)\,y'(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} x(\xi_i)\,y'(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)+\sum_{i=0}^{n-1}\big(x(t_i)\ \ x(\xi_i)\big)\,y'(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$$

$$=S(x\cdot y'.\,P.\,\xi)+\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} x'(\xi_i)\,y'(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)^2}_{R_1}.$$

$|R_1|\le A_1\cdot B_1\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)^2\le A_1\cdot B_1\,\|P\|\cdot I.$

$A_1=\sup|x'|$

$B_1=\sup|y'|$

同理 $\sum_{i=0}^{n-1}\big(x(t_{i+1})-x(t_i)\big)\,y(t_i)=S(x'y.\,P.\,\tilde{\xi})+R_2.$

$|R_2|\le A_1B_1\,\|P\|\cdot I.$ 于是

$$S(\gamma.P)=\frac{1}{2}\Big(\Sigma(\cdots)-\Sigma(\cdots)\Big)=\frac{1}{2}\Big[S(xy'.\,P.\,\xi)-S(x'y.\,P.\,\tilde{\xi})\Big]+O(\|P\|).$$

$$\Rightarrow S=\lim_{\|P\|\to0}S(\gamma\cdot P)=\frac{1}{2}\int_a^b\big(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\big)\,dt.$$

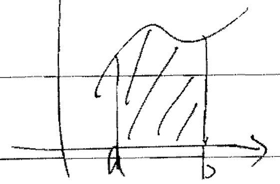
当 x,y 分段 C^1 时，上式仍成立.

~~所以 $S(\gamma.P)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\big[x(t_i)\,y'(t_i)-x'(t_i)\,y(t_i)\big](t_{i+1}-t_i)+O(t_{i+1}-t_i)^2$~~

~~当 $\|P\|\to0$ 时. 由 $x.y\in C^2[a.b]$ 易知~~

~~$$S=\lim_{\|P\|\to0}S(\gamma\cdot P)=\frac{1}{2}\int_a^b\big(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\big)\,dt$$~~

例：① 直角坐标系：

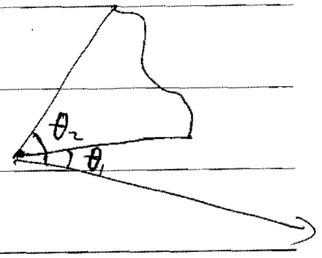


$$x(t)=\begin{cases} t & a\le t\le b\\ b & b\le t\le b+f(b)\\ b+f(b)+(b-t) & b+f(b)\le t\le b+f(b)+(b-a)\\ a & b+f(b)+(b-a)\le t\le b+f(b)+(b-a)+f(a).\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases} 0 & a\le t\le b\\ t & b\le t\le b+f(b)\\ f(2b+f(b)-t) & b+f(b)\le t\le b+f(b)+(b-a)\\ 2b+f(b)-a+f(a)-t & b+f(b)+(b-a)\le t\le b+f(b)+(b-a)+f(a)\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{2}\Big(\int_a^b+\int_b^{b+f(b)}+\int_{b+f(b)}^{2b+f(b)-a}+\int_{2b+f(b)-a}^{2b+f(b)-a+f(a)}\Big)(xy'-x'y)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt.$$

② 极坐标系.



$$x(t)=\begin{cases}(t-\theta_1)\,r(\theta_1)\cos\theta_1 & \theta_1-1\le t\le\theta_1\\ r(t)\cos t & \theta_1\le t\le\theta_2\\ (\theta_2+1-t)\,r(\theta_2)\cos\theta_2. & \theta_2\le t\le\theta_2+1\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}(t-\theta_1)\,r(\theta_1)\sin\theta_1 & \theta_1-1\le t\le\theta_1\\ r(t)\sin t & \theta_1\le t\le\theta_2\\ (\theta_2+1-t)\,r(\theta_2)\sin\theta_2 & \theta_2\le t\le\theta_2+1.\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(t)\,dt.$$

③ 椭圆面积：~~S=4~~ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

$$S=4\cdot\int_0^a b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=4ab\cdot\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi ab.$$

~~x = a cos t, y = b sint.~~ 若用极坐标，~~取~~ $\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$.

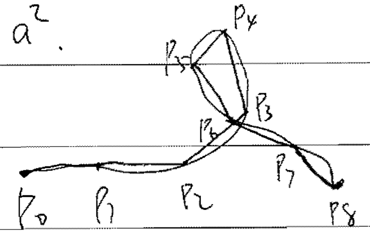
$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos\theta)^2}\,d\theta=a^2\sqrt{1-e^2}\,\pi=\pi ab.$$

若用参数式 $x(t)=a\cos t.\ y(t)=b\sin t.$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\cdot b\sin t+a\sin t\, b\sin t]\,dt=\pi ab.$$

④ 心形线 $r(\theta)=a(1+\cos\theta).$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{3}{2}\pi a^2.$$



二. 长度

设曲线γ 仍由 x(t), y(t) 给出, x, y ∈ C¹[a,b]. [illegible]

对于 [a,b] 的分划 $P=(\underset{\substack{\| \\ a}}{\overset{t}{\cancel{x}_0}}<\overset{t}{\cancel{x}_1}<\cdots<\overset{t}{\cancel{x}_{n-1}}<\underset{\substack{\| \\ b}}{\overset{t}{\cancel{x}_n}})$ 可用折线

$\overrightarrow{P_0P_1\cdots P_n}$ 代替曲线, 其长度为 （仍设 $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$）

$$L(\gamma.P) = \sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}$$

设 $x_{i+1}-x_i = x'(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$. $y_{i+1}-y_i = y(\eta_i)(t_{i+1}-t_i)$.

于是 $L(\gamma.P) = \sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}\,(t_{i+1}-t_i)$.

~~下面要用 $\left|\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}-\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}\right| \leq |y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|$ 将过 和式转化为 Riemann 和. 注意 y' 一致连续. 所以对于$\varepsilon>0$存在 $\delta>0$ 使得当 $\|P\|<\delta$ 时总有 $|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)|<\varepsilon$.~~

考虑 $\tau(\gamma,P) = S(\sqrt{x'^2+y'^2}, P, \xi)$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}\,(t_{i+1}-t_i).$$

τ 是 Riemann 和. 于是当 $\|P\|\to 0$ 时 有 $\tau(\gamma.P) = \int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$.

记积分值为 A. 则对 $\forall\varepsilon>0$. 存在 $\delta_1>0$ 使 $\|P\|<\delta_1$ 时有

$$|\tau(\gamma.P) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面. $|\tau(\gamma.P) - L(\gamma.P)|$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}-\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}\right)(t_{i+1}-t_i)\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}|y'(\xi_i)-y'(\eta_i)|\,|t_{i+1}-t_i|$$

因为 y' 一致连续. 所以存在 $\delta_2>0$ 使 $\|P\|<\delta_2$ 时, 有

$\left|y(\xi_i)-y'(\eta_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2\cancel{(b-}a|\Sigma|}$. 于是

$$\left|L(\gamma,P)-A\right| \le \left|\tilde{L}(\gamma,P)-A\right| + \left|\tilde{L}(\gamma,P)-L(\gamma,P)\right|$$

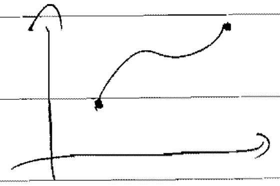
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2|\Sigma|}\cdot\left|t_{i+1}-t_i\right| = \varepsilon.$$

所以当$\|P\|\to 0$时，~~有~~ $L(\gamma,P)\to A$. A 就叫做 γ 的长度.

例：① 直角坐标系.

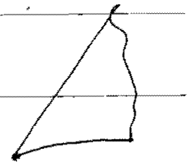
$(x(t),y(t)) = (t, y(t))$.

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'(t)}\,dt.$$



② 极坐标系. $x(t)=r(t)\cos t$. $y(t)=r(t)\sin t$.

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2(t)+r'(t)^2}\,dt.$$



③ 三角函数的几何意义.

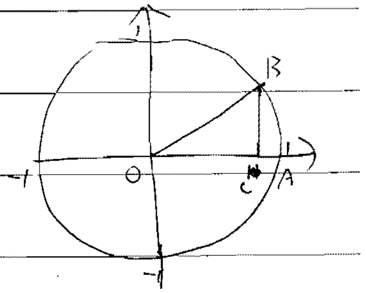
当弧长AB为x时，弦长$BC=$?

设$BC=y$，则 $OC=\sqrt{1-y^2}$.

~~在~~弧$\overset{\frown}{AB}$：$(t, \sqrt{1-t^2})$，$\sqrt{1-y^2}\le t\le 1$.

于是 $L_{\overset{\frown}{AB}}=\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos\sqrt{1-y^2} = \arcsin y = x$

所以 $y=\sin x$. 其它三角函数类似.



K的计算 (Landen变换): 考虑 $I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$. $(a,b>0)$

① 设 $x=b\tan\theta$, 则

$$I(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}}.$$

② 设 $x=t+\sqrt{t^2+ab}$, 则 $t=\frac{x^2-ab}{2x}$. $dx=\frac{x}{\sqrt{t^2+ab}}dt$

$$(x^2+a^2)(x^2+b^2)=4x^2\left(t^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right).$$

$$I(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2x\sqrt{t^2+(\frac{a+b}{2})^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{t^2+ab}}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\left(t^2+(\frac{a+b}{2})^2\right)\left(t^2+(\sqrt{ab})^2\right)}}$$

若令 $a_1=\frac{a+b}{2}$. $a_2=\sqrt{ab}$. 则有 $I(a,b)=I(a_1,b_1)$ 于是, 令 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$. $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$. 有 $I(a,b)=I(a_n,b_n)$. $\forall n\in N$. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$. 则 $\lim_{n\to\infty}b_n=A$. $I(a,b)=I(A,A)=\frac{\pi}{2A}$. 所以可以通过迭代法算出A的近似值然后得 I. 以及K. A叫做 a,b 的算术-几何平均.

K可由算术几何平均方法计算.

另外. $\frac{K(\frac{1}{2})}{\sqrt{2}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

其它椭圆积分亦可用类似方法求近似值. 见 Louis V. King 的 On the Direct Numerical Calculation

④ 椭圆周长. $x(t)=a\cos t$. $y(t)=b\sin t$.

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,dt=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2t}\,dt$$

$=4aE(e)$. E是第二类完全椭圆积分

⑤ 心脏线. $r=a(1+\cos\theta)$

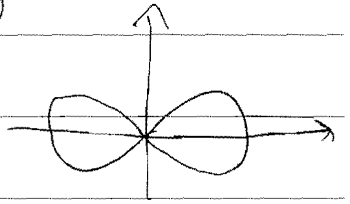
$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=8a$$

⑥ 摆线(最速降线) $x=r(t-\sin t)$. $y=r(1-\cos t)$.

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(1-\cos t)^2+r^2\sin^2t}=2r\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=8r.$$

⑦ 伯努力双纽线. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$

$r^2=2a^2\cos2\theta$.



$$S=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos2\theta\,d\theta=2a^2.$$

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}a\frac{d\theta}{\sqrt{\cos2\theta}}=4aK\left(\frac{1}{2}\right).$$

K是第一类完全椭圆积分.

Abel证明, ~~双纽线亦可用尺规n等分~~ 如果 $n\in N$ 满足圆可用尺规n等分, 则双纽线亦可用尺规n等分.

这使问题可以有双纽线轨道的解.

面积原理.

1. 若当 $x \ge m \in \mathbb{N}$ 时 f 非负递增. 则对 $\xi \ge m$, 有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)dx\right| \le f(\xi)$$

证明: 设 $n=[\xi]$. $\int_m^n f(x)dx = \sum_{k=m+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx$. 而

$f(k-1) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le f(k)$ 故 $\sum_{k=m}^{n-1} f(k) \le \int_m^n f(x)dx \le \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$.

另一方面 $0 \le \int_n^{\xi} f(x)dx \le f(\xi)(\xi-n) \le f(\xi)$. 所以有

$$-f(\xi) \le -f(m) \le \int_m^{n} f(x)dx - \sum_{k=m}^{n} f(k) \le f(\xi) - f(m) \le f(\xi).$$

□

2. 若当 $x \ge m \in \mathbb{N}$ 时 f 非负递减, 则极限

$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)dx\right)$ 存在 (记为 α). 且 $0 \le \alpha \le f(m)$.

若进一步有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 则

$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)dx - \alpha\right| \le f(\xi-1)$ 对 $\forall\, \xi \ge m+1$

证明. 令 $g(\xi) = \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)dx$. 则

$g(n) - g(n+1) = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \ge 0$. 另一方面,

§4.7 Euler-Maclaurin 公式.

首先看一个例子.

例: 设 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^{\mu}$. $\mu \in \mathbb{N}$. ($b > a > 0$).

对任意 $n \in \mathbb{N}$. $h = \frac{b-a}{n}$. $x_i = a + ih$ $i = 0, \cdots, n$.

问题: Riemann 和 $S_n(f,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h$ 与积分 $\int_a^b f(x)dx$ 究竟相差多少?

$$S_n(f,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)h = \sum_{i=0}^{n-1} (a+ih)^{\mu}\cdot h$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}a^{\mu-j}\cdot(ih)^j\cdot h = \sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}a^{\mu-j}h^{j+1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i^j\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}a^{\mu-j}h^{j+1}\left(\frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j}\binom{j+1}{k}B_k n^{j+1-k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\mu}\sum_{j=k}^{\mu}\binom{\mu}{j}a^{\mu-j}\frac{h^{j+1}}{j+1}\binom{j+1}{k}B_k n^{j+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\mu}\frac{B_k a^{\mu} h}{n^{k-1}}\frac{\mu!}{k!(\mu+1-k)!}\cdot\sum_{j=k}^{\mu}\frac{(\mu+1-k)!}{(j+1-k)!(\mu-j)!}\left(\frac{nh}{a}\right)^j$$

$$= \sum_{k=0}^{\mu}\frac{B_k a^{\mu} h}{n^{k-1}}\frac{1}{k!}\frac{\mu!}{(\mu+1-k)!}\cdot\frac{b^{\mu+1-k}-a^{\mu+1-k}}{a^{\mu+1-k}}\cdot\frac{(nh)^{k-1}}{a^{k-1}} \quad)$$

$$= \sum_{k=0}^{\mu} B_k\binom{\mu}{k}h^k\frac{b^{\mu+1-k}-a^{\mu+1-k}}{\mu+1-k}.$$

$$g(n) = \sum_{k=m}^{n-1}\left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx\right) + f(n) \geq f(n) \geq 0 .$$

所以 $\lim_{n\to\infty} g(n)$ 存在，记为α. 由 $0 \le g(n) \le f(m)$ 知 $0 \le \alpha \le f(m)$

若 $f(x) \to 0\ (x \to +\infty)$. 则

$$g(\xi) - \alpha = \sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)dx - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)dx\right)$$

$$= -\int_{[\xi]}^{\xi} f(x)dx - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=[\xi]+1}^{n} f(k) - \int_{[\xi]}^{n} f(x)dx\right)$$

这种修正项的好处是仅用到 f 在端点 a. b 附近的信息. 而没有用到任何区间内部的信息. →

$$= -\int_{[\xi]}^{\xi} f(x)dx + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}\left(f(x) - f(k)\right)dx \quad (*)$$

$$(*) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=[\xi]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}\left(f(k-1) - f(k)\right)dx = f([\xi]) \le f(\xi-1).$$

$$(*) \ge -\int_{[\xi]}^{\xi} f(x)dx \ge -f([\xi]) \ge -f(\xi-1).$$

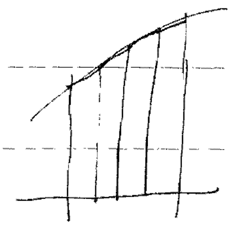
□

推论：若当 $x \ge 1$ 时 $f(x)$ 非负递减 则 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同时收敛同时发散.

$$= \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\left(f(b) - f(a)\right) + \sum_{l\ge1}\frac{B_{2l}}{(2l)!}h^{2l}\left(f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)\right).$$

若定义 $\overset{\text{梯形和}}{T_n(f,a,b)} = S_n(f,a,b) + \frac{h}{2}\left(f(b) - f(a)\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}h\left(f(x_i) + f(x_{i-1})\right)$$



则有 $\int_a^b f(x)dx = T_n(f,a,b) - \sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}h^{2l}\left(f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a)\right) + R_{n,m}$

因为每一项关于f都是线性的. 所以上式对一切多项式都成立. 这个式子给出了用梯形和近似计算多项式函数的积分时的误差. 我们可将 $T_n(f,a,b)$ 为主要项. $\sum_{l=1}^{m}$ 为修正项. $R_{n,m}$ 为误差项. 只取主要项时误差仍比较大. 取一些修正项后可大大改进精确. 具体的误差限可由对误差项的估计得到.

下面一个自然的问题是, 对其它充分光滑的函数 f. 是否也有像上面一样的公式? 其答案即 Euler-Maclaurin 公式.

定理：设 $f \in C^m[a,b]$. 则对 $\forall n \in N\ (n \ne 0)$. 有

$$\int_a^b f(x)dx = T_n(f,a,b) - \sum_{k=2}^{m}\frac{B_k}{k!}h^k\left(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right) + R_{m,n}(f,a,b)$$

其中 $R_{m,n} = \frac{(-1)^m h^m}{m!}\int_a^b B_m\left(\left\{\frac{x-a}{b-a}n\right\}\right) f^{(m)}(x)dx$. $B_m(t)$为第

Date: . . . .
Place: . . . .

Reminders

Date:
Place:

Reminders

m 个 Bernoulli 多项式 ~~函数~~ ~~$B_m(t) = B_m(t-[t])$~~

$\{y\} = y-[y]$ 为 y 的小数部分.　$B_m(t) = \sum_{k=0}^{m} B_k t^{m-k}$.

证明: 首先考虑 n=1 的情况. 即

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k!}(b-a)^k\left(f^{(k-1)}_{(b)} - f^{(k-1)}_{(a)}\right) + R_{m,1}(f, a$$

若记 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. 则 上式等价于

$$F(b) = F(a) + \frac{F'(a)+F'(b)}{2}(b-a) - \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k!}\left(F^{(k)}_{(b)} - F^{(k)}_{(a)}\right)(b-a)^k + R_{m,1}(F'$$

它看起来很像 Taylor 公式, 只不过兼顾了 x=a 和 x=b 的信息. 不像 Taylor 公式一样只用了 x=a 处的信息. 事实上它们的推导也非常相似

我们首先回忆一下 Taylor 公式 (积分余项) 的推导. 设 $f, g \in C^m[$

则有

$$\int_a^b f(x) g^{(m)}(x) dx = \left[\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k f^{(k)}(x)\, g^{(m-1-k)}(x)\right]_a^b + (-1)^m \int_a^b f^{(m)}(x)\, g(x) dx.$$

它有一种更好用的形式

$$\int_a^b f(x)\, g^{(m)}(a+b-x) dx = \sum_{k=0}^{m-1}\left[f^{(k)}(a)\, g^{(m-1-k)}(b) - f^{(k)}(b)\, g^{(m-1-k)}(a)\right] + \int_a^b f^{(m)}(x)\, g(a+b-x)$$

若要得到 Taylor 公式, 只需取 g_m 是一个多项式满足

① $g_m^{(m)}(x) = 1$.　② $g_m^{(m-1-k)}(a) = 0$.　$\forall\, k = 0 \ldots m-1$.

$\Leftrightarrow g_m^{(k)}(a) = 0$.　$k = 0, \ldots, m-1$.

条件①推出 $g_m(x) = \frac{(x-a)^m}{m!} + g_1 \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + g_m$

条件②则推出 $g_1 = g_2 = \cdots = g_m = 0$.

若要得到E-M公式，则要选取多项式 $g_m(x)$ 满足

① $g_m^{(m)}(x) = 1$. ② $g_m^{(m-1)}(b) = \frac{b-a}{2}$. $g_m^{(m-1)}(a) = \frac{a-b}{2}$. ③ $g_m^{(k)}(a) = g_m^{(k)}(b)$, $k=0..m-$

其中①推出 $g_m(x) = \sum_{i=0}^{m} g_i \frac{(x-a)^{m-i}}{(m-i)!}$, $g_0 = 1$. 条件②是③的推论. 而

③推出 $\sum_{i=0}^{m-k-1} g_i \frac{(b-a)^{m-k-i}}{(m-k-i)!} = 0$. 整理得

$$\sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{m-k}{i} \left(\frac{i!\, g_i}{(b-a)^i}\right) = 0.$$ 由 Bernoulli 数的定义知

$g_i = \frac{(b-a)^i}{i!} B_i$. 于是 $g_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(b-a)^i}{i!} B_i \frac{(x-a)^{m-i}}{(m-i)!}$

$$= \frac{(b-a)^m}{m!} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^i = \frac{(b-a)^m}{m!} \cdot B_m\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$g_m(x)$ 还满足 $g_m^{(k)}(x) = g_{m-k}(x)$. 将这些结果代回 $\int_a^b f(x) g_m^{(m)}(a+b-x)\,dx$ 得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) - f(b)\left(a - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \left(f^{(k)}(a) - f^{(k)}(b)\right) g_{k+1}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{(b-a)^m}{m!} B_m\left(\frac{b-x}{b-a}\right) dx$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + \sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k!}(b-a)^k \left(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right)$$

$$\frac{(b-a)^m}{m!} \int_a^b f^{(m)}(x) B_m\left(\frac{b-x}{b-a}\right) dx.$$

$$\sum_{m\geq0} B_m(x)\frac{z^m}{m!} = \frac{ze^{xz}}{e^z-1} \quad \rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{m\geq0} B_m(1-x)\frac{z^m}{m!} = \frac{z e^{(1-x)z}}{e^z-1} = (-z)\cdot\frac{e^{x(-z)}}{e^{-z}-1} = \sum_{m\geq0} B_m(x)(-1)^m\frac{z^m}{m!}$$

最后，再利用 $B_m(1-x)=(-1)^m B_m(x)$ 即可得 $R_{m,1}$.

对于一般的 $n\in\mathbb{N}$ $(n\geq1)$. 记 $h=\frac{b-a}{n}$. $x_i=a+ih$ $(i=0,\dots,n)$.
则在每段 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ 上有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}h - \sum_{k=2}^{m}\frac{B_k}{k!}h^k\left[f^{(k-1)}(x_i)-f^{(k)}(x_{i-1})\right]$$

$$+\frac{(-1)^m}{m!}h^m\int_{x_{i-1}}^{x_i} B_m\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right)f^{(m)}(x)dx.$$

其中 $B_m\left(\frac{x_{}-x_{i-1}}{h}\right)=B_m\left(\frac{x-a}{h}-(i-1)\right)=B_m\left(\left\{\frac{x-a}{b-a}n\right\}\right)$，所以有

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}h$$

$$-\sum_{k=2}^{m}\frac{B_k}{k!}h^k\left[f^{(k-1)}(x_i)-f^{(k)}(x_{i-1})\right]+\frac{(-1)^m}{m!}h^m\int_{x_{i-1}}^{x_i} B_m\left(\left\{\frac{x-a}{b-a}n\right\}\right)f^{(m)}(x)dx\Bigg]$$

$$=T_n(f,a,b)-\sum_{k=2}^{n}\frac{B_k}{k!}h^k\left[f^{(k-1)}(b)-f^{(k)}(a)\right]+\frac{(-1)^m h^m}{m!}\int_a^b B_m\left(\left\{\frac{x-a}{b-a}n\right\}\right)f^{(m)}(x)dx$$

这就是 Euler-Maclaurin 公式的一般形式。 □

注：Euler 和 Maclaurin 只得到主项和修正项，余项 $R_{m,n}$ 是 Poisson 后来得到的。

Euler-Maclaurin 公式主要用在数论中. 因为它可以用积分估计和式的值. 设 $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ 充分光滑. $a,b\in\mathbb{N}$. $a<b$. 设 $h=b-a$. 于是 $h=1$. 此时 EM 公式可写为

$$\sum_{a\le k<b} f(k)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\right]+\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_a^b B_m(\{x\})f^{(m)}(x)dx.$$

例① $f(x)=\frac{1}{x}$. $[a,b]=[1,n]$. EM 公式给出

$$\sum_{1\le k<n}\frac{1}{k}=\int_1^n\frac{dx}{x}+\sum_{l=1}^{m}\frac{B_l}{l!}\left[(-1)^{l-1}\frac{(l-1)!}{n^l}-(-1)^{l-1}\frac{(l-1)!}{1}\right)$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_1^n B_m(\{x\})(-1)^m\frac{m!}{x^{m+1}}dx$$

$l=1$ 给出 $\frac{(-\frac{1}{2})}{1}\left[\frac{1}{n}-1\right]$. 两边同时加 $\frac{1}{n}$. 得 $(m\to 2m)$

$$H_n=\log n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(1-\frac{1}{n^{2l}}\right)-\int_1^n\frac{B_{2m}(\{x\})}{x^{2m+1}}dx \quad (*)$$

注意我们已知 $\lim_{n\to\infty}(H_n-\log n)=\gamma=0.5772\cdots$, 所以有

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}(H_n-\log n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{2l}\left(1-\frac{1}{n^{2l}}\right)-\int_1^n\frac{B_{2m}(\{x\})}{x^{2m+1}}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{B_{2l}}{2l}-\int_1^{\infty}\frac{B_{2m}(\{x\})}{x^{2m+1}}dx.$$ 所以

前式 $(*)$ 又可写为

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{l=1}^{m} \frac{B_{2l}}{2l} \cdot \frac{1}{n^{2l}} + \int_n^{\infty} \frac{B_{2m}(\{x\})}{x^{2m+1}} dx .$$

利用 $|B_{2m}(\{x\})| \le |B_{2m}|$ 可得

$$\left| \int_n^{\infty} \frac{B_{2m}(\{x\})}{x^{2m+1}} dx \right| \le |B_{2m}| \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m+1}} = \frac{|B_{2m}|}{2m\, n^{2m}},$$ 将 $m \mapsto m+2$ 可得

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{l=1}^{m} \frac{B_{2l}}{2l} \frac{1}{n^{2l}} - \theta_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)\, n^{2m+2}} .$$

其中 $0 < \theta_{m,n} < 1$. 取适当的 m, 可用上述公式加速对 γ 的计算.

② $f(x) = \log x$. 因为 $f'(x) = \frac{1}{x}$. 所以计算与上例非常相似. 最终结果为

$$\log n! = n\log n - n + \frac{\log n}{2} + C + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2l}}{2l(2l-1)\, n^{2l-1}}$$

$$+ \varphi_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)\, n^{2m+1}}$$

其中 $0 < \varphi_{m,n} < 1$. C 是需要用其它方法确定的常数.

由上式可知 $C = \lim\limits_{n\to\infty} \log \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$ 于是有

$$e^C = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}$$

Stirling 并未找到 C 的表达式. 它是 de Moivre 导出的 →

数学分析(2)也要研究~~多元函数微分学~~. ~~即多元函数 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$~~ 即依赖多个自变量的函数的微分和积分. 即 $f: D \to \mathbb{R}$ ~~定义域也可以是 $D \subseteq \mathbb{R}^n$.~~ 其中定义域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$

有时也研究多个值的函数. 即下置可写为

$$f: D \to \mathbb{R}^m, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}.$$

我们需研究 $\mathbb{R}^n$ 中的集合. 然后再考虑其上的函数.

代入 Wallis 公式得 $e^c = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} \sqrt{2} = \sqrt{2\pi}$. 所以

$c = \log\sqrt{2\pi}$. 所以得最终的 Stirling 公式:

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \sum_{l=1}^{m} \frac{B_{2l}}{2l(2l-1)n^{2l-1}} + \theta_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)n^{2m+1}}.$$

② 例如: $\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{\theta_{2,n}}{1260n^5}$

① $H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{\theta_{2,n}}{252n^6}$

---

§5. $\mathbb{R}^n$ 的拓扑.

§5.1 n维欧氏空间.

记 $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}$. $k \in \mathbb{N}$. 对于 $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$. 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的加法和数乘: $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(x_1, \cdots x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n)$

$\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $(\lambda, (x_1, \cdots, x_n)) \mapsto (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$

再定义 $0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$-: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (-x_1, \cdots, -x_n)$.

则 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ 构成线性空间, 加法单位为 $\vec{0}$. 加的逆运算为"−". 它的维数是 n. $e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,$
$e_n=(0,\cdots,0,1)$

构成一组基.

除了线性运算以外, $\mathbb{R}^n$ 上还有其它的一些运算.

1: 内积: $\langle\,,\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(\vec{x},\vec{y})\mapsto\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$

其中, 若 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)$, 则

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

内积运算满足如下性质:

① $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\geq 0$. "="成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x}=\vec{0}$.

② $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$. ③ $\langle\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y}\rangle$

~~③ $\langle\vec{x},\vec{y}_1+\vec{y}_2\rangle=\langle\vec{x},\vec{y}_1\rangle+\langle\vec{x},\vec{y}_2\rangle$,~~ $=\langle\vec{x}_1,\vec{y}\rangle+\langle\vec{x}_2,\vec{y}\rangle$.

④ 对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\langle\lambda\vec{x},\vec{y}\rangle=\lambda\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$.

(②+③ ④ 可推出 ③' $\langle\vec{x},\vec{y}_1+\vec{y}_2\rangle=\langle\vec{x},\vec{y}_1\rangle+\langle\vec{x},\vec{y}_2\rangle$.
④' $\langle\vec{x},\lambda\vec{y}\rangle=\lambda\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$.).

① 称为正定性. ② 称为对称性. ③④③'④' 合称双线性.

任何 $\mathbb{R}$-线性空间 V 配上一个对称正定双线性型 $\langle\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ 之组合则叫做内积空间. 若 $V=\mathbb{R}^n$. 则可证明

典则性. canonical. →

角度: $\theta(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

总可在V中挑选适当的基, 使 $\langle\,\rangle$ 的坐标表示与上述定义一致. 所以上述内积也称为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积. $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle)$ 称为n维欧氏空间.

2. 范数. $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\vec{x} \mapsto \sqrt{\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle}$.

范数具有如下性质:

① $\|\vec{x}\| \geq 0$, "=" 成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x} = \vec{0}$.

② 对 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\|$.

③ 对 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|x\| + \|y\|$.

"=" 成立 $\Leftrightarrow$ 存在 $\lambda > 0$ 使 $\vec{y} = \lambda\vec{x}$.

证明: ①② 显然. 对于 ③ 注意

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \langle\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}, \vec{x}\rangle + 2\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle\vec{y}, \vec{y}\rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

所以有③. "=" 成立 $\Leftrightarrow$ $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \|x\|\cdot\|y\|$. 由 Cauchy 不等式成立条件可知 $\vec{y} = \lambda\vec{x}$.

一般地. R空间V上赋以满足①②③的运算 $\|\cdot\|$ 后叫做赋范空间. 除了上述范数以外, 还可以有其它的范数, 例如

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \text{ 等.}$$

$|\langle x,y\rangle| = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2) \le \|x\|\|y\|$ →

$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2) \ge -\|x\|\|y\|$.

我们的范数还满足如下恒等式（平行四边形法则）

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

引理：若 $\mathbb{R}^n$ 上的范数满足平行四边形法则．则

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$$

是一个内积．

证明．正定对称都显然．只需证线性性．

$\langle x_1+x_2,y\rangle=\frac{1}{2}(\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2\|^2-\|y\|^2)$

$\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle=\frac{1}{2}(\|x_1+y\|^2-\|x_1\|^2-\|y\|^2+\|x_2+y\|^2-\|x_2\|^2-\|y\|^2)$.

所以只需证 $\|x_1+x_2+y\|^2+\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|y\|^2=\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2+\|x_1+x_2$

$\|x_1+x_2+y\|^2+\|y\|^2=2\|\frac{x_1+x_2}{2}+y\|^2+2\|\frac{x_1+x_2}{2}\|^2$.

$\|x_1+y\|^2+\|x_2+y\|^2=2\|\frac{x_1+x_2}{2}+y\|^2+2\|\frac{x_1-x_2}{2}\|^2$.

所以只需

$\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+2\|\frac{x_1+x_2}{2}\|^2=2\|\frac{x_1-x_2}{2}\|^2+\|x_1+x_2\|^2$

利用

$\|\frac{z}{2}\|=\frac{\|z\|}{4}$ 以及平行四边形法则可得上式，所以线性性③成立．要证④对于固定的 $x,y\in\mathbb{R}^n$．定义

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lambda\mapsto\langle\lambda x,y\rangle$. 则 $f(\lambda_1+\lambda_2)=f(\lambda_1)+f(\lambda_2)$

另一方面 $|f(\lambda)|=|\langle\lambda x,y\rangle|\le|\lambda|\|x\|\|y\|$ 所以 f 在 $\lambda=0$ 处连续．由 Cauchy 方程的有关结论，$f(\lambda)=c\lambda$．取 $\lambda=1$ 可知 $c=\langle x,y\rangle$，于是 $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$．此即④ □

设 $X\subseteq\mathbb{R}^n$. $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准度量.

一个取值在 X 中的序列即映射 $f: \mathbb{N}\to X$. 或记为 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 其中 $x_i\in X$.

定义: $x_0\in X$ 叫 $\{x_i\}$ 的极限 若对 $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall i>N$ 有 $d(x_i,x_0)<\varepsilon$. 此时记 $x_0=\lim_{i\to\infty}x_i$

性质: ① 若 $\{x_i\}$ 收敛 则极限唯一. ② 且 $\{x_i\}$ 有界.

③ $\lim_{i\to\infty}(x_i\pm y_i)=\lim_{i\to\infty}x_i\pm\lim_{i\to\infty}y_i$. ④ $\lim_{i\to\infty}(\lambda x_i)=\lambda\lim_{i\to\infty}x_i$

定义 若对 $\forall\varepsilon>0\ \exists N$ s.t. $\forall i,j>N$. $d(x_i,x_j)<\varepsilon$. 则称 $\{x_i\}$ 为 Cauchy 列.

Cauchy 准则 → 定理 $\{x_i\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_i\}$ 是 Cauchy 列

证明: $\Rightarrow$ 显然. $\Leftarrow$ 设 $x_i=(x_1^{(i)}\cdots x_n^{(i)})$ 则有 $|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}|\le d(x_i,x_j)$. 于是每个 $\{x_k^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 都是 Cauchy 列. 记 $\xi_k=\lim_{i\to\infty}x_k^{(i)}$. $\xi=(\xi_1,\cdots\xi_n)$.

对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $N_1,\cdots,N_n$ 使当 $i>N_k$ 时, $|x_k^{(i)}-\xi_k|<\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon$. 于是取 $N=\max(N_1\cdots N_n)$ 当 $i>N$ 时 $\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k^{(i)}-\xi_k|^2}}_{d(x_i,\xi)}<\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{n}}=\varepsilon$, 所以 $\lim_{i\to\infty}x_i=\xi$. □

~~[illegible]~~ $\|\cdot\|_p$ $(p\neq 2)$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 显然不满足平行四边形法则

引理: 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个范数. 则存在 $A,B>0$ 使得对 $\forall x\in\mathbb{R}^n$. 有

$$A\|x\|_1\le\|x\|_2\le B\|x\|_1$$

(需要紧集上连续函数的性质 以后再说.

以后将 $\mathbb{R}^n$ 上的范数 $\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 为欧氏范数.

3. 距离. $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_{\geq 0}$. $(x,y)\mapsto\|x-y\|$.

它满足: ① $d(x,y)\geq 0$. "=" $\Leftrightarrow$ $x=y$.

② $d(x,y)=d(y,x)$.

③ $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

一般地, 一个集合 X 配上满足①②③的函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 叫做度量空间.

$\mathbb{R}^n$ 上的距离还满足平移不变性 $d(x+a,y+a)=d(x,y$ 和齐次性 $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|d($

若 d 满足平移不变性 和齐次性 则 $\|x\|=d(x,0)$ 是一个范数. (显然)

若 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 满足 $a_i<b_i$，定义

$(a,b)=\{x=(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i<x_i<b_i,\ i=1,\cdots,n\}$

$[a,b]=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i\le x_i\le b_i,\ i=1,\cdots,n\}$

以下总假设 $X\subseteq\mathbb{R}^n$，d 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的标准欧氏度量

$f: X\to\mathbb{R}^m$ 中的 X 往往不是整个 $\mathbb{R}^n$，所以考虑 X 而不是 $\mathbb{R}^n$ 整体是有用的。

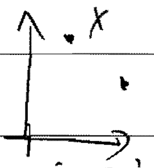
定理（B-W 极限点）有界数列必有收敛子列。

证明：设 $\|x_i\|<M$，$x_i=(x_1^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})$，则 $\{x_1^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 有界，于是有收敛子列，不妨重取 i，使 $\{x_1^{(i)}\}$ 收敛。接下来 $\{x_2^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 有界，于是也有收敛子列。如此继续 n 次，可得 $x_i=(x_1^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})$ 满足 $\lim\limits_{i\to\infty}x_k^{(i)}=\xi_k$，于是 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=\xi$。 □

注：无穷维空间中此定理不对，因为要抽无穷多次，停不下来。

§5.2 开集与闭集

在 $\mathbb{R}$ 上最常用的集合是区间 (a,b)，$[a,b]$ 等等。但在 $\mathbb{R}^n$ 上因为 $\mathbb{R}^n$ 上没有天然的（canonical）的序关系（如右图，$x<y$，$x=y$，$x<y$?）所以区间并不是很好用。



另一方面，形如 $B_\delta(x)=(x-\delta,x+\delta)$ 的区间还可定义为 $B_\delta(x)=\{y\in\mathbb{R}\mid d(x,y)<\delta\}$ 这在一般的度量空间上都可定义。

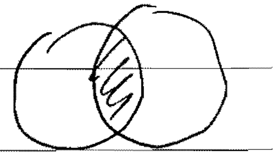
定义1. 设 (X,d) 是一个度量空间，对 $x_0\in X$，$\delta\in\mathbb{R}$，$\delta>0$，定义

$B_\delta(x_0)=\{y\in X\mid d(x_0,y)<\delta\}$. $\mathring{B}_\delta(x_0)=B_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$.

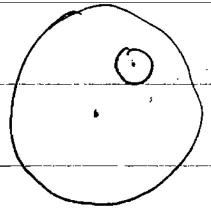
$\overline{B}_\delta(x_0)=\{y\in X\mid d(x_0,y)<\delta\}$.

称为以 x_0 为中心（以 δ 为半径）的开球、去心开球和闭球。

开球与开区间有类似之处，但仍不理想。例如两个开区间的交仍是开区间（或空集），但两个开球的交却未必了（闭球同理）。所以我们仍需拓展定义，使得相应的集合在集合运算下具有较好的性质。

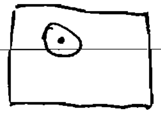


例：① $B_\delta(x_0)$ 是开集 因为对 $\forall y \in B_\delta(x_0)$，取 $r < \delta - d(y, x_0)$，



则有 $B_r(y) \subseteq B_\delta(x_0)$。

② (a, b) 是开集，设 $a = (a_1 \cdots a_n)$



$b = (b_1, \cdots, b_n)$，$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 满足

$a_i \leq x_i \leq b_i$，取 $r < \min(x_i - a_i, b_i - x_i)$，则 $B_r(x) \subseteq (a, b)$

③ $\mathbb{R}^n$ 是开集　④ ϕ 是开集。

⑤ 单点集 $E = \{x_0\}$ 不是开集。⑥ $[a, b]$ 不是开集。

例：$E_n = B_{\frac{1}{n}}(x_0)$，$n \in \mathbb{N}^*$ 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x_0\}$ 不是开集 →

①

定义2：设 (X, d) 同上，$E \subseteq X$，若对 $x_0 \in E$ 存在 $\delta > 0$ 使 $B_\delta(x_0) \subseteq E$ 则称 x_0 为 E 的内点。

② E 的内点全体构成的集合叫做 E 的内部，记为 E°。

③ 若 $E = E^\circ$，即 E 的每个点都是内点，则称 E 为 X中的 开集。

引理：i) 若 $S = \{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集构成的集合 则 $\cup S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ 也是开集。

ii) 若 $E_1, \cdots, E_n$ 是开集 则 $E_1 \cap \cdots \cap E_n$ 也是开集。

证明：i) 对于 $x \in \cup S$ 必存在 $\alpha \in A$ 使 $x \in E_\alpha$，于是存在 $\delta > 0$ 使 $B_\delta(x) \subseteq E_\alpha \subseteq \cup S$，所以 $\cup S$ 开。

ii) 对于 $x \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i$，存在 $\delta_1 \cdots \delta_n$ 使 $B_{\delta_i}(x) \subseteq E_i$。

取 $\delta = \min(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ 则有 $B_\delta(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} E_i$。　□

定义3：(X, d) 同上，$E \subseteq X$ 叫做 X中的 闭集，若 $X \setminus E$ 是开集。

等价说法：① 取 $x_0 \in X \setminus E$，若存在 $\delta > 0$ 使 $B_\delta(x_0) \subseteq X\setminus$ 则称 x_0 为 E 的外点。~~若E的点都是E的外点，则称E为闭集~~ ② 设 F 是 E 的外点的全体，定义 $\bar{E} = X \setminus F$，叫做 E 的闭包。

③ 若 $E = \bar{E}$，则称 E 是闭集。

例：① $[a,b]$ ② $B_\delta(x_0)$ ③ $\mathbb{R}$. ④ ϕ.
⑤ $\{x_0\}$ 闭. ⑥ 有限点集是闭的.

作业：设 $E\subseteq X$. 求证： →

① $\mathring{E}$ 是开集 ② $\overline{E}$ 是闭集

③ $\mathring{E}$ 是所有包含于 E 的开集中最大的. 即若 $U\subseteq E$. U开. 则 $U\subseteq\mathring{E}$. 或 $\mathring{E}=\bigcup\{U\subseteq E\mid U开\}$

④ $\overline{E}$ 是所有包含 E 的闭集中最小的. 即若 $E\subseteq K$. K闭. 则 $\overline{E}\subseteq K$. 或 $\overline{E}=\bigcap\{K\supseteq E\mid K闭\}$

⑤ E' 一定闭. 且 $\mathring{E}\subseteq E'$.

推论：E闭 $\Leftrightarrow$ $E'\subseteq E$ →

引理：i) 若 $S=\{E_\alpha\mid\alpha\in A\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中闭集构成的集合, 则 $\bigcap S=\bigcap_{\alpha\in A}E_\alpha$ 是闭集.
ii) 若 $E_1\cdots E_n$ 是闭集. 则 $\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 是闭集.

证明：i) 记 $E_\alpha^c=\mathbb{R}^n\setminus E_\alpha$. 则 E_α^c 开. 于是 $\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha^c$ 开. 于是 $\bigcap S=\bigcap_{\alpha\in A}E_\alpha=\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha^c$ 闭. ii) 同理. □

“集合不是门”：对于任意的 $E\subseteq X$. E并非非开即闭 它完全可以不开不闭或既开又闭. 如 $(a,b]$, $\mathbb{R}$等. 对于一般的E. 由定义知 $\mathring{E}\subseteq E\subseteq\overline{E}$. 一个点集的内部并不是很重要的概念. 但一个点集的闭包特别重要. 我们还关心闭包比集合自身到底多了什么东西.

定义：(X,d) 同上 $E\subseteq X$. x_0 叫 E 的极限点. 若对 $\forall\delta>0$. $\mathring{B}_\delta(x_0)\cap E\neq\phi$. 极限点的全体叫 E 的导集. 记为 E'. 由定义知 $E'\subseteq\overline{E}$.

引理：$\overline{E}=E\cup E'$.

证明：由定义 $E\cup E'\subseteq\overline{E}$. 若 $x_0\in\overline{E}$, 即 x不是E的外点. 则或有 $x_0\in E$, 或有对 $\forall\delta>0$ $\mathring{B}_\delta(x_0)\cap E\neq\phi$. 即 $x\in E$ 或 $x\in E'$ □

若 $E'=\varphi$. 即E中的点全是孤立点. 则称E是 → 离散的. 如 $E=\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$.

定理：E闭 ⟺ E中收敛点列的极限在E中

证明：⟹ 设 $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$, 若 $\{x_i\}$ 是有限集 则当i充分大时有 $x_i=x_0$. 于是 $x_0\in E$. 若 x_i 是无穷集 则可知 $x_0\in E'\subseteq E$.

⟸ 取 $x\in E'$. 则可构造 $x_i\to x_0$. 于是 $x_0\in E$. 即 $E'\subseteq E$. □

例①: $X=[a,b]\subseteq\mathbb{R}^1$. 则对于 $c\in X$.
$[a,c)=(a-1,c)\cap[a,b]$. 所以 $[a,c)$ 是 $X=[a,b]$ 中的开集.

② $X=[0,1]\cup[2,3]$. ~~则~~ $E_1=[0,1]$. 则

$E_1 = X\cap(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. 所以 E_1 是X中的开集 尽管它也是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间. 同理 $E_2[2,3]$ 也是X中的开集. 于是 $E_1 = X\setminus E_2$ 是闭的. $E_2 = X\setminus E_1$ 也是闭的. 所以 E_1. E_2 既开又闭.

若 $x_0\in E\setminus E'$. 则称 x_0 为E的孤立点.

若 $x_0\in \bar{E}\setminus \mathring{E}$. 则称 x_0 为E的边界点.

~~§5.3 紧性与连通性~~ ~~下面考虑一种特殊的情况~~

~~定义：设 (X,d) 是度量空间 (如 设 $X\subseteq\mathbb{R}^n$ 不再是 $\mathbb{R}^n$ 全体. 此时 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 显然仍是X上的度量 于是 (X,d) 仍是度量空间. 所以 仍可讨论 X上的开集与闭集.~~

命题：$E\subseteq X$ 是X中的开集 ⟺ 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集U 使 $E=X\cap U$.

证明：若 $E=X\cap U$. 对 $\forall x_0\in E$ 有 $x_0\in U$ 于是 存在 $\delta>0$ 使 $B_\delta(x_0)\subseteq U$. 于是在X中,
$B^X_\delta(x_0)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<\delta\}=B_\delta(x_0)\cap X\subseteq X\cap U=E$.
所以E是X中的开集. 反之. 若E在X中开. 即对 $\forall x_0\in E$. 存在 $\delta_{x_0}>0$ 使 $B_{\delta_{x_0}}(x_0)\cap X\subseteq E$. 定义 $U=\bigcup_{x_0\in E} B_{\delta_{x_0}}(x_0)$ 那么显然有 $E=\bigcup_{x_0\in E}\{x_0\}\subseteq U\cap X$, $U\cap X=\bigcup_{x_0\in E} B_{\delta_{x_0}}(x_0)\cap X\subseteq E$.
所以 $E=U\cap X$. □

~~函数 $f: E\to\mathbb{R}^n$ 的定义域往往不是 $\mathbb{R}^n$ ($\subseteq\mathbb{R}^n$). 所以 相对开集的概念是有用的~~

§5.3 紧性与连通性

定义：$K \subseteq \mathbb{R}^n$ 叫做紧的，如果 K 的任意开覆盖 $S=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$（$U_\alpha$ 开，$\cup S=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha \supseteq K$）有有限子覆盖

例：设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,\cdots,b_n)$，$a_i\le b_i$，则 $[a,b]$ 是紧集。

证明：假设 $[a,b]$ 的某一开覆盖没有有限子覆盖，将 $[a_i,b_i]$ 二分，于是 $[a,b]$ 可分为 2^n 个小矩形，这 2^n 个小矩形中必有一个没有有限覆盖，记之 $[a^{(1)},b^{(1)}]$，其中 $a^{(1)}=(a_1^{(1)},\cdots,a_n^{(1)})$，$b^{(1)}=(b_1^{(1)},\cdots,b_n^{(1)})$，$a_i^{(1)}\le b_i^{(1)}$。将 $[a^{(1)},b^{(1)}]$ 再次 2^n 等分，则可找到 $[a^{(2)},b^{(2)}]\subseteq[a^{(1)},b^{(1)}]$ 没有有限子覆盖，如此继续，得闭区间套 $[a^{(1)},b^{(1)})\supseteq[a^{(2)},b^{(2)}]\supseteq\cdots$ 它们的各分量则给出通常的区间套 $[a_i^{(1)},b_i^{(1)}]\supseteq[a_i^{(2)},b_i^{(2)}]\supseteq\cdots$ 由 $\mathbb{R}$ 的闭区间套定理存在 $\xi_i\in[a_i^{(k)},b_i^{(k)}]$ $\forall k=1,2,\cdots$ 定义 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 则 $\xi\in[a^{(i)},b^{(i)}]$ 因为 $\xi\in[a,b]$，所以存在 $S=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 中的 U 使 $\xi\in U$，因为 U 开，所以存在 $\delta>0$ 使 $B_\delta(\xi)\subseteq U$。因为 $b_i^{(k)}-a_i^{(k)}\to 0$ $k\to\infty$，所以存在 $k_1,\cdots,k_n$ 使 $[a_i^{(k_i)},b_i^{(k_i)}]\subseteq B_\delta(\xi_i)$。取 $K=\max(k_1\cdots k_n)$ 则有 $[a^{(K)},b^{(K)}]\subseteq B_\delta(\xi)\subseteq U$，这与 $[a^{(K)},b^{(K)})$ 没有有限覆盖矛盾，所以 $[a,b]$ 紧 □.

定理：$K \subseteq \mathbb{R}^n$ 紧 ⟺ ① K中的任一点列有收敛到K中的子列

② ⟺ K的任何无穷子集E有K中的极限点

证明：① 紧 ⟺ 有界闭. 有界 ⟹ 有收敛子列. 闭 ⟹ 收敛子列的极限在K中.

② 假设K中任一点都不是E的极限点. 于是存在 $\delta_y>0$ 使 $B_{\delta_y}(y)\cap E$ 至多包含一点. 于是 $K\subseteq B_{\delta_1}(y_1)\cup\cdots\cup B_{\delta_l}(y_l)$ 至多包含E中l个点. 与E无穷矛盾.

⟸ ① 若K无界. 则可选 $\{x_i\}\subseteq K$. $d(x_i,x_{i+1})>1$. 任一子列不满足Cauchy准则. 所以无收敛子列.

若K不闭. 则存在 $x_0\in K'\setminus K$. 取 $x_i\to x_0$. $x_i\in K$. 则 $x_0\in K$ 矛盾. 所以K有界闭. 于是紧.

② 同理. □

≤2014012128 [redacted] 一组 (李问伊)(1号)

≥2014012130 [redacted] 一组 (王俊)(38号)

周一 五、六节 习题课.

定理：$K \subseteq \mathbb{R}^n$ 紧 ⟺ K有界且闭

证明. ⟹ $K\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k(0)$. 因为K紧. 所以存在 $k_1,\cdots,k_l$ 使 $K\subseteq B_{k_1}(0)\cup\cdots\cup B_{k_l}(0)$. 记 $M=\max(k_1,\cdots,k_l)$. 则 $K\subseteq B_M(0)$. 所以有界. 设 $E=K^c$. 对于 $x_0\in E$. 以及 $y\in K$. 则存在 $\delta_y>0$ 使 $B_{\delta_y}(x_0)\cap B_{\delta_y}(y)=\phi$. 令y跑遍K. 则 $\{B_{\delta_y}(y)\mid y\in K\}$ 构成K的开覆盖. 所以有有限子覆盖 $K\subseteq B_{\delta_1}(y_1)\cup\cdots\cup B_{\delta_l}(y_l)$. 取 $\delta=\min(\delta_1,\cdots,\delta_l)$. 则 $B_\delta(x_0)\cap B_{\delta_i}(y_i)=\phi$ $i=1\cdots l$. 于是 $B_\delta(x_0)\cap K=\phi$. 即 $B_\delta(x_0)\subseteq E$. 所以E是开集. 于是K是闭集.

⟸ 若K有界闭. 则存在闭区间[a.b] 使 $K\subseteq[a.b]$. 对于K的任意开覆盖 $S=\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$. 定义 $S'=S\cup\{K^c\}$. 则 S' 是[a.b]的开覆盖. 由[a.b]的紧性. 存在 S' 的有限子覆盖 $U_1\cdots U_n$ 它们覆盖[a.b]. 于是也覆盖K. 若 $U_1\cdots U_n$ 中有 K^c (不妨设 $K^c=U_n$) 可去掉它. 剩下的 $U_1\cdots U_{n-1}$ 仍是K的开覆盖. 且 $U_1\cdots U_{n-1}\in S$. 证完. 若 $U_1\cdots U_n$ 中无 K^c. 则 $U_1\cdots U_n\in S$. 也证完. □

例：$S_r^{n-1}(x_0)=\overline{B}_r(x_0)\setminus B_r(x_0)$ $(=\{x\in\mathbb{R}^n\mid d(x,x_0)=r\})$. $S_r^{n-1}(x_0)$ 显然有界. 因为 $\overline{B}_r(x_0)$ 闭. $B_r(x_0)$ 开. 所以 $S_r^{n-1}(x_0)$ 闭. 所以 $S_r^{n-1}(x_0)$ 有界闭. 于是紧.

因此，E 连通 $\Leftrightarrow$ E 的既开又闭子集仅有 $\Rightarrow$ E 和 ϕ.

（紧集套定理）

定理：设 $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集构成的套，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ 非空. 定义 $diam(K) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in K\}$. 若进一步地有 $\lim_{i\to\infty} diam(K_i) = 0$，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ 中仅有一点.

证明：因为 K_i 紧，所以有界闭. 定义 $U_i = K_i^c$，则 U_i 开. 假设 $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \phi$，于是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^c = \mathbb{R}$. 于是 $\{U_i \mid i \geq 1\}$ 构成 K_1 的开覆盖. 因为 K_1 紧，所以存在 $i_1 \cdots i_l$ 使 $K_1 \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_l}$. 记 $L = \max(i_1 \cdots i_l)$，于是 $K_1 \subseteq U_L = K_L^c$. 但 $K_L \subseteq K_1$，矛盾. 若有 $x \neq y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$，则 $diam(K_i) \geq \|x-y\| > 0$ 与[illegible]矛盾. □

定义：① 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$. 若存在 $\mathbb{R}^n$ 中开集 U, V，使得

i) $U, V \neq \phi$. $U \cap V = \phi$.

ii) $E = (E \cap U) \cup (E \cap V)$.

则称 E 不连通（等价说法：若 $E = E_1 \cup E_2$，其中 E_1, E_2 是 E 的开集且 $E_1, E_2 \neq \phi$，$E_1 \cap E_2 = \phi$）

② 若 E 不是不连通的，则称 E 连通.

（若 $E = E_1 \cup E_2$，E_1, E_2 在 E 中开，$E_1, E_2 \neq \phi$，$E_1 \cap E_2 = \phi$，则 $E_1 = E \setminus E_2$ 闭，$E_2 = E \setminus E_1$ 闭，所以 E_1, E_2 既开又闭.）

~~③ 若 $F \subseteq E$ 既开又闭且不连通，则称 F 为 E 的连通分支~~

另一种等价刻画：$E\subseteq\mathbb{R}^n$ 不连通 $\Longleftrightarrow$ $\exists A.B$ $E=A\cup B$ $(A\cap B=\phi,\ A.B\neq\phi)\Rightarrow A'\cap B=A\cap B'=\phi$

换言之：$E\subseteq\mathbb{R}^n$ 连通 $\Longleftrightarrow$ $\forall A.B$ $E=A\cup B\ (A\cap B=\phi.\ A.B=\phi)$

则 或有 $A'\cap B\neq\phi$. 或有 $A\cap B'\neq\phi$.

证明：$\Rightarrow$ 若E连通，则存在A.B使 $E=A\cup B\ (A\cap B=\phi.\ A.B\neq\phi)$ ~~且A在E中闭 于是 $A=E\cap C$ C是$\mathbb{R}^n$中的闭集~~ 且A.B在E中既开又闭. 设$\bar{A}$是A在$\mathbb{R}^n$中的闭包. 则$A\subseteq\bar{A}$. $A\subseteq E$ 于是 $A\subseteq E\cap\bar{A}$. 另一方面，而A在E中闭. 所以 $A=E\cap C$. 其中C闭. 因为$\bar{A}$是包含A的最小闭集. 所以 $\bar{A}\subseteq C$. 所以 $E\cap\bar{A}\subseteq E\cap C=A$. 所以有$A=E\cap\bar{A}$. 因为$A\cap B=\phi$. 所以$(E\cap\bar{A})\cap B=\phi\Rightarrow\bar{A}\cap B=\phi$ $\Rightarrow A'\cap B=\phi$. 同理可得 $A\cap B'=\phi$.

$\Leftarrow$ 若 有A.B满足 $E=A\cup B.\ (A\cap B=\phi.\ A.B\neq\phi)$ 且 $A'\cap B=\phi$, $A\cap B'=\phi$. 则 $\bar{A}\cap B=\phi$. 于是 ~~$\bar{A}\cap E=$~~ $\bar{A}\cap E=\bar{A}\cap(A\cup B)=A$. 所以A在E中闭. 同理 B在E中闭. 于是A.B也开. 所以E不连通 □

③ 连通开集叫做区域. 区域的闭包叫闭区域.

~~上述定义不太好用. 所以我们引入下面的定义~~
~~定义：设$E\subseteq\mathbb{R}^n$~~

例：$I=[a.b]$ 是连通的.

证明：设 $I=I_1\cup I_2$. $I_1.I_2$ 非空. 开. $I_1\cap I_2=\phi$.
取 $a_1\in I_1$. $b_1\in I_2$.（不妨设 $a_1<b_1$）将$[a_1,b_1]$二分. 考虑中点$c=\frac{a_1+b_1}{2}$. 若$c\in I_1$.
则取 $a_2=c$. $b_2=b_1$. 否则. 取 $a_2=a_1$. $b_2=c$. 如此继续得区间套$[a_k.b_k]$. 其中 $a_k\in I_1$. $b_k\in I_2$. 设 $\xi\in[a_k.b_k]$ $k=1.2.\cdots$
则有 $\xi=\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k$. 因为$I_1,I_2$开. 所以$I_2$也闭.
于是 $\xi\in I_1\cap I_2$ 这与 $I_1\cap I_2=\phi$矛盾. □

~~定义：设$X\subseteq\mathbb{R}^n$，$Y\subseteq\mathbb{R}^n$. (f…) $f:X\to Y$ 叫做连续的 若对Y的任一开集U. $f^{-1}(U)$是X中的开集~~

定义：E $(\subseteq\mathbb{R}^n)$ 称为道路连通的. 如果对$\forall x.y\in E$. 存在映射 $\varphi:[0.1]\to E$ $t\mapsto(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 满足
① $x=\varphi(0)$. $y=\varphi(1)$. ② $\varphi_i(t)$ 都是连续的.

基本性质：① 若 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ $\bar{E}_\alpha$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集. $\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\neq\emptyset$
则 $\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha$ 连通

证明：假设 $S=\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha=A\cup B$，A,B 非空不交. 且在 $S=\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha$ 中开.
设 $p\in\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha$，则 $p\in A$ 或 B. 不妨设 $p\in A$. 则对任意 α $p\in E_\alpha$
下证必有 $E_\alpha\subseteq A$. 若不然. 设 $E_\alpha=A_\alpha\cap B_\alpha$. 其中 $A_\alpha=E_\alpha\cap A$
$B_\alpha=E_\alpha\cap B$，且 A_α B_α 不空，A 在 S 中开 ⇒ ∃U 使
$A=S\cap U$，于是 $A_\alpha=E_\alpha\cap A=E_\alpha\cap(S\cap U)=E_\alpha\cap U$
所以 A_α 在 E_α 中开 同理 B_α 在 E_α 中开. 所以 E_α 不连通矛盾 □

⇒ X, Y 连通 ⇒ X×Y 连通.

② E 连通 $F\subseteq\bar{E}$. $E\subseteq F$. 则 F 连通.

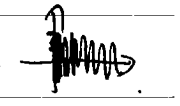
证明：设 $F=A\cup B$，A,B 非空不交 在F中开. 且 $\bar{A}\cap B=A\cap\bar{B}=\emptyset$.
则 $E=C\cup D$. $C=E\cap A$. $D=E\cap B$ ~~由①的证法可知 C,D 至少有一个空集. 设 D=∅. 即 $E\subseteq A$. 则 $\bar{E}\subseteq\bar{A}$ 于是 若 $C=D=\emptyset$ 则 $E=\emptyset$ $\bar{E}=\emptyset$. $F=\emptyset$ 无需证什么~~
若 $C\neq\emptyset$, $D\neq\emptyset$. 则 $C\cap D=E\cap(A\cap B)=\emptyset$. 由前一性质证明易知 C, D 在E中开. 所以 E不连通. 矛盾. 所以 C, D中一定有一个空集 不妨设 $D=\emptyset$. 于是 $E\subseteq A$. $\bar{E}\subseteq\bar{A}$.
因为 $\bar{A}\cap B=\emptyset$ 所以 $F\cap B=\emptyset$ 这与 $B\neq\emptyset$ 矛盾. □

⇒ 若 E 连通. 则 $\bar{E}$ 连通.

~~定义~~ 定理：若 E 道路连通. 则 E 连通.

证明：假设 E 不连通. 则 $E=E_1\cup E_2$. 其中 E_1. E_2 是非空开集. 且 $E_1\cap E_2=\emptyset$ 取 $x\in E_1$. $y\in E_2$ 于是有道路 $\varphi:[0,1]\to E$. 设 $A=\varphi^{-1}(E_1)$ $B=\varphi^{-1}(E_2)$. 则 A. B不空. $A\cap B=\emptyset$. 下证 A. B都是开的. 设 $t_0\in A$. $\varphi(t_0)=x_0\in E_1$.
(存在 δ>0 使 $B_\delta(x_0)\subseteq E_1$)
因为 $\varphi_i(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续 所以存在 δ_i 使得
当 $|t-t_0|<\delta_i$ 时，有 $|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_0)|<\frac{1}{\sqrt{n}}\delta$. 于是

$$d(\varphi(t),x_0)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_0)|^2}<\delta$$ ，所以 $\varphi(t)\subseteq E_1$. 于是
若取 $\delta_0=\min(\delta_1,\cdots,\delta_n)$. 则有 $B_{\delta_0}(t_0)\subseteq A$. 即A开. 同理B开.
注意 $A\cup B=[0,1]$. 这与 [0,1] 连通矛盾. 所以E连通. □

注：连通集未必道路连通 见拓扑学家的正弦曲线 .

推论：$[a,b]\subseteq\mathbb{R}^n$. $B_\delta(x_0)$ 等都是连通的. 因此是闭区域和区域.

§5.4 ~~函数极限~~ 连续函数.

定义：设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$. $f:D\to\mathbb{R}^m$. x_0 是D的一个极限点.
若有 $y_0\in\mathbb{R}^m$ 使得对 ∀ε>0. ∃δ>0. s.t. ∀ $x\in\mathring{B}_\delta(x_0)\cap D$

Date:
Place:

Reminders

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ s.t. $\rightarrow$

$f(\mathring{B}_\delta(x_0)\cap D) \subseteq B_\varepsilon(y_0)$.

$\Leftrightarrow \forall$ y_0的去心开邻域 U 存在 x_0的去心开邻域 V

使 $f(V\cap D)\subseteq U$.

Date:
Place:

Reminders

$f(x)\in B_\varepsilon(y_0)$, 则称 f 在 x_0 处有极限 y_0. 记

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

例: $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. $x_0=(0,0)$. $D=\mathbb{R}^2\backslash\{x$

因为 $0\le f(x,y)\le x^2+y^2$. 所以 对 $\varepsilon>0$. 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$

则有 当~~(x,y)~~当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时 $0\le f(x,y)<\varepsilon$, 所以

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. □

定理: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0 \Leftrightarrow$ 对于 $D\backslash\{x_0\}$中的任意点列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y_0$.

证明: $\Rightarrow$ 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$. 所以 对 $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.t. $x\in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in B_\varepsilon(y_0)$. 因为 $x_n\to x_0$, 所以存在 N s.t. $\forall n>N$ 有 $x_n\in B_\delta(x_0)$. 所以 $f(x_n)\in B_\varepsilon(y_0)$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y_0$.

$\Leftarrow$ 假设 $f(x)$当$x\to x_0$时不以y_0为极限. 即 ~~存在~~ $\exists\varepsilon_0>0$ s.t. $\forall\delta>0$. $\exists x\in B_\delta(x_0)$ s.t. $f(x)\notin B_{\varepsilon_0}(y_0)$.

~~现在取 $\delta=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$~~ ~~任意 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 于是~~

~~可取 $x_1, x_2, \dots \in B_\delta(x_0)$~~

取 $\delta_n = \frac{1}{n}$，则有 $x_n \in B_{\delta_n}(x_0)$. 显然 $\lim_{n\to\infty} x_n$

但 $\|f(x_n) - y_0\| \geq \varepsilon_0$. 所以不可能有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$ 矛

例：① $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

~~取 $P_n = \{\frac{1}{n}, 0\}$. 则 $f(P_n) = 0$. 所以 $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = 0$~~

~~取 $q_n = \{\frac{1}{n}$~~

取 $P_n = (\frac{a}{n}, \frac{b}{n})$. 则 $f(P_n) = \frac{ab}{a^2+b^2}$. $\lim_{n\to\infty} f(P_n) =$

当 a.b 变化时极限值也变化. 所以极限不存在.

② $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

取 $P_n = (\frac{a}{n}, \frac{b}{n^2}\}$. 则 $f(P_n) = \frac{\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n^2}}{\frac{a^4}{n^4}+\frac{b^2}{n^4}} = \frac{a^2 b}{a^4+b^2}$.

同理可知极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. 此例中取上例中的 P_n 是不行的，因为沿直线走极限都存在.

性质：+．−．×．÷．略.

定理(Cauchy 准则) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$

s.t. $\forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \cap D$ 有 $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$.

证明 留作作业

连续映射性质:

定理: 设 $f: D\to\mathbb{R}^m$ $x\mapsto (f_1(x),\cdots,f_m(x))$
则 f 连续 ⟺ 对每个 $i=1\cdots m$. f_i 连续.

证明: ⟹ 设 $P_k:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $(y_1\cdots y_m)\mapsto y_k$. 则显然 P_k 连续. 于是 $f_k: D\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m\xrightarrow{P_k}\mathbb{R}$ 可写为 $f_k=P_k\circ f$. 因为 f 连续. P_k 连续. 所以 f_k 连续.

⟸ ~~若 $f_1\cdots f_m$ 连续. 下证 f 连续~~ 任取 $x_0\in D$. 若 x_0 孤立 则 f 在 x_0 自动连续 若 x_0 是极限点. 只需证对任一以 x_0 为极限的点列 有 $\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(x_0)$ 根据点列极限的存在性判别准则. 只需证对每个 $i=1\cdots m$ 有 $\lim_{k\to\infty} f_i(x_k)=f_i(x_0)$. 因为 f_i 连续. 所以这些极限都成立. 于是 f 连续. □

引理: 若 $f: X\to Y$ 连续. $g: Y\to Z$ 连续 则 $g\circ f: X\to Z$ 连续

证明: 设 U 是 Z 中开集. 则 $(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$ g 连续 ⟹ $g^{-1}(U)$ 开. f 连续 ⟹ $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 开. 所以 $g\circ f$ 连续 □

定理: 设 $f: \overset{\subseteq\mathbb{R}^n}{D}\to\mathbb{R}^m$. x_0 是 D 的极限点. $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$. $g: \overset{\subseteq\mathbb{R}^k}{E}\to D$. t_0 是 ~~D~~ E 的极限点 且 $\lim_{t\to t_0} g(t)=x_0$. 且 t_0 的去心开邻域 T 使 $g(T\cap E)\subseteq D\setminus\{x_0\}$. 则 $\lim_{t\to t_0} f(g(t))=y_0$.

~~证明: 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. $f(B_\delta(x_0)\cap D)\subseteq B_\varepsilon(y_0)$.~~

证明: 任取 y_0 的去心开邻域 U. 则有 x_0 的去心开邻域 V 使 $f(V\cap D)\subseteq U$. 对于 V. 存在 t_0 的去心开邻域 W 使 $g(W\cap E)\subseteq (V\cup\{x_0\})\cap D$. 现在取 $S=T\cap W$. 则 S 是 t_0 的去心开邻域 且 $g(S\cap E)\subseteq V\cap D$. 于是 $f\circ g(S\cap E)\subseteq U$. 所以 $\lim_{t\to t_0} f(g(t))=y_0$. □

定义: $f: \overset{\subseteq\mathbb{R}^n}{D}\to\mathbb{R}^m$, $x_0\in D$. 若 x_0 是 D 的孤立点 或 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处连续. 若 f 在 D 的每一点处连续则称 f 在 D 上连续.

定义：设 $X\subseteq\mathbb{R}^n$. $Y\subseteq\mathbb{R}^m$. 设 $f: X\to Y$ 是双射 (既单又满) 于是有逆映射 $f^{-1}: Y\to X$. 若 f 和 f^{-1} 都是连续的, 则称 f 是 X 到 Y 的同胚.

命题：$f: X\to Y$ 是同胚 $\iff$ f 是连续双射, 且对 X 中的任意开集 U, $f(U)$ 是 Y 中的开集.

证明：只需证 $f^{-1}: Y\to X$ 连续 即对 X 中的任意开集 U. $(f^{-1})^{-1}(U)=\{y\in Y \mid f^{-1}(y)\in U\}$ 在 Y 中开. 而 $f^{-1}(y)\in U \iff y\in f(U)$. 所以 $(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$. 证毕 □

注：上述命题中的开集可改为闭集.

命题：若 X, Y 同胚, 则 X 紧 $\iff$ Y 紧. X 连通 $\iff$ Y 连通. X 道路连通 $\iff$ Y 道路连通.

例1：(f^{-1} 不连续的例) 设 $X=[0,2\pi)$. $Y=S^1$ $=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

定义 $f: X\to Y$, $t\mapsto(\cos t, \sin t)$ 则 f 连续且单满. 但 $f^{-1}: Y\to X$, $(x,y)\mapsto t$ 在 $(1,0)$ 处不连续 (X 不紧, Y 紧, 所以 f 一定不是同胚, 于是 f^{-1} 一定不连续).

例：① 若 D 是离散的, 则 D 上的任意函数都连续.

② 若 f 是常值函数, 则无论 D 是什么 f 都连续.

定理：$f: \overset{\subseteq\mathbb{R}^n}{D}\to\mathbb{R}^m$ 连续 $\iff$ 对任何 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 U, $f^{-1}(U)$ 是 D 中的开集.

证明：$\Rightarrow$ 若 $f^{-1}(U)=\emptyset$, 则显然开. 若 $x_0\in f^{-1}(U)$. 设 $y_0=f(x_0)\subseteq U$. 因 U 开. 所以存在 $\varepsilon>0$ 使 $B_\varepsilon(y_0)\subseteq U$. 于是存在 $\delta>0$ 使 $f(B_\delta(x_0)\cap D)\subseteq B_\varepsilon(y_0)$. 即 $B_\delta(x_0)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))\subseteq f^{-1}(U)$. 于是 $f^{-1}(U)$ 开.

$\Leftarrow$ 设 $x_0\in D$ $f(x_0)=y_0$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $U=B_\varepsilon(y_0)$ 则 $f^{-1}(U)$ 开. 因为 $x_0\in f^{-1}(U)$. 所以存在 $\delta>0$ 使 $B_\delta(x_0)\cap D\subseteq f^{-1}(U)$. 即 $f(B_\delta(x_0)\cap D)\subseteq B_\varepsilon(y_0)$. 所以 f 在 x_0 处连续 □.

定理：设 $f: D\to\mathbb{R}^m$.

(i) 若 D 紧, 则 $f(D)$ 紧

(ii) 若 D 连通, 则 $f(D)$ 连通.

证明：(i) 假如 $f(D)$ 不紧, 则存在开覆盖 $S=\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$ 使得其任意有限子集都不能覆盖 $f(D)$. 设 $V_\alpha=f^{-1}(U_\alpha)$. 因为 f 连续 所以 V_α 是 D 中开集. 因为 $\bigcup S\supseteq f(D)$. 所以 $D\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha$. 因为 D 紧. 所以存在 $V_1\cdots V_k$ 使 $D\subseteq V_1\cap\cdots\cap$

可视为紧集上连续映射的最后一个性质.

定理：若 X 紧，$f: X\to Y$ 为连续双射，则 f 是同胚

证明：只需证 f 将 X 中的任一闭集映为 Y 中闭集. 因为 X 紧，所以 X 中闭集 E 必为紧集 于是 $f(E)$ ~~[illegible]~~ 紧 ~~[illegible]~~ 于是 $f(E)$ 在 Y 中闭，所以 f^{-1} 连续. □

推论：X 紧，$f: X\to\mathbb{R}^m$ 连续单，则 X 与 $f(X)$ 同胚.

引理：设 K 紧，E 在 K 中闭，则 E 紧

证明：设 $S=\{U_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 E 的开覆盖. ~~则~~ E 在 K ~~$S'=S\cup U_E$~~ 中闭 于是 $E^c=K\setminus E$ 在 K 中开. 于是存在 $U\in\mathbb{R}^n$ 使 $E^c=U\cap K$. 于是 $S'=$ ~~[illegible]~~ $S\cup\{U\}$ 是 K 的开覆盖. K 紧 $\Rightarrow\exists U_1\cdots U_k\in S'$ 使 $K\subseteq U_1\cup\cdots\cup U_k$. 不妨设 $U_k=U$. 则 $E\subseteq U_1\cup\cdots\cup U_{k-1}$ 所以 E 紧 □

~~引理2：设~~ 推论：设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 紧，$f: D\to\mathbb{R}^m$ 连续. 定义 f 的图像为 $\Gamma(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \mid x\in D,\ y=f(x)\}$. 则 $\Gamma(f)$ 与 D 同胚

证明：构造映射 $F: D\to\Gamma(f)$, $x\mapsto(x,f(x))$ 则 F 是连续双射. 因为 D 紧，所以 F 是同胚.

例：紧的条件是必须的 例如 前一页的例子. D 不紧. f 连续双射. 但 f^{-1} 不连续

于是 $f(D)\subseteq U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_l}$. 这与最初的假设矛盾.

(ii) 设 $f(D)=A\cup B$, A, B 非空不交且在 $f(D)$ 中开. 于是 $A=f(D)\cap U$, $B=f(D)\cap V$. U, V 在 $\mathbb{R}^m$ 中开. $D=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$ $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ 非空. 不交. 且在 D 中开. 这与 D 连通矛盾. □

推论：设 $f: D\to\mathbb{R}$ 连续.

① 若 D 紧，则 f 在 D 上有可达到最大最小值.

② 若 D 连通 ~~且 f 在 D 上有最小值 m. 最大值 M. 则对任意 $\gamma\in[m,M]$. 存在 $x\in D$ 使 $f(x)=\gamma$~~ 对任意 $x_1, x_2\in D$ 满足 $f(x_1)<f(x_2)$ 以及 $y_0\in[f(x_1), f(x_2)]$. 存在 $x_0\in D$ 使 $f(x_0)=y_0$.

证明：① $f(D)$ 紧 于是有界闭 于是 $\sup(f(D))\in f(D)$. $\inf(f(D))\in f(D)$. ~~② $f(D)$ 连通. 于是是区间. 且 $[f(x_1), f(x_2)]$ $f(D)$ 知 $y_0\in f(D)$~~ □

② $f(D)$ 连通. $f(x_1), f(x_2)\in f(D)\Rightarrow[f(x_1), f(x_2)]\subseteq f(D)$

所以 $y_0\in f(D)$. □

定义：$f: D\to\mathbb{R}^m$ 叫做一致连续 如果对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 使得 $\forall x_1, x_2\in D$. $d(x_1, x_2)<\delta$ 有 $d(f(x_1), f(x_2))<\varepsilon$

其它例子：

① $\mathbb{R}^1$ 与 S^1 不同胚（非紧，紧）

③ S^1 与 S^2 不同胚

证明 假设 $f: S^1 \to S^2$ 是同胚，任取 S^1 中两不同点 x_1, x_2，则 $f: S^1\setminus\{x_1, x_2\} \to S^2\setminus\{f(x_1), f(x_2)\}$ 也是同胚，但前者不连通，后者连通，矛盾。 □

② $\mathbb{R}^1$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚。

证明：假设 $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ 是同胚，则 $f: \mathbb{R}^1\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2\setminus\{f(0)\}$ 也是同胚，但前者不连通，后者连通，矛盾。 □

思考：你能否证明 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 不同胚，S^n 与 S^m 不同胚 $(n\neq m)$?

定理：若 $f: D \to$ 连续，D 紧，则 f 一致连续。

证明：固定 $\varepsilon>0$，对 $\forall x \in D$ 存在 $\delta_x>0$ 使 $f(B_\delta(x)\cap D) \subseteq B_{\varepsilon/2}(f(x))$。

取 D 的开覆盖 $\{B_{\delta_x/2}(x) \mid x\in D\}$，则存在 $x_1 \cdots x_l$ 以及 $\delta_1 \cdots \delta_l$ $(\delta_i = \delta_{x_i})$ 使 $D \subseteq B_{\delta_1/2}(x_1)\cup\cdots\cup B_{\delta_l/2}(x_l)$

取 $\delta = \min \frac{\delta_i}{2}$ 对于任意的 $z_1, z_2 \in D$，$d(z_1,z_2)<\delta$ 设 $z_1 \in B_{\delta_i/2}(x_i)$，因为 $d(z_1, z_2)<\delta$，则 $d(z_2, x_i) < d(z_1, x_i) + d(z_1, z_2)$

所以 $z_2 \in B_{\delta_i}(x_i)$ $\qquad < \frac{\delta_i}{2} + \delta < \delta_i$.

于是 $d(f(z_1), f(z_2)) < d(f(z_1), f(x_i)) + d(f(x_i), f(z_2))$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D.

§5.5 其它问题

1. 范数问题.

回忆一下，一个函数 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 叫范数，如果它满足以下性质：① $\|x\|\geq 0$，"=" 成立 $\Leftrightarrow x=0$。② $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ ③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

定理：设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个范数，则存在 $A, B>0$ 使对 $\forall x\in\mathbb{R}^n$，

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1.$$

设 $\|\cdot\|_E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏范数. 我们只需证 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 的情况. 因为, 若对 $\|\ \|_1$ 和 $\|\ \|_2$ 有

$$A_1\|x\|_E \le \|x\|_1 \le B_1\|x\|_E$$

$$A_2\|x\|_E \le \|x\|_2 \le B_2\|x\|_E,$$ 则有

$$\frac{A_2}{B_1}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \frac{B_2}{A_1}\|x\|_1.$$

引理: 设 $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是一个范数, 则 $\|\cdot\|$ 关于 $\|\cdot\|_E$ 定义的拓扑是连续的.

证明: 即证明 $\lim\limits_{h\to0}\|x_0+h\|=\|x_0\|$. 由三角不等式及齐次性: $\|x_0\|-\|h\| \le \|x_0+h\| \le \|x_0\|+\|h\|$. 所以只需证 $\lim\limits_{h\to0}\|h\|=0$.

(注意这里的范数是不同的, 所以这并不是个平凡的事实) 具体写出来即: 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$, 使得对 $\forall h$ 满足 $\|h\|_E<\delta$, 有 $\|h\|<\varepsilon$.

设 $e_1\cdots e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基. $M=\sqrt{\|e_1\|^2+\cdots+\|e_n\|^2}$

对 $\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$. 则对任意 $h=h_1e_1+\cdots+h_ne_n$. $\|h\|_E=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}<\delta$, 有

$$\|h\| = \|h_1e_1+\cdots+h_ne_n\| \le |h_1|\cdot\|e_1\|+\cdots+|h_n|\|e_n\|$$

$$\le \sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}\cdot\sqrt{\|e_1\|^2+\cdots+\|e_n\|^2}<\varepsilon.$$

所以 $\|\cdot\|$ 是连续的. □

定理的证明：要证明对任意的范数 $\|\cdot\|$，存在 A, B 使 $A\|x\|_E \le \|x\| \le B\|x\|_E$。设 $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|_E = 1\}$ 则 S 是紧集（关于标准范数）。$\|\cdot\|$ 是连续函数。所以 $\|\cdot\|$ 在 S 上有最大、最小值，记之为 B, A。于是对任意 $v\in S$，有 $A\le\|v\|\le B$。对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，取 $v=\frac{x}{\|x\|_E}$，则 $v\in S$，于是 $A\le\|v\|\le B$，即

$A\|x\|_E\le\|x\|\le B\|x\|_E$. □.

此定理表明 $\mathbb{R}^n$ 上的任何两个范数都是等价的。即若用 $\|\ \|_1$ 和 $\|\ \|_2$ 分别定义开集、闭集等概念则得到的对象是一样的。

2、拓扑学家的正弦曲线。

设 $E=\{(x,y)\mid 0<x\le\frac{2}{\pi},\quad y=\sin\frac{1}{x}\}$.

E 实际上是如下映射 $F:(0,\frac{2}{\pi}]\to\mathbb{R}^2$

$x\longmapsto(x,\sin\frac{1}{x})$

的像。F 是连续的（因为两分量都连续），定义域 I 连通，所以 $F(I)=E$ 连通，于是 $\bar{E}$ 连通。不难看出

$\bar{E}=\{0\}\times[-1,1]\cup E$

下证 $\overline{E}$ 不是道路连通的.

定理: 不存在连续映射 $\varphi: [a,b] \to \overline{E}$, 使

$$\varphi(a) = \left(\frac{2}{\pi}, 1\right), \quad \varphi(b) = (0,0).$$

证明: 假设存在这样的 φ, 其坐标表示为 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

则当 $x(t) > 0$ 时, 总有 ~~$x(t)$ $y(t)$~~ ~~取 $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$, $n=1,2,\ldots$ 则 $x_n \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$, 由介值定理, 存在相应的 t_n, 使 $\varphi(t_n) = x_n$~~ $y(t) = \sin\frac{1}{x(t)}$.

不妨设当 $t < b$ 时 $x(t) > 0$. (否则可重取 b 为 $\sup\{s \in [a,b] \mid \forall t \in [a, s]\ x(t) > 0\}$) 由 y 在 b 处的连续性. 取 $\varepsilon = 1$. 则存在 $\delta > 0$ 使 $t \in (b-\delta, b)$ 时, 有 $|y(t)| < 1$. 取一个 $t_0 \in (b-\delta, b)$, 则 $x(t_0) > 0$. 总存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1} \in (0, x(t_0))$. 由 x 的介值性. 存在 t_1 使 且 $x(t_1) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$, 于是 $y(t_1) = \sin\frac{1}{x(t_1)} = 1$. 这 $t_1 \in (t_0, b)$ 与 $|y(t_1)| < 1$ 矛盾. □

3. 凸性.

集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 叫凸的, 如果对 $\forall x, y \in D$, $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in D$.

函数 $f: D\to\mathbb{R}$ 叫凸的，如果对 $\forall\ x, y\in D,\ \lambda\in(0,1)$,

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

定理：设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸区域，$f: D\to\mathbb{R}$ 是凸函数，则对 D 的任何紧子集 K，f 在 K 上 Lipschitz 连续，即存在常数 L，使得 $\forall x, y\in K$

$$|f(x)-f(y)| \le L\|x-y\|.$$

特别地，f 在 D 上连续。

引理：对任一 $x_0\in D$ 存在 $\delta>0$，使 $\overline{B_\delta}(x_0)\subseteq D$，且 f 在 $\overline{B_\delta}(x_0)$ 上有界

证明：先取一个区间 $[a,b]$ 使 $x_0\in[a,b]\subseteq D$. 设 $[a,b]$ 的端点为 $c_1, c_2, \dots, c_{2^n}$.

设 $\overset{\in(a,b)}{x_0}$ 为 $\lambda_1c_1+\cdots+\lambda_{2^n}c_{2^n}$. 其中 $\lambda_1,\dots\lambda_{2^n}\ge 0$. $\lambda_1+\cdots+\lambda_{2^n}=$

所以 $f(x_0)\le\sum_{i=1}^{2^n}\lambda_i c_i \le \max(c_1\cdots c_{2^n})$. 所以 f 在 $[a,b]$ 上有上界. 取 $\overline{B_\delta}(x_0)\subseteq[a,b)$. 则 f 在 $\overline{B_\delta}(x_0)$ 上也有上界.

对于任一 $x\in\overline{B_\delta}(x_0)$, 取 $x'=2x_0-x$. 则

$$f(x_0)=f(\tfrac12(x+x'))\le\tfrac12 f(x)+\tfrac12 f(x') \Rightarrow f(x)\ge 2f(x_0)-f(x').$$

因为 $f(x')$ 有上界 所以 $f(x)$ 有下界. 所以 f 在 $\overline{B_\delta}(x_0)$ 上有界 □

引理2已推出f在D的任一点处连续 →

引理2. 设f在$\overline{B_\delta(x_0)}$上有界 $|f|\le M$. 则f在 $\overline{B_{\delta/2}(x_0)}$上 Lipschitz连续.

证明: 对于 $x, x' \in B_{\delta/2}(x_0)$. 延长 $\overrightarrow{xx'}$ 到 $x''\in S_\delta(x_0)$, 于是 $x' = (1-\lambda)x+\lambda x''$, 其中 $\lambda = \frac{\|x'-x\|}{\|x''-x\|} \in (0,1)$.

所以 $f(x') \le (1-\lambda)f(x)+\lambda f(x'')$, 即

$$f(x')-f(x) \le \lambda(f(x'')-f(x)) \le \|x'-x\|\cdot\frac{|f(x'')-f(x)|}{\|x''-x\|}$$

$|f(x'')-f(x)|\le 2M$. $\|x''-x\|\ge\frac{\delta}{2}$. 于是 $f(x')-f(x)\le\frac{4M}{\delta}\|x'-x\|$

交换x'和x 得 $\|f(x')-f(x)\|\le\frac{4M}{\delta}\|x'-x\|$. □.

定理的证明: 假设f在K上不Lipschitz连续. 即对$\forall n\in\mathbb{N}$. 存在 $x_n, y_n\in K$, 使 $f(x_n)-f(y_n)\ge n\|x_n-y_n\|$.

因为K紧. 所以存在 $n_1, n_2, \cdots$, 使 $x_{n_k}\to x$ $k\to\infty$.

同理. 又存在 $k_1, k_2, \cdots$ 使 $y_{n_{k_l}}\to y$ $l\to\infty$.

重新记 $x_l := x_{n_{k_l}}$, $y_l := y_{n_{k_l}}$. 则 $x_l\to x$. $y_l\to y$. $(l\to\infty)$

且 $f(x_l)-f(y_l)\ge l\|x_l-y_l\|$.

① 若 $x=y$. 由引理2 f在$x=y$附近Lipschitz连续. 所以存在N, 使$l>N$时有 $\frac{|f(x_l)-f(y_l)|}{\|x_l-y_l\|}<L$. 这与 $f(x_l)-f(y_l)\ge l\|x_l-y_l\|$矛盾.

② 若 $x\ne y$. 由引理2. f在x. y处分别连续, 于是 $f(x_l)\to f(x)$. $f(y_l)\to f(y)$. $\|x_l-y_l\|\to\underbrace{\|x-y\|}_{>0}$. 仍矛盾. □.

§6. 微分学.

§6.1 函数的微分.

回忆一下. 设 $D \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区域(即开区间), $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. 称 f 在 x_0 处可微. 如果存在常数 A, 使得对任意充分小的 h, 有 $f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + o(h)$. 设 $x_0 + h = x$. 则又可写为 $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(h)$. 我们曾定义过一阶微分构成的空间 $\Omega_{x_0} = \{g \mid g(x_0) = 0\} / \{g \mid g(x_0) = g'(x_0) = 0\}$ 于是 $[f(x) - f(x_0)] \in \Omega_{x_0}$, $[x - x_0] \in \Omega_{x_0}$, 而 $\dim \Omega_{x_0} = 1$. A 就是 Ω_{x_0} 中两向量的"比值"

($D \subseteq \mathbb{R}$)

现在考虑 $f: D \to \mathbb{R}^m$, 它无非是 m 个上面的例子. $f = (f_1, \cdots, f_m)$. 所以可定义 f 可微当且仅当对充分小的 h $f(x_0+h) = f(x_0) + (A_1, \cdots, A_m)h + r_{x_0}(h)$. 其中 $r_{x_0}(h)$ 满足 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\|r_{x_0}(h)\|}{h} = 0$. $A_1 \cdots A_m$ 为常数. 若记 $A = (A_1, \cdots, A_m) \in$ 则仍有 $f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(h)$. 此时. A 宜看做 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射 $h \mapsto Ah$.

更一般地. 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个区域. $x_0 \in D$. 于是存在 $\delta > 0$ 使 $B_\delta(x_0) \subseteq D$. $f: D \to \mathbb{R}^m$. 则对 $\|h\| < \delta$ $x_0 + h \in D$, 所以可谈论 $f(x_0+h)$. 若存在 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

~~若定义 $M_{x_0}^{\mathbb{R}}=\{f:D\to\mathbb{R}\mid f(x_0)=0\}$ $N_{x_0}(D)=\{r:D\to\mathbb{R}\mid \lim_{h\to0}\frac{\|r(x_0+h)\|}{\|h\|}=0\}$~~

更一般的线性代数观点：得在后面微分形式的部分给出.

②：若f在x_0处可微，则 f在x_0处连续.

证明：$\lim_{h\to0} f(x_0+h)=\lim_{h\to0}(f(x_0)+Ah+r(h))=f(x_0)$.

此处用到下一页的引理 $\|Ah\|\le\|A\|\cdot\|h\|$. 所以当$h\to0$时有$\|Ah\|\to0$. □

线性映射的范数：由下页引理知线性映射 $h\mapsto Ah$ 总满足 $\|Ah\|\le M\|h\|$. 于是一致连续. 特别地. 函数 $f:S^{n-1}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\|Ax\|$ 连续. 其中 $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x\|=1\}$ 所以f有最大最小值. 其最大值定义为 A 的范数

$$\|A\|:=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

当$\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^m$中用欧氏范数时. $\|A\|$ 不是 $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cong\mathbb{R}^{n\cdot m}$ 上的欧氏范数. 而是矩阵的谱范数. $\|A\|=\sqrt{\lambda_{\max}}$, $\lambda_{\max}$是A^TA的最大特征值.

的线性映射A 使得 $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+r_{x_0}(h)$. 其中 $r_{x_0}(h)$ 满足 $\lim_{h\to0}\frac{\|r_{x_0}(h)\|}{\|h\|}=0$, 则称 f 在 x_0 处可微. 并记 $f'(x_0)=A$. 若f在D的每一点处可微则称f在D上可微.

例：设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $x\mapsto y_0+Ax$, 其中A是$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$的线性变换. 则对 $\forall x_0\in\mathbb{R}^n$. $f(x_0)=y_0+Ax_0$. 于是有 $f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)$. 于是 $r_{x_0}(h)=0$. 所以 $f'(x_0)=A$.

性质 ① ~~定理~~：若 f 在 x_0 处可微. 则 $f'(x_0)$ 是唯一的.

证明：假设存在 $A_1, A_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 使

$$\lim_{h\to0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-A_1h\|}{\|h\|}=\lim_{h\to0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-A_2h\|}{\|h\|}=0.$$

设 $B=A_1-A_2$. 于是有 $\|Bh\|\le\|f(x_0+h)-f(x_0)-A_1h\|+\|f(x_0+h)-f x_0-A_2h\|$

所以 $\lim_{h\to0}\frac{\|Bh\|}{\|h\|}=0$. 固定一个 h_0. 取 $h=th_0$. 于是有

$$\lim_{t\to0}\frac{\|B(th_0)\|}{\|th_0\|}=\lim_{t\to0}\frac{\|Bh_0\|\cdot|t|}{\|h_0\||t|}=\frac{\|Bh_0\|}{\|h_0\|}.$$

因为 h_0 任意 所以 $B=0$. □

注：若f在D上可微. 则 f'是D到 $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 的映射. 这里 $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的全体构成的线性空间. 易知 $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cong\mathbb{R}^{n\cdot m}$.

α 的矩阵表示为

引理的证明: 设 $\overset{\alpha}{A}(x) = (y_1 \cdots y_m)$. ~~A的~~ (a_{ij}). 则

$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. 于是 $y_i^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \|x\|^2$

$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot \|x\|$. □

~~$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} =: \|A\|$.~~ 此数称为矩阵的Frobenius范数

~~常数M叫α的范数. 记为‖α‖.~~

~~不显然. 连续与有界是等价的.~~

② i) 若 $f = f_1 + f_2$. 则 $f' = f_1' + f_2'$

ii) 若 $f = \lambda f_0$ 则 $f' = \lambda f_0'$

证明: i) $f(x_0+h) = f_1(x_0+h) + f_2(x_0+h)$

$= f_1(x_0) + f_1'(x_0)h + f_2(x_0) + f_2'(x_0)h + r(h)$

ii) 同理. $= \underline{f(x_0) + (f_1'(x_0) + f_2'(x_0))h + r(h)}$. □

(需要唯一性).

③ 设 $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}^p$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 开, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ 开. $x_0 \in D$, f 在 x_0 处可微. g 在 $f(x_0)$ 处可微. 则 $h = g \circ f: D \to \mathbb{R}^p$ 在 x_0 处亦可微.

且有 $h'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

证明: 设 $y_0 = f(x_0)$. $A = f'(x_0)$, $B = g'(y_0)$. 则有

$f(x_0+u) = f(x_0) + Au + r(u)$. $u \in \mathbb{R}^n$. 充分小

$g(y_0+v) = g(y_0) + Bv + s(v)$ $v \in \mathbb{R}^m$ 充分小.

且余项 $r(u)$, $s(v)$ 满足 $\lim_{u\to 0} \frac{\|r(u)\|}{\|u\|} = 0$. $\lim_{v\to 0} \frac{\|s(v)\|}{\|v\|} = 0$.

对于给定的充分小的 u, 取 $v = f(x_0+u) - f(x_0)$.

引理: 设 $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是线性变换. 则存在常数 $M > 0$ 使得 $\|\alpha(x)\| \le M\|x\|$. 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 成立.

~~证明: α是连续值. 于是 在 S={x | ‖x‖=1} 上有最大值M. 所以 $\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \le M$ 对∀ $f(x) = \|\alpha(x)\|$ 在 $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ 上有最大值M. 所以 $\left\|\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le M$, 由线性性知 $\|\alpha(x)\| \le M \cdot \|x\|$. □~~

因为 $v = Au + r(u)$. 所以 $\|v\| \le \|Au\| + \|r(u)\|$ $\le \left(\|A\| + \frac{\|r(u)\|}{\|u\|}\right)\|u\|$. 于是当 $u \to 0$ 时必有 $v \to 0$.

下面考虑 h.

$$h(x_0+u) - h(x_0) - BAu = g(f(x_0+u)) - g(f(x_0)) - BAu$$

$$= g(y_0+v) - g(y_0) - BAu = Bv + s(v) - BAu$$

$$= B(v - Au) + s(v) = B\,r(u) + s(v).$$ 于是

$$\frac{\|h(x_0+u) - h(x_0) - BAu\|}{\|u\|} = \frac{\|B\,r(u) + s(v)\|}{\|u\|}$$

$$\le \frac{\|B\|\,\|r(u)\|}{\|u\|} + \frac{\|s(v)\|}{\|v\|}\cdot\left(\|A\| + \frac{r(u)}{\|u\|}\right).$$

当 $\|u\| \to 0$ 时, $\frac{\|r(u)\|}{\|u\|} \to 0$, $\frac{\|s(v)\|}{\|v\|} \to 0$.

所以有 $\lim\limits_{u\to0} \frac{\|h(x_0+u) - h(x_0) - BAu\|}{\|u\|} = 0$. 所以 $h'(x_0) = BA$. □

④

设 $f: D \to \mathbb{R}^m$ ($\subset\mathbb{R}^n$ 开), 记 $f = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ 其中 $f_i: D \to \mathbb{R}$ 为 f 的在 $\mathbb{R}^m$ 的基 $u_1, \cdots, u_m$ 上的分量, 则 f 在 $x_0 \in D$ 可微 $\Leftrightarrow$ f_i 在 x_0 可微 对 $\forall i = 1, \cdots, n$

证明: 记 $P_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(y_1, \cdots, y_m) \mapsto y_i$.

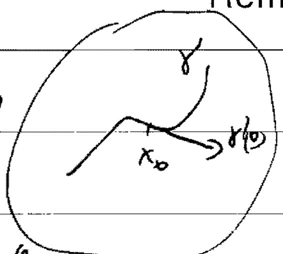
$j_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $y \mapsto y \cdot u_i$

则 $f_i = P_i \circ f$. $f = j_1 \circ f_1 + \cdots + j_m \circ f_m$.

P_i, j_i 都是线性映射, 所以可微. 于是 f 可微 $\Leftrightarrow$ f_i 可微. □

所以映射 $f: D \to \mathbb{R}^m$ 的可微性可归结为其分量的可微性.

另一种动机：设 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to D$. 是D中一条曲线, $\gamma(0)=x_0$. ~~于是~~ f 可限制在 γ上, 于是得 $(-\varepsilon,\varepsilon)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 的映射 $g(t)=f(\gamma(t))$. 若 γ 可微. f 可微. 则 $g'(0)=f'(x_0)\gamma'(0)$. 所以限制后的函数沿曲线的导数就是 $f'(x_0)$ 作用在曲线的切向量上. 这就是所谓的方向导数.



上 $\to\mathbb{R}^m$

上面的事实也说明 $g'(t)$ 仅与切向量有关而与 t 变大时 γ 的变化无关. 所以定义方向导数时仅保留方向信息即可.

$D_{X_1+X_2}f=D_{X_1}f+D_{X_2}f$. $D_{\lambda X}f=\lambda D_X f$. →

§6.2 方向导数与偏导数.

~~为了计算 $f'(x_0)$. 我们可以取它们的基 然后~~

本节关心如何计算 $f'(x_0)$ 的问题. 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$. $f:D\to\mathbb{R}^m$. $x_0\in D$. $f'(x_0)$ 存在. ~~[illegible] $f'(x_0)$~~ 于是对于充分小的 h

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\|}{\|h\|}=0.$$

现在任取一个 $X\in\mathbb{R}^n$. $h=tX$. t 充分小.

则有 $\|h\|=|t|\,\|X\|$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|f(x_0+\overset{tX}{\cancel{h}})-f(x_0)-f'(x_0)tX\|}{|t|\,\|X\|}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x_0+tX)-f(x_0)}{t}-f'(x_0)X\right\|=0.$$

$$\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tX)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)X.$$

这个极限称为 f 沿 X 方向的方向导数. 记为 $D_X f(x_0)$. 或 $D_X f(x_0)$.

~~设 $e_1\cdots e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的基, $u_1\cdots u_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的基, 则有 $D_{e_i}f(x_0)=f'(x_0)e_i$, 设这个 $\mathbb{R}^m$ 中的向量用 $u_1\cdots u_m$ 展开 $=\sum_{j=1}^m a_{ij}u_j$. 其展开系数~~

当 $m=1$ 时. $D_X f(x_0)$ 真的是一个数. 设 $e_1\cdots e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$

也记为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ · 或 $\partial_{x_i} f$ 或 f_{x_i} →

若不加 x. Df 表示 $(D_1 f, \cdots, D_n f)$ 称为 f 的梯度. →

中的基. 则 $D_{e_i} f$ 称为 f 关于 x_i 的偏导数. 这是因为. 根据定义 (以下简记 D_{e_i} 为 D_i)

$$D_i f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0^1, \cdots, x_0^i + t, \cdots, x_0^n) - f(x_0^1, \cdots x_0^n)}{t}$$

就好像视 $x_1 \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ 为参数. 只对 x_i 求导一样.

当 $m>1$ 时. 设 $u_1, \cdots u_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基.

$f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) u_j$. 则 $f'(x_0)(e_i) = \sum_{j=1}^{m} D_i f_j(x_0) u_j$

即 $f'(x_0)$ 在基 $e_1 \cdots e_n \in \mathbb{R}^n$. $u_1 \cdots u_m \in \mathbb{R}^m$ 下的矩阵为 $D_i f_j(x_0)$,

有了偏导数之后. 方向导数 $D_x f(x_0)$ 可写为 $\sum_{i=1}^{n} X^i D_i f(x_0)$. 其中 $(X^1 \cdots X^n)$ 为 X 在基 $e_1 \cdots e_n$ 下的分量. 若再按 $u_1 \cdots u_m$ 展开. 则有

$$\begin{pmatrix} D_x f_1 \\ \vdots \\ D_x f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & \cdots & D_n f_2 \\ \vdots & & & \\ D_1 f_m & D_2 f_m & \cdots & D_n f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

矩阵 $J = (D_i f_j(x_0))$ 叫做 f 在 x_0 处的 Jacobi 矩阵. 当 $n=m$ 时 J 是方阵. $\det J$ 叫 f 在 x_0 处的 Jacobi 行列式. 它在后面各节中有重要的作用.

Date:

Place:

Reminders

$\subseteq\mathbb{R}^n$ $\subseteq\mathbb{R}^m$

Chain Rule：设 $f: D\to E$，$g: E\to\mathbb{R}^p$ 可微。$x_0\in D$，$y_0=f(x_0)\in E$，$h=g\circ f: D\to\mathbb{R}^p$，则有 $h'(x_0)=g'(y_0)\circ f'(x_0)$。设 $e_1\cdots e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基，$u_1\cdots u_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的基，$\alpha_1\cdots\alpha_p$ 是 $\mathbb{R}^p$ 的基，$\mathbb{R}^n$ 的坐标为 x，$\mathbb{R}^m$ 的为 y，$\mathbb{R}^p$ 的为 z

$$f'(x_0)(e_i)=\sum_j\frac{\partial y_j}{\partial x_i}u_j.\quad g'(y_0)(u_j)=\sum_k\frac{\partial z_k}{\partial y_j}\alpha_k.$$ 于是

$$h'(x_0)(e_i)=g'(y_0)\big(f'(x_0)(e_i)\big)=g'(y_0)\Big(\sum_j\frac{\partial y_j}{\partial x_i}u_j\Big)$$

$$=\sum_j\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big(\sum_k\frac{\partial z_k}{\partial y_j}\alpha_k\Big)=\sum_k\Big(\sum_j\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial z_k}{\partial y_j}\Big)\alpha_k.$$

另一方面，$h'(x_0)(e_i)=\sum_k\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\alpha_k$，所以有

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_i}=\sum_j\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial z_k}{\partial y_j}.$$

若有更多层的复合，如 $x\mapsto y\mapsto z\mapsto u\mapsto v$，则有 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}$（指标省略）像一个链子一样，所以叫链式法则

矩阵形式

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial z_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_p}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial z_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_p}{\partial y_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1}\end{pmatrix}$$

Date:

Place:

Reminders

要注意，偏导数虽然便于计算，但它不足以刻画函数的可微性。

例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

按定义求 f 在 $(0,0)$ 处的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x\cdot0}{x^2+0^2}-0}{x}=0.$$

同理有 $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$，所以偏导数都存在。但 f 在 $(0,0)$ 处是不连续的，所以显然不可微。

$\subseteq\mathbb{R}^n$

定理：设 D 是开集，$x_0\in D$，若 $f: D\to\mathbb{R}^m$ 的所有偏导数 D_if_j 在 x_0 的一个开邻域内存在且在 x_0 处连续，则 f 在 x_0 处可微。

证明：我们只需考虑 $m=1$ 的情况（因为 f 可微 $\Leftrightarrow$ 分量都可微）

要证明：对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 使得对 $\forall$ $h\in\mathbb{R}^n$ $\|h\|<\delta$，有 $\left|f(x_0+h)-f(x_0)-\sum_{i=1}^n D_if(x_0)h_i\right|<\varepsilon\|h\|$.

因为 D_if $(i=1\cdots n)$ 在 x_0 处连续，所以 $\exists\delta_i>0$ 使得对 $\forall x\in B_{\delta_i}(x_0)$，$|D_if(x)-D_if(x_0)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$。取 $\delta=\min(\delta_i)$

对于 $h\in\mathbb{R}^n$，记 $h=h_1e_1+\cdots+h_ne_n$，$e_1\cdots e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标

$\|h\|<\delta$

（接上面）

例① $f(x)=x^x$. 它可视为复合函数 $f(u,v)=u^v$. $u(x)=x$, $v(x)=x$

于是 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}=v(x)\,u^{v(x)-1}+\log u(x)\cdot u^{v(x)}$

$$=x\cdot x^{x-1}+\log x\cdot x^x=x^x(\log x+1).$$

② $u=f(x^2+y^2+z^2)$. 则 (记 $r^2=x^2+y^2+z^2$)

$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r^2)\cdot 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=f'(r^2)(2y)$. $\frac{\partial u}{\partial z}=f'(r^2)\cdot 2z$.

所以 $\frac{u_x}{x}=\frac{u_y}{y}=\frac{u_z}{z}$. 或写为 ~~$(y\partial_x-x\partial_y)u=0$~~.

~~$(z\partial_x-x\partial_z)u=0$ $y\partial$~~ $L_x=(y\partial_z-z\partial_y)u=0$

$L_y=(z\partial_x-x\partial_z)u=0$, $L_z=(x\partial_y-y\partial_x)u=0$.

L_x. L_y. L_z 称为角动量算子. 这样的 u 叫旋转不变的.

维基. 记 $v_k=h_1e_1+\cdots+h_ke_k$. 特别地 $v_0=0$.

则有

$f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+v_n)-f(x_0+v_0)$

$=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_0+v_i)-f(x_0+v_{i-1})\right)$

注意 $v_i-v_{i-1}=h_ie_i$. 由关于变量 x_i 的 Lagrange 中值定理知, 存在 $0<\theta_i<1$ 使得

$$f(x_0+v_i)-f(x_0+v_{i-1})=h_i\cdot D_if(x_0+v_{i-1}+\theta_ih_ie_i).$$

于是有

$\left|f(x_0+h)-f(x_0)-\sum_{i=1}^{n}D_if(x_0)\cdot h_i\right|$

$=\left|\sum_{i=1}^{n}h_i\cdot\left(D_if(x_0+v_{i-1}+\theta_ih_ie_i)-D_if(x_0)\right)\right|$

$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}h_i}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(D_if(x_0+v_{i-1}+\theta_ih_ie_i)-D_if(x_0)\right)^2}$

注意 $\|v_{i-1}+\theta_ih_ie_i\|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_{i-1}^2+\theta_i^2h_i^2}<\|h\|<\delta$.

所以 $\left|D_if(x_0+v_{i-1}+\theta_ih_ie_i)-D_if(x_0)\right|<\varepsilon/\sqrt{n}$. 于是

$\le\|h\|\cdot\varepsilon$ 所以 f 在 x_0 处可微. □

此定理给出了可微的一个充分条件. 但它并不是必要的.

这里我们用$L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$上的算子范数. →

$L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$上可以赋予内积成为欧氏空间. 但相应的范数为Frobenius范数, 不是对我们更有用的算子范数. 因此不考虑这个内积.

常记为 $\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_p}(f)$. →

例 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

f在(0,0)可微但偏导数不连续.

定义: $D\subseteq\mathbb{R}^n$是开集. $f:D\to\mathbb{R}^m$, 若 ~~f~~ $D_if_j\ (i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m)$ 在D的每一点处存在且连续. 则称f在D上连续可微. D到$\mathbb{R}^m$的连续可微函数全体记为$C^1(D,\mathbb{R}^m)$. 当$m=1$时, 简记其为$C^1(D)$.

由前面的定理, 当$f\in C^1(D,\mathbb{R}^m)$时, $f'(x)$ 对每个$x\in D$存在, 且其矩阵分量就是$D_if_j(x)$. 于是f'是D到$L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$的连续映射. 或者说 $(\ )':C^1(D,\mathbb{R}^m)\to C(D,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$.

现在设$f\in C^1(D,\mathbb{R}^m)$. 于是$f'\in C(D,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$. 我们可以继续问$f'$是否属于$C^1(D,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$. 即对于任意$i_1,i_2\in\{1,\dots,n\}$, $j=1,\dots,m$, $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_2}}\right)$是否存在且连续.

一般地, 对$i_1,i_2,\dots,i_p\in\{1,\dots,n\}$, $j=1,\dots,m$, 我们可以定义

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_p}}:=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{p-1}f}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_p}}\right),$$

称为f的高阶(混合)偏导数.

高阶导数其它例子.

① $y_i^q = y_i^q(x)$. $z_j^p = z_j^q(y)$.

$$\frac{\partial z_j^q}{\partial x} = \frac{\partial z_j^q}{\partial y_i^q}\frac{\partial y_i^q}{\partial x}.$$

~~$\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z^j}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x}\right) = \frac{\partial z^j}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_j^q}{\partial y_i^2}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x}\right)$~~

$$\frac{\partial^2 z_j}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z_j}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x}\right) = \frac{\partial z_j}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_j}{\partial y_k\partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x}\frac{\partial y_l}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial^3 z_j}{\partial x^3} = \frac{\partial z_j}{\partial y_k}\frac{\partial^3 y_k}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^2 z_j}{\partial y_k\partial y_l}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x^2}\frac{\partial y_l}{\partial x} + \frac{\partial^3 z_j}{\partial y_k\partial y_l\partial y_m}\frac{\partial y_k}{\partial x}\frac{\partial y_l}{\partial x}\frac{\partial y_m}{\partial x}.$$

② $u = f(x,y,z)$. $x = r\cos\theta\sin\varphi$. $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\phi$

$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$. $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $\varphi = \arccos\frac{z}{r}$. 则

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right).$$

例 ① $f(x,y) = g(x) + h(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x),\quad \frac{\partial f}{\partial y} = h'(y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0.$$

② $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x)h(y),\quad \frac{\partial f}{\partial y} = g(x)h'(y).\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = g'(x)h'(y),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = g'(x)h'(y).$$

③
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -1.\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 1.$$

问题：何时有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$.

定理：设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 开. $f: D\to\mathbb{R}$, 若 $\partial_x f$, $\partial_y f$ $\partial_y\partial_x f$ 在 $p=(x_0,y_0)\in D$ 附近存在. 且 $\partial_y\partial_x f$ 在 p 处连续 则 $\partial_x\partial_y f$ 在 p 处也存在. 且 $\partial_x\partial_y f(p) = \partial_y\partial_x f(p)$.

由定义可得

$$\partial_y\partial_x f(x_0,y_0)=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\left(\partial_x f(x_0,y_0+k)-\partial_x f(x_0,y_0)\right)$$

$$=\lim_{k\to0}\frac{1}{k}\left(\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right)$$

$$=\lim_{k\to0}\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{kh}$$，同理

$$\partial_x\partial_y f(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\lim_{k\to0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{kh}.$$

所以这实际上是在问~~两个二重~~极限是否交换的问题.

一个累次

证明：设 $g(x)=f(x,y_0+k)-f(x,y_0)$.

$\varphi(h,k)=g(x_0+h)-g(x_0)$. 由微分中值定理

~~$\varphi(h,k)=g'(x_0+\theta h)k=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h,y_0)\right)k$~~

~~$=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$~~

$\partial_x f_0$ 存在

$$\varphi(h,k)=g'(x_0+\theta_1 h)h=\left(\partial_x f(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-\partial_x f(x_0+\theta_1 h,y_0)\right)h$$

$$=\partial_y\partial_x f(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)hk.$$ ← $\partial_y\partial_x f$ 存在.

因为 $\partial_y\partial_x f$ 在 x_0, y_0 处连续 所以

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\varphi(h,k)}{hk}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\partial_y\partial_x f(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)=\partial_y\partial_x f(x_0,y_0).$$

$\partial_y f$ 存在

~~注意 $\lim\limits_{k\to 0}\frac{\varphi(h,k)}{hk}$~~ 注意 $\lim\limits_{k\to 0}\frac{\varphi(h,k)}{hk}=\frac{\partial_y f(x_0+h,y_0)-\partial_y f(x_0,y_0)}{h}$

所以只要证明下面的引理即可.

引理：设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$ 存在，且~~在~~对 y_0 的某一邻域内的每个 y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=g(y)$ 存在，则 $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$ 也存在且等于 a.

证明：对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. 对 $\forall h,k\in\mathbb{R}$ $\sqrt{h^2+k^2}<\delta$ 有
$$|f(x_0+h,y_0+k)-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
不妨设 δ 已取得充分小，使得对 $\forall|k|<\delta$. ~~有~~ 根据 $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h,y_0+k)=g(y_0+k)$ 存在 $\hat{\delta}>0$ 使得对 $\forall|h|<\hat{\delta}$. 有
$$|f(x_0+h,y_0+k)-g(x_0+k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
现在对 $\forall|k|<\delta$. 取 h 使 $|h|<\min(\hat{\delta},\sqrt{\delta^2-k^2})$, 则
$$|g(y_0+k)-a|\le|g(y_0+k)-f(x_0+h,y_0+k)|+|f(x_0+h,y_0+k)-a|$$
$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$ 存在且等于 a. □

于是前面的定理也证完了 □.

由上述定理可知. 对于 ~~若~~ $f: D\to\mathbb{R}^m$. ~~则~~ 若 D_if_k, D_jf_k 和 $D_jD_if_k$ 在P的都存在，且 $D_jD_if_k$ 在 p ~~的~~处连续 则 $D_iD_jf_k$ 在

因为 $\varphi^j_{i_1\cdots i_p}$ 关于下标对称，所以一般来说有很多重复的。为了区分不同的偏导数，我们可以将 $i_1\cdots i_p$ 从小到大重排为 $\underbrace{1,1,\cdots,1}_{m_1个},\underbrace{2,2,\cdots,2}_{m_2个},\cdots,\underbrace{n,n,\cdots n}_{m_n个}$.

其中每个 $m_i\geq 0$，且 $m_1+m_2+\cdots+m_n=p$. 于是 $\partial_{x_{i_1}}\cdots\partial_{x_{i_p}}f$ 又可写为 $(\partial_{x_1})^{m_1}\cdots(\partial_{x_n})^{m_n}$. 记 $(m_1,\cdots,m_n)=m$

$\partial_{x_1}^{m_1}\cdots\partial_{x_n}^{m_n}f$ 记为 $\partial^m f$ 或 $f^{(m)}$. 这称为多重指标记号.

可简记为 $\varphi(h^{\otimes p})$

若 $h=\sum_{i=1}^n h_ie_i$，则

$$\varphi(\underbrace{h,\cdots,h}_{p个})=\sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_p=1}^n\varphi(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})h_{i_1}\cdots h_{i_p}$$
$$=\sum_{i_1\cdots i_p=1}^n\varphi^j_{i_1\cdots i_p}h_{i_1}\cdots h_{i_p}u_j.$$

注意 同样的 $\varphi^j_{i_1\cdots i_p}$ 出现了 $\frac{p!}{m_1!\cdots m_n!}$ 次. 所以上式又可写为

$$=\frac{p!}{m!}f^{(m)}(x_0)h^m$$ 其中 $m!=m_1!\cdots m_n!$
$h^m=h_1^{m_1}\cdots h_n^{m_n}$

若用基表示，一个 $\varphi\in S^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 对应一组实数 $\varphi^j_{i_1\cdots i_p}$

$\varphi(e_{i_1},\cdots,e_{i_p})=\sum_{j=1}^m\varphi^j_{i_1\cdots i_p}u_j$，它关于所有下标对称.

当 $\varphi=f^{(p)}(x_0)$ 时，$\varphi^j_{i_1\cdots i_p}=\partial_{x_{i_1}}\cdots\partial_{x_{i_p}}f_j$

P处也存在，且有 $D_iD_jf(P)=D_jD_if(P)$.

定义：设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开集，$f:D\to\mathbb{R}^n$. 若对 $\forall j=1\cdots m$，$i_1\cdots i_q\in\{1,\cdots,n\}$ 以及 $q=1,2,\cdots,p$（p是某固定的正整数）$\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_q}f_j$ 都存在且连续，则称f在D上p次可微. p次可微映射的全体记为 $C^p(D,\mathbb{R}^m)$. 当 $m=1$ 时则简记为 $C^p(D)$. 若q可取任意自然数，则称 f 无穷次可微（或光滑），记 $C^\infty(D,\mathbb{R}^m)$ 或 $C^\infty(D)$ $(m=1)$.

弃用张量积语言

~~若 $f\in C^p(D,\mathbb{R}^m)$，则 $f'\in C^{p-1}(D,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$. $f''\in C^{p-2}(D,L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)))$. 注意 $L(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$ 做为线性空间同构于 $L(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. 即定义了一个映射 $f''(x_0):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. $(v_1,v_2)\mapsto f''(x_0)$ 对每个 $x_0\in D$~~

~~前面的定理则表明 $f''(x_0)(X_1,X_2)=f''(x_0)(X_2,X_1)$. 这样的映射称作 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的二重对称线性映射. 更一般地. $f^{(p)}(x_0):\overbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}^{p}\to\mathbb{R}^m$ 关于所有自变量都是对称的.~~

~~$f^{(p)}(x_0)(X_1,\cdots,X_p)=f^{(p)}(x_0)(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(p)})$ $\forall\sigma\in S_n$~~

~~所以定义了一个p重对称线性映射. 这样的线性映射构成的线性空间一般记为 $S^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. 所以 $f^{(p)}$ 定义了如下的连续映射 $f^{(p)}:D\to S^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$~~

~~前面的同构还需考虑范数 设 V_1, V_2, W 是赋范空间 $L(V_1, L(V_2,W))$ 与 $L(V_1\otimes V_2, W)$ 作为线性空间是同构的 其同构映射可写为 $\varphi: L(V_1, L(V_2,W)) \to L(V_1\otimes V_2, W)$~~

~~$f \mapsto \varphi(f)(\sum_i \alpha_i\otimes\beta_i) = \sum_i f(\alpha_i)(\beta_i)$. 其中 $\alpha_i\in V_1, \beta_i\in V_2$.~~

下面考虑范数, 对于 $f\in L(V_1, L(V_2,W))$

$$\|f\| = \sup_{\substack{\alpha\in V_1\\ \alpha\neq 0}} \frac{\|f(\alpha)\|_{L(V_2,W)}}{\|\alpha\|_{V_1}} = \sup_{\substack{\alpha\in V_1\\ \alpha\neq 0}} \sup_{\substack{\beta\in V_2\\ \beta\neq 0}} \frac{\|f(\alpha)(\beta)\|_W}{\|\alpha\|_{V_1}\|\beta\|_{V_2}}.$$

对于 $a,b\in\mathbb{R}^n$. 定义 $I_{a,b} = \{x=(1-\lambda)a+\lambda b \mid \lambda\in[0,1]\}$ →
称为以 a,b 为端点的线段.

~~为使代数 $L(V_1\otimes V_2, W)$ 中的范数 应有 $\|f\|=$~~

~~$\|\varphi(f)\| = \sup_{\substack{\alpha\otimes\beta\in V_1\otimes V_2\\ \alpha\otimes\beta\neq 0}} \frac{\|\varphi(f)(\alpha\otimes\beta)\|}{\|\alpha\otimes\beta\|_{V_1\otimes V_2}} = \sup_{\substack{\alpha\in V_1\\ \beta\in V_2}}$~~

~~[illegible] $L(V_1, L(V_2,W))$ 与 $L(V_1\otimes V_2, W)$ 中的范数 [illegible]~~

在 $V_1\otimes V_2$ 上无法赋以与上述定义一致的范数. 所以高阶导数最好的写为 $L(\overbrace{V,\cdots,V}^{p个};W)$. ($L(V^{\otimes p},W)$ 只能是简记) 其上的范数定义为

$$\|f\| = \sup_{\substack{v_1,\cdots,v_p\in V\\ \|v_i\|=1}} \|f(v_1,\cdots,v_p)\|_W.$$

§6.4 中值定理与 Taylor 公式.

Fermat引理: 若 $f: D\to\mathbb{R}$ 可微, 且 有一个局部极值点 $x_0\in D$.
⊂$\mathbb{R}^n$区域
即存在 x_0 的开邻域 $U\subset D$ 使得对 $\forall x\in U$. $f(x)\le f(x_0)$ (或 $f(x)\ge f(x_0)$).
则 $f'(x_0)=0$

证明: 对 $i=1,\cdots,n$. 考虑 $h_i(y) = f(x_0^1,\cdots,x_0^{i-1},y,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)$.
则 $y=x_0^i$ 是 $h_i(y)$ 的局部极值点. 所以 $h_i'(x_0^i)=0$, 即 $\partial_{x_i}f(x_0)=0$. □.

~~Rolle引理: $f: D\to\mathbb{R}^m$ 可微, $I_{a,b}\subseteq D$ 若 $f(a)=f(b)$ 则存在 $\xi\in I_{a,b}$, 使 [illegible] $f'(\xi)$ [illegible]~~

~~证明: 考虑函数 $g: [0,1]\to\mathbb{R}$~~

Rolle定理是中值定理的特殊情况

Lagrange定理: 设 $f: D\to\mathbb{R}$ 可微. $I_{a,b}\subseteq D$. 则存在 $\xi\in I_{a,b}$
⊆$\mathbb{R}^n$区域
使 $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

证明: 定义 $g(t)=f(a+t(b-a))$: $[0,1]\to\mathbb{R}$. 则 g 可导.
$g'(t) = f'(a+t(b-a))(b-a)$, 于是存在 $\eta\in(0,1)$ 使得
$g(1)-g(0)=g'(\eta)(1-0)$. 即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$, 其中 $\xi=a+\eta(b-a)$. □.

$f: D\to\mathbb{R}^m$ 没有中值定理! 这是因为 $\mathbb{R}^m$ 不同分量取得的中值可能不一样. 例如 $f: [a,b)\to\mathbb{R}^m$. $t\mapsto(f_1(t),\cdots,f_m(t))$

定义 $\varphi: D\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\langle u, f(x)\rangle$. 其中 $u=f(b)-f(a)$ →

则由 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的L中值定理, 存在 $\xi\in I_{a,b}$ 使 $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a)$

$\varphi(b)-\varphi(a)=\langle u, f(b)-f(a)\rangle=\|u\|^2$. $\varphi'(\xi)(b-a)=\langle u, f'(\xi)(b-a)\rangle$

$\Rightarrow \|u\|^2=|\langle u, f'(\xi)(b-a)\rangle| \le \|u\|\cdot\|f'(\xi)(b-a)\|$

$\Rightarrow \|u\| \le \|f'(\xi)\|\|b-a\|$. □

此推论的条件可减弱为: 偏导存在且为零. 因为 →

显然 0 是连续函数. 所以可推出 f 可微. 于是 f' 存在且恒为零

对 f_i 应用L中值定理可得 $f_i(b)-f_i(a)=f_i'(\xi_i)(b-a)$. 这些 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 未必是同一个. 多分量时只有如下拟L中值定理. (或称有限增量定理)

定理: 设 $f: D\to\mathbb{R}^m$ 可微, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 区域, $I_{a,b}\subseteq D$, 则存在 $\xi\in I_{a,b}$, 使

$$\|f(b)-f(a)\|\le\|f'(\xi)\|\cdot\|b-a\|.$$

证明: ~~先证明 $D\subseteq\mathbb{R}$ (不妨设 $a<b$) [illegible] 的情况, 设 $u=f(b)-f(a)$,~~

~~定义 $\varphi(t)=\langle u, f(t)\rangle$ $t\in[a,b]$ 则 φ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 于是存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a)=(b-a)\cdot\langle u, f'(\xi)\rangle$~~

~~另一方面, $\varphi(b)-\varphi(a)=\langle u, f(b)-f(a)\rangle=\|u\|^2$, 于是 $\|u\|^2=(b-a)\langle u, f'(\xi)\rangle\le(b-a)\|u\|\cdot\|f'(\xi)\|$, 所以 $\|f(b)-f(a)\|\le\|f'(\xi)\|\,|b-a|$.~~

~~一般地, 取 $g(t)=f(a+t(b-a)): [0,1]\to\mathbb{R}^m$. 则 g 在 $[0,1]$ 上可微, 所以存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $\|g(1)-g(0)\|\le\|g'(\eta)\|$. 而 $g(1)=f(b)$, $g(0)=f(a)$, $g'(\eta)=f'(\xi)(b-a)$, 其中 $\xi=a+\eta(b-a)$. 注意 $\|f'(\xi)(b-a)\|\le\|f'(\xi)\|\|b-a\|$, 定理得证.~~ □

推论: 若 $f'(x)$ 在D上恒为零, 则 f 是常值函数.

证明: 任取一点 $x_0\in D$. ~~则由定理知存在 [illegible] 中心的 [illegible] 开球上 $f(x)=f(x_0)$~~ 设 $A=f^{-1}(\{f(x_0)\})$ ~~[illegible]~~.

则 A 非空, A开 (定理推论), A闭 (f连续). 于是 $A=D$ (D连通). □

多项式定理: $(x_1+\cdots+x_n)^p = \sum_{|m|=p} \frac{k!}{m!} x^m$.

证明: 设 $f(x)=(x_1+\cdots+x_n)^p = \sum_{m_1+\cdots+m_n=p} C_{m_1\cdots m_n} x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$

对任意的 $m_1\cdots m_n$ 满足 $m_1+\cdots+m_n=p$, $\partial_{x_1}^{m_1}\cdots\partial_{x_n}^{m_n}(x_1+\cdots+x_n)^p = p!$

而 $\partial_{x_1}^{m_1}\cdots\partial_{x_n}^{m_n}(x_1^{m_1'}\cdots x_n^{m_n'}) = m_1!\cdots m_n!\,\delta_{m_1m_1'}\cdots\delta_{m_nm_n'}$.

所以 $C_{m_1\cdots m_n} = \frac{k!}{m_1!\cdots m_n!}$. 证毕 □

若设 $x-x_0=h=(h_1,\cdots,h_n)$. 利用多重指标记号可写为 →

$$f(x) = \sum_{|m|\le p} \frac{\partial^m f(x_0)}{m!} h^m + R_p(x,x_0).$$

$$R_p(x;x_0) = \sum_{|m|=p+1} \frac{\partial^m f(x_0+\theta h)}{m!} \cdot h^m.$$ 与书上相同

$\Uparrow$

另外, $f^{(p)}(x_0)(h,\cdots,h) = \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_p}f(x_0)h_{i_1}\cdots h_{i_p}$

$= (h_1\partial_1+\cdots+h_p\partial_p)^p f(x_0)$. 若记 $X = h_1\partial_1+\cdots+h_n\partial_n$. 则

$$f(x) = f(x_0) + X(f)(x_0) + \cdots + \frac{1}{p!}X^p(f)(x_0) + \frac{1}{(p+1)!}X^{p+1}(f)(\xi).$$

似乎推导更容易.

此定理还可写为 ~~若 $f': D\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 有界~~

若存在 $M>0$ 使得对 $\forall \xi\in D$ $\|f'(\xi)\|\le M$, 则对任意 $I_{a,b}\subseteq D$ $\|f(b)-f(a)\|\le M\|b-a\|$. (这里不可写为 $a,b\in D$ 因为若 D 不凸, $I_{a,b}$ 可能跑到 D 外面, 中值就没有了)

下面考虑 Taylor 公式. 与中值定理类似. $m=1$ 和 $m>1$ 时是很不一样的. 我们下面先考虑 $m=1$ 的情况. 然后再给出一般 m 的情况.

($\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$, L余项) (或 $I_{x,x_0}\subseteq D$)

定理: 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸区域. f $(p+1)$ 次可微 ($\Rightarrow f^{(p)}$ 连续, $f^{(p+1)}$ 存在) $x_0, x\in D$. 则存在 $\theta\in(0,1)$, 使

$$f(x) = \sum_{q=0}^{p} \frac{f^{(q)}(x_0)(x-x_0)^{\otimes q}}{q!} + R_p(x;x_0).$$

其中 $$R_p(x,x_0) = \frac{f^{(p+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\,(x-x_0)^{\otimes(p+1)}}{(p+1)!}$$

证明: 设 $h=x-x_0$. 定义 $g(t)=f(x_0+th): [0,1]\to\mathbb{R}$.

则 $$g(1) = g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(0)+\cdots+\frac{1}{p!}g^{(p)}(0)+\frac{1}{(p+1)!}g^{(p+1)}(\xi)$$ $\xi\in(0,1)$.

其中 $g(0)=f(x_0)$. $g'(0)=f'(x_0)h$

$g''(t) = (f'(x_0+th)(h))' = f''(x_0+th)(h,h)$

于是 $g''(0)=f''(x_0)(h,h)$ 记之为 $f''(x_0)h^{\otimes 2}$. □

(接上页)

若对 $g(t)$ 应用积分余项的 Taylor 公式 则可得 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的积分余项 Taylor 公式.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{p!}f^{(p)}(x_0)(x-x_0)^{\otimes p}$$

$$+\frac{1}{p!}\int_0^1(1-t)^p f^{(p+1)}(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)^{\otimes(p+1)}dt.$$

但为保证被积函数 R 可积. 需假设 $f\in C^{p+1}(D)$

(于是 $g_i(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$)

特别地. 若 $p=0$. 则有

$f(x)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}(x-x_0)^i g_i(x)$、其中 $g_i(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0+t(x-x_0))dt.$

可以证明 $g_i(x)$ 都是连续的. 这是很有用的 Hadamard 引理.

引理: 若 $f: D\to\mathbb{R}$ 连续. 则 $g(x)=\int_0^1 f(x_0+t(x-x_0))dt$ 也连续

证明: 取一个紧集覆盖 $I_{x_0,x}$. 于是 f 在 K 上一致连续. 即对 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 使对 $\forall x_1,x_2\in K$, $d(x_1,x_2)<\delta$. 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现在考虑 $g(x+h)-g(x)=\int_0^1(f(x_0+t(x-x_0)+th)-f(x_0+t(x-x_0)))dt$

其中 $|h|<\delta$. 于是 $\|(x_0+t(x-x_0)+th)-(x_0+t(x-x_0))\|=\|th\|=t\|h\|<\delta$

所以 $|g(x+h)-g(x)|\le\int_0^1\varepsilon\,dt=\varepsilon$. 所以 g 在 x 处连续. □

对多分量的情况 ($m>1$). 因为中值 ξ 未必能取成一致的. 所以没有 L 型余项的 Taylor 公式

定理 ($\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$. P 余项). 设 D 凸. $f\in C^p(D)$ $x, x_0\in D$

则 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^{\otimes p}+o(\|x-x_0\|^p)$

证明: 由前一定理知

$$f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(p-1)}(x_0)}{(p-1)!}(x-x_0)^{\otimes(p-1)}+R_{p-1}.$$

$R_{p-1}=\frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}(x-x_0)^{\otimes p}$. 因为 $f^{(p)}$ 连续. 所以 $f^{(p)}(\xi)=f^{(p)}(x_0)+r(x;x_0)$

其中 $r(x, x_0)\in S^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 且满足 $\lim_{x\to x_0}r(x;x_0)=0$.

设 $x-x_0=h=(h_1\cdots h_n)$, 则最终的余项为

$$|R_{p-1}|=\frac{1}{p!}\left|\sum_{i_1\cdots i_p}r(x;x_0)_{i_1\cdots i_p}h_{i_1}\cdots h_{i_p}\right|$$

$$\le\frac{1}{p!}\sum_{i_1\cdots i_p}|r(x;x_0)_{i_1\cdots i_p}||h_{i_1}|\cdots|h_{i_p}|$$

$$\le\frac{1}{p!}\sum_{i_1\cdots i_p}|r(x;x_0)_{i_1\cdots i_p}|\|h\|^p.=o(\|h\|^p).\qquad\square$$

由上述定理不难推出一般的 P余项的 Taylor定理

定理（$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, P余项）设D凸. $f\in C^p(D,\mathbb{R}^m)$

$x, x_0\in D$, 则有 $f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^{\otimes p}+o(\|x-x_0\|^p)$.

证明：设 $f=(f_1,\cdots,f_m)$. 则

$$f_i(x)=f_i(x_0)+\cdots+\frac{f_i^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^{\otimes p}+R_{i,p}(x;x_0).$$

其中 $\lim_{x\to x_0}\frac{R_{i\cdot p}(x;x_0)}{\|x-x_0\|^p}=0$. 于是

$$f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{f_i^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^{\otimes p}+\begin{pmatrix}R_{1p}(x;x_0)\\ \vdots\\ R_{mp}(x;x_0)\end{pmatrix} \quad // R_p(x;x_0).$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_p(x;x_0)}{\|x-x_0\|^p}=\begin{pmatrix}\lim_{x\to x_0}\frac{R_{1p}}{\|h\|^p}\\ \vdots\\ \lim_{x\to x_0}\frac{R_{mp}}{\|h\|^p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$ □.

最后我们给出一般的 Taylor公式. 其余项用类似拉氏中值定理的形式给出, 为了给出这样的一个余项, 我们首先定义一下什么是 $f^{(p)}(x_0)$ 的范数.（见97页背面的注释）.

~~根据定义, $\varphi=f^{(p)}(x_0)$ 是 $V=\mathbb{R}^n$ 到 $W=\mathbb{R}^m$ 的 P~~

记 $e_{ik}=e_i\otimes\tilde{e}_k$

$\langle\sum_{ik}c_{ik}e_{ik},\sum_{jl}d_{jl}e_{jl}\rangle$

$=\sum_{ikjl}c_{ik}d_{jl}\langle e_{ik},e_{jl}\rangle=\sum_{ijkl}c_{ik}d_{jl}\delta_{ij}\delta_{kl}$

$=\sum_{ik}c_{ik}d_{ik}$. 对称 ✓. 正定 ✓

由上述定义可知 $\langle v_1\otimes v_2,w_1\otimes w_2\rangle=\langle v_1,w_1\rangle\cdot\langle v_2\otimes,w_2\rangle$ 于是若 $v\in V$. 则 $\langle v^{\otimes p},v^{\otimes p}\rangle=\langle v,v\rangle^p$. 特别地若 $\|v\|=1$. 则 $\|v^{\otimes p}\|=1$. 于是

$$\|A(h^{\otimes p})\|=\|A((\|h\|\overset{v}{\frac{h}{\|h\|}})^{\otimes p})\|=\|h\|^p\|A(\overset{=x}{v^{\otimes p}})\|.$$

$\|v\|=1\Rightarrow v^{\otimes p}=1$ 所以 $\|A(v^{\otimes p})\|\le\|A\|$. 于是

$\|A(h^{\otimes p})\|\le\|A\|\cdot\|h\|^p$. ← 由97页的注释,此式显然

欧氏空间

定义对称线性映射. 首先,对于 V_1,V_2,我们规定 $V_1\otimes V_2$ 上的内积为 $\langle,\rangle:(V_1\otimes V_2)\times(V_1\otimes V_2)\to\mathbb{R}$.

设 V_1 上的基为 $e_1,\cdots,e_{n_1}$ 满足 $\langle e_i,e_j\rangle_1=\delta_{ij}$ $i,j=1,\cdots,n_1$

V_2 上的基为 $\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_{n_2}$,满足 $\langle\tilde{e}_k,\tilde{e}_l\rangle_2=\delta_{kl}$ $k,l=1,\cdots,n_2$

则 $V_1\otimes V_2$ 的基为 $e_i\otimes\tilde{e}_k$ $i=1\cdots n_1$, $k=1\cdots n_2$. 规定

$\langle e_i\otimes\tilde{e}_k,e_j\otimes\tilde{e}_l\rangle=\delta_{ij}\delta_{kl}$.

并利用双线性性将其延拓到整个 $V_1\otimes V_2$,则不难验证正定性与对称性. 于是 $(V_1\otimes V_2,\langle\rangle)$ 成为了欧氏空间. 利用 $\langle,\rangle$ 又可定义 $V_1\otimes V_2$ 上的范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

注意 $V^{\otimes p}=V\otimes V^{\otimes p-1}=V\otimes(V\otimes\cdots(V\otimes V)\cdots)$,所以可以用此方法定义 $V^{\otimes p}$ 上的内积. 若记 $e_{i_1\cdots i_p}=e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}$.

则 $\langle e_{i_1\cdots i_p},e_{j_1\cdots j_p}\rangle=\delta_{i_1j_1}\cdots\delta_{i_pj_p}$.

有了 $\langle\rangle$ 之后,$V^{\otimes p}$ 成为欧氏空间,于是可以赋以欧氏范数,欧氏距离. 接下来,对于线性映射 $A\in L(V^{\otimes p},W)$ 可定义 $\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|A(x)\|$,于是对任意的 $f^{(p)}(x_0)$,我们可以谈论 $\|f^{(p)}(x_0)\|$.

下面就是最一般的 Taylor 定理.

~~如何计算$\|f^{(p)}(x_0)\|$? 设$A=f^{(p)}(x_0)$. 设~~

~~$A(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p})=A^k_{i_1\cdots i_p}u_k$. $v=v^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}$~~

~~则$Av=A^k_{i_1\cdots i_p}v^{i_1\cdots i_p}u_k$ 若将$(i_1\cdots i_p)$重排~~

~~$\|Av\|^2=\sum_{k=1}^{n}(A^k_{i_1\cdots i_p}v^{i_1\cdots i_p})^2$ 为$1\cdots N$. $N=n^p$ 则~~

~~$\|Av\|^2=\sum_k(A^k_\alpha v^\alpha)^2$. $\sum(v^\alpha)^2=1$. 又归结为通常矩阵范数下的条件极值问题. 所以$\|A\|=\sqrt{\lambda_{max}}$. 其中$\lambda_{max}$是$A^TA$的最大特征值.~~

~~$(i_1\cdots i_p)\mapsto k=\sum_{l=1}^{p}(i_l-1)n^{l-1}+1$.~~

定理: 设D是$\mathbb{R}^n$中的凸区域, $x, x_0\in D$. f在D上$p+1$阶可微, 则存在$\xi\in I_{x,x_0}$使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{p!}f^{(p)}(x_0)(x-x_0)^{\otimes p}+R_p,$$

其中 $\|R_p\|\le\frac{\|f^{(p+1)}(\xi)\|}{(p+1)!}\|x-x_0\|^{p+1}$.

证明: 设 $\varphi(t)=\langle R_p, f(t)\rangle_W$, 则$\varphi$是从D到$\mathbb{R}$的$p+1$阶可微映射. 于是由$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ L余项的Taylor定理, 存在$\xi\in I_{x,x_0}$

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x_0)(x-x_0)^{\otimes p}+\frac{\varphi^{(p+1)}(\xi)(x-x_0)^{\otimes(p+1)}}{(p+1)!}.$$

其中 $\varphi'(x_0)(x-x_0)=\langle R_p, f'(x_0)(x-x_0)\rangle_W, \cdots$

$\varphi^{(p)}(x_0)(x-x_0)^{\otimes p}=\langle R_p, f^{(p)}(x_0)(x-x_0)^{\otimes p}\rangle_W$, 所以,移项得

$$\|R_p\|^2=\langle R_p, R_p\rangle=\frac{1}{(p+1)!}\langle R_p, f^{(p+1)}(\xi)(x-x_0)^{\otimes(p+1)}\rangle$$

$$\le\frac{1}{(p+1)!}\|R_p\|\cdot\|f^{(p+1)}(\xi)\|\cdot\|x-x_0\|^{p+1}.\quad\square$$

当$p=0$时, 上述定理回到拟微分中值定理. 所以也可叫拟Lagrange余项的Taylor定理.

或有限增量型余项

Date:
Place:

Reminders

若 $f \in C^p$. 则 f^{-1} 也$\in C^p$. →

① $p=1$ ✓.

② 记 $f^{-1}=g$. 已知 $g'(y)=(f'(g(y)))^{-1}$. 所以

$$g''(y) = -(f'(g(y)))^{-1}\cdot(f'(g(y)))'(f'(g(y)))^{-1}. \quad \left((A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}\right)$$

$$= -f'(g(y))^{-1} f''(g(y)) \cdot f'(g(y))^{-1} f'(g(y))^{-1},$$

更高阶类似.

Date:
Place:

Reminders

§6.5 反函数与隐函数.

~~若 $D=(a,b)\subset\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的区间. $f: D\to\mathbb{R}$ 连续可导. 且 f' 处处非零. 则 f' 恒大于零或恒小于零. 相应地 f 单调增或单调减. 此时存在 $f^{-1}: f(D)\to D$. 且 f^{-1} 也可导. 且有 $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$ 反函数定理即上述结论的高维推广.~~

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续可微. $f'(x_0)\neq 0$. 则存在 x_0 的邻域 U 使 f' 在 U 上恒大于零或恒小于零. 于是 f 在 U 上单调增或单调减. 所以 $f^{-1}: f(U)\to U$ 存在. 此时可选 $y_0=f(x_0)$ 的一个邻域 $V\subseteq f(U)$ 使 f^{-1} 在 V 上也可导. 且对 $\forall y\in V$. $x=f^{-1}(y)$ 有 $(f^{-1})'(y)=(f'(x))^{-1}$. 反函数定理即上述结论的推广.

定理（反函数）设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $f: D\to\mathbb{R}^n$ 连续可微, $x_0\in D$. 若 $\det f'(x_0)\neq 0$, 则存在 x_0 的开邻域 U ($x_0\in U\subseteq D$) 以及 $f(x_0)$ 的开邻域 V, 使得 $f: U\to V$ 有一个连续可微的逆映射 $f^{-1}: V\to U$. 且对 $\forall y\in V$. 有 $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$. 其中 $x=f^{-1}(y)$.

证明: I. 设 $A=f(x_0)$. 我们首先证明, 存在 $m_0>0$ 使得 对 $\forall h\in\mathbb{R}^n$ $\|A(h)\|\geq m_0\|h\|$. 因为 $\det A\neq 0$. 所以 A^{-1} 存在. 于是对 $\forall k\in\mathbb{R}^n$. $\|A^{-1}(k)\|\leq\|A^{-1}\|\cdot\|k\|$. 取 $m_0=\|A^{-1}\|^{-1}$,

先由 $\det f'$ 的连续性取 $\delta_1>0$ 使 $\det f'(x_0)$ 在 $B_{\delta_1}(x_0)$ 上恒不为零 →

$k=A(h)$. 则有 $\|h\|\le m_0^{-1}\|A(h)\|$. 所以 $\|A(h)\|\ge m_0\|h\|$.

2、接下来证明, 对于上述 m_0. 存在 x_0 的邻域 K, 使得对 $\forall x\in K$ $\det f'(x)\neq 0$, 且 $\forall x_1, x_2\in K$, 有 $\|f(x_1)-f(x_2)\|\ge\frac{m_0}{2}\|x_1-x_2\|$. 特别地, 这个不等式说明 f 在 K 上是单射

首先 f 连续可微 $\Rightarrow$ $\partial_i f_j: D\to\mathbb{R}$ 连续 $(i,j=1\cdots n)$,

于是, 对于 $\varepsilon_0=\frac{m_0}{2n}$, 存在 $\delta_2>0$ 使得对 $\forall x\in B_{\delta_2}(x_0)$.
$|\partial_i f_j(x)-\partial_i f_j(x_0)|<\varepsilon_0$. 取 $g(x)=f(x)-Ax$, 则对 $\forall x\in B_{\delta_2}(x_0)$,
$\|g'(x)\|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\partial_i f_j(x)-\partial_i f_j(x_0))^2}<n\varepsilon_0$. 于是对于 $x_1, x_2\in B_{\delta_2}(x_0)$
由有限增量定理 $\|g(x_1)-g(x_2)\|\le n\varepsilon_0\|x_1-x_2\|$. 另方面,

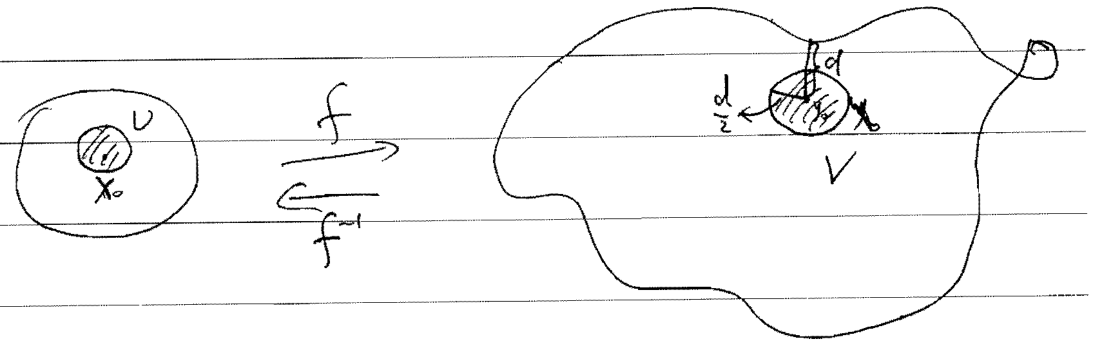
$$\|g(x_1)-g(x_2)\|=\|A(x_2-x_1)+f(x_1)-f(x_2)\|$$
$$\ge\|A(x_1-x_2)\|-\|f(x_1)-f(x_2)\|.$$

所以 $\|f(x_1)-f(x_2)\|\ge m_0\|x_1-x_2\|-n\varepsilon_0\|x_1-x_2\|=\frac{m_0}{2}\|x_1-x_2\|$.

最后, 取 $K=\overline{B}_{\delta/2}(x_0)$ 即可, $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$.

3. 设 $y_0=f(x_0)$. $d=d(y_0, f(\partial K))>0$. $V=B_{d/2}(y_0)$, $U=f^{-1}(V)$, $(\subseteq\overset{\circ}{K}$

则存在连续的映射 $f^{-1}: V\to U$. 它是 $f: U\to V$ 的逆.



至此, U, V同胚. →

因为K紧, 所以∂K紧, 于是$f(\partial K)$紧, 所以闭. 因为f在K上单, 所以$f(x_0) \notin f(\partial K)$. 所以$d>0$. 根据我们的取法, 对$V$中的任一点$y$和$x \in \partial K$, 有$\|y-y_0\| < \|y-f(x)\|$.

下面来构造f^{-1}. ~~首先存在函数$g: K \to \mathbb{R}$.~~

对于$y \in V$, 构造函数$g: K \to \mathbb{R}$. $g(x) = \|y-f(x)\|^2$, 则g连续, 于是在K上有最小值. 注意对$\forall x \in \partial K$, $g(x) > g(x_0)$, 所以最小值一定不在∂K上取到. 设$x \in K^{\circ}$使$g(x)$最小, 则由Fermat引理(注意g可微), 应有$\partial_i g(x) = 0$. 而$\partial_i g(x) = -2\sum_{j=1}^{n}(y-f(x))_j \cdot \partial_i f_j(x)$, 注意矩阵$\partial_i f_j(x)$非退化. 所以有$y=f(x)$. 我们定义$f^{-1}(y)=x$. (由第2步的不等式可知这个$x$是唯一的). 接下来, 第2步的不等式可改写为$\|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\| \leq \frac{2}{m_0}\|y_1-y_2\|$, 于是$f^{-1}$连续.

4、最后我们证明f^{-1}可微. 任取$y \in V$, $x=f^{-1}(y)$, 设$B=f'(x)$可逆. 对于x附近的x', 有$f(x') = f(x)+B(x'-x)+r(x';x)$, 其中$\lim\limits_{x' \to x}\frac{\|r(x';x)\|}{\|x'-x\|} = 0$. 设$y'=f(x')$, 则有

$$f^{-1}(y') = f^{-1}(y) + B^{-1}(y'-y) + B^{-1}r(f^{-1}(y'), f^{-1}(y))$$

所以只需证$\lim\limits_{y' \to y}\frac{\|B^{-1}r(f^{-1}(y'), f^{-1}(y))\|}{\|y'-y\|} = 0$. 这等价了

或 $(x,y)\mapsto(e^x\cos y,\ e^x\sin y)$. $J=e^{2x}>0$.

↓

单射条件是必要的. 例如 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid r<\sqrt{x^2+y^2}<R\}$ →
$f:D\to\mathbb{R}^2$. $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$, $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.
则 $\det f'=4(x^2+y^2)>4r^2$. $E=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid r^2<\sqrt{u^2+v^2}<R^2\}$
但 $f:D\to E$ 不是单射, 因为 $f(x,y)=f(-x,-y)$. 于是 f^{-1} 不存在.

这样的D. E叫微分同胚的. 反函数定理也可叙述为 $f:D\to E$. 若 $\det f'(x_0)\neq 0$. 则存在 x_0 的开邻域U 使 $f:U\to f(U)$ 是微分同胚.

$$\lim_{y'\to y}\frac{\|r(f^{-1}(y');f^{-1}(y))\|}{\|y'-y\|}=0.$$ 另一方面. 因为 f^{-1} 连续. 所以当 $y'\to y$ 时有 $f^{-1}(y')\to f^{-1}(y)$.

$$\|$$

所以 $$\lim_{y'\to y}\frac{\|r(f^{-1}(y');f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y')-f^{-1}(y)\|}\cdot\frac{\|f^{-1}(y')-f^{-1}(y)\|}{\|y'-y\|}.$$ 其中第一个分式当 $f^{-1}(y')\to f^{-1}(y)$ 时趋于零, 而第二个分式, 由第二步的不等式, 不大于 $\frac{2}{m_0}$, 所以整个极限为零. □

推论: 设D是 $\mathbb{R}^n$中的 区域. $f\in C^1(D,\mathbb{R}^n)$. f为单射. 若 $\det f'$ 在D上处处非零, 则 $E=f(D)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域. 且 $f^{-1}:E\to D$ 可微.
证明: 只需证E是开集. 对于 $y_0\in E$. 设 $f^{-1}(y_0)=x_0$. 则存在开集 $U\ni x_0$. $V\ni y_0$ 使 $V=f(U)$. 于是 $V\subseteq E$. 所以E开. □

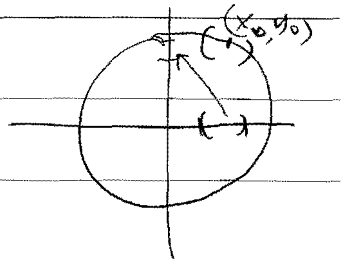
~~如果区域 $D, E\subseteq\mathbb{R}^n$ 之间存在 $f\in C^1(D,E)$. $f^{-1}\in C^1(E,D)$. 则称它们微分同胚.~~

反函数定理可视为线性方程组 $Ax=y$ $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ $\det A\neq 0$ 有解的非线性版本. 我们还可考虑更一般的线性方程组 $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 它的非线性版本即为研究一般的方程组
$$\begin{cases} f_1(x^1,\cdots,x^n)=y_1\\ \vdots \\ f\ (x^1,\cdots,x^n)=y \end{cases}$$

设 $i_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$, $x \mapsto (x,0)$.

$i_2: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$, $y \mapsto (0,y)$.

则 $A_1 = A\circ i_1$. $A_2 = A\circ i_2$.



例如 $f(x,y) = x^2+y^2-1$.

对于 $(x_0,y_0) \in S^1 = f^{-1}(0)$. 只要 $y_0 \neq 0$.

总可找到 x_0 的小邻域 U, 以及 U 上的映射 $y(x) = \pm\sqrt{1-x_0^2}$ (正负号取决于 y_0 的符号), 使得 $f(x, y(x)) \equiv 0$. $\forall x \in U$.

更一般地, 我们可以把自变量分成两组. 一组是真正想要的量, 其个数与方程个数相同. 另一组则是某种参数. 最后的解则是将想要的量表示为参数的形式, 使得它满足方程. 这类问题叫隐函数问题. 其答案就是下面的隐函数定理.

在考虑隐函数定理之前, 先看一下它的线性版本.

例: 设 A 是 $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射, $(x,y) \mapsto A(x,y)$.

定义 $A_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A(x,0)$. $A_2: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $y \mapsto A(0,y)$.

于是 $A(x,y) = A_1x + A_2y$. 若 A_2 可逆, 则 $A(x,y)=0$ 的解可表示为 $y = -A_2^{-1}A_1x$.

连续

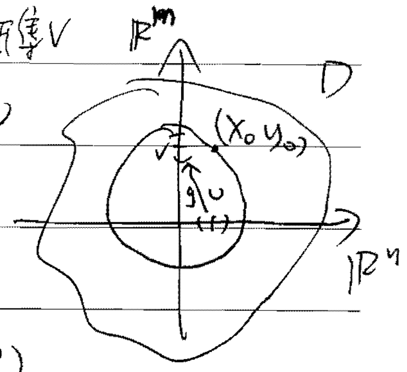
~~定理: 设 $f: D \to \mathbb{R}^n$ 可微 (D 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 中的开集). $(x_0,y_0) \in D$. 且 $f(x_0,y_0)=0$. 若矩阵 $M = (D_{n+i}f_j(x_0,y_0))_{i,j=1..n}$ 可逆, 则存在 x_0 在 $D\cap\mathbb{R}^n$ 中的开集 U, y_0 在 $D\cap\mathbb{R}^m$ 中的开集 V 以及可微映射 $g: U \to V$, 使得对 $\forall x \in U$, $f(x, g(x)) = 0$.~~

若 $f\in C^p$. 则 最终的 g 也 $\in C^p$. 道理同前. →

可取 $G(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$. 于是 →

$(x,y)=F\circ G(x,y)=F(u,v)=(u,f(u,v))$. 所以 $u(x,y)=x$

定理(隐函数) 设 D 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 中的开集. $(x_0,y_0)\in D$. $f: D\to\mathbb{R}^m$ 连续可微 $f(x_0,y_0)=0$. 设 $A=f'(x_0,y_0)$, 并记 $A_k=A\circ i_k$ $(k=1,2)$(见上例) 若 $\det A_2\neq 0$. 则存在 x_0 在 $D\cap\mathbb{R}^n$ 中的开集 U. y_0 在 $D\cap\mathbb{R}^m$ 中的开集 V 以及连续可微函数 $g: U\to V$, 使得对 $\forall x\in U$ 有 $f(x,g(x))=0$.



若记 $B=f'(x,g(x))$, $B_k=B\circ i_k$.

则 $g'(x)=-B_2^{-1}\circ B_1$ $(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m)$.

证明: 考虑映射 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, $(x,y)\mapsto(x,f(x,y))$. 于是 $F'(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} I & 0\\ A_1 & A_2\end{pmatrix}$ 所以 $\det F'(x_0,y_0)=\det A_2\neq 0$. 所以由反函数定理, 存在 $F(x_0,y_0)$ 的开邻域 $\tilde{V}$ 和 (x_0,y_0) 的开邻域 $\tilde{U}$ 使 $F:\tilde{U}\to\tilde{V}$ 是微同胚, ~~且其逆可微~~. 不妨设 $\tilde{U}$ 已取为 $U\times V$ 的形式 (若不然, 可取 U, V 使 $U\times V\subseteq\tilde{U}$. 然后重取 $\tilde{V}$ 为 $F(U\times V)$). 设 F 的逆为 $G:\tilde{V}\to U\times V$. 其具体形式必为 $(x,y)\mapsto(x,h(x,y))$. 其中 h 连续可微 (因为 G 如此) 因为 $F\circ G=id$. 所以有 $(x,y)=F(x,h(x,y))=(x,f(x,h(x,y)))$ 所以 $y=f(x,h(x,y))$. 特别地, $f(x,h(x,0))=0$. 所以只需取 $g(x)=h(x,0)$ 即可.

最后, 对 $f(x,g(x))=0$ 两端求微分可得 $B_1+B_2\circ g(x)=0$. 所以 $g'(x)=-B_2\circ B$ □.

若f是C^p的，则φ和ψ都可取为C^p的. →

~~$\mathrm{rank} f'(x_0)=k \Rightarrow$ 存在x_0的邻域$\tilde D$，使得对$\forall x\in\tilde D$，$\mathrm{rank} f'(x)=k$.~~

若对$\forall x\in D$，$\mathrm{rank} f'(x)$是常数k $(k\le\min(n,m))$，则对任一$x_0\in D$，…

↑

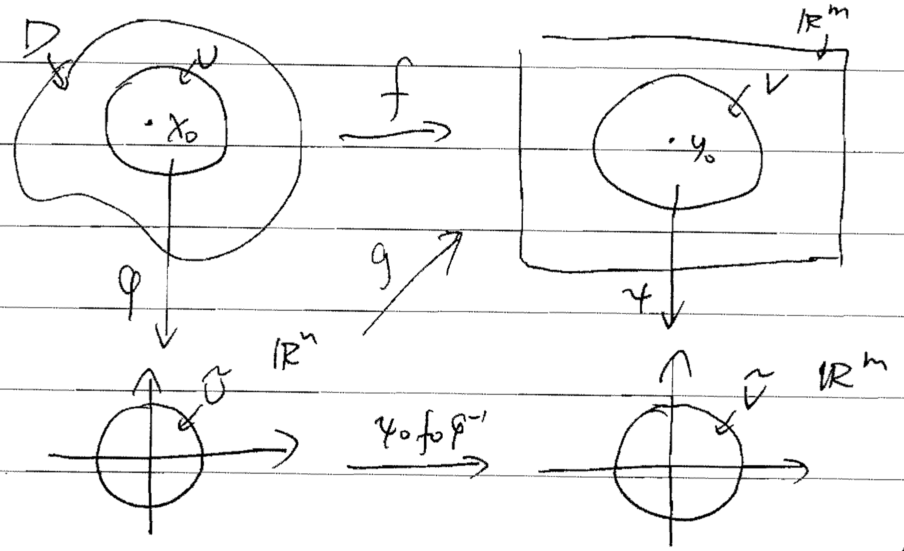
最好将最大线性无关移至前面.

下面的~~单~~秩定理是线性代数中如下结果的非线性推广：设~~A~~ $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，$\mathrm{rank}(A)=k$，则存在$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{R}^m$中的基，使A在它们下的矩阵为$\begin{pmatrix}I_k&0\\0&0\end{pmatrix}$.

定理（~~由~~秩定理）设D是$\mathbb{R}^n$中的区域，$f:D\to\mathbb{R}^m$连续可微，~~若$k=\mathrm{rank} f'(x)$ [illegible] 常数 $(k\le\min(m,n))$ [illegible]~~，$y_0=f(x_0)$ 存在x_0的开邻域U以及$\mathbb{R}^n$中的开集$\tilde U$和$U\to\tilde U$的微分同胚φ，以及y_0的开邻域V，以及$\mathbb{R}^m$中的开集$\tilde V$和$V\to\tilde V$的微分同胚ψ，使得$\tilde f=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$具有如下形式

$$\tilde f(u_1,\cdots,u_k,\cdots,u_n)=(u_1,\cdots,u_k,\overbrace{0,\cdots,0}^{m-k个})$$

其中$(u_1,\cdots u_n)$是$\tilde U$上的坐标.



证明：不妨设$f'(x_0)$的前k行，前k列构成的矩阵A非退化. 定义映射$\varphi:D\to\mathbb{R}^n$，$(x_1,\cdots x_n)\mapsto(f_1(x),\cdots,f_k(x),x_{k+1},\cdots x_n)$. 则$\varphi'=\begin{pmatrix}A&*\\0&I_{n-k}\end{pmatrix}$，于是$\det\varphi'=\det A\neq0$，由反函数定理，

隐函数求导应用-例: Lagrange 反演公式.

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 光滑, f' 有整体的上界 M. 考虑方程

$$V(x,y)=x+yf(V(x,y))$$ 当 $y=0$ 时, 有 $V(x,0)=x$.

~~对V求导得~~ 设 $u=x+yf(v)-v$. 则 $\frac{\partial u}{\partial v}=yf'(v)-1$.

当 $|y|<\frac{1}{M}$ 时 $\frac{\partial u}{\partial v}\neq 0$ 所以隐函数方程有解 $V(x,y)$. 根据隐函数定理, 有 $V_x=\frac{1}{1-yf'(v)}$. $V_y=\frac{f(v)}{1-yf'(v)}$, 于是 $V_y=f(v)V_x$.

设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是另一个光滑函数. 我们关心 $g(V(x,y))$ 关于 y 的 Taylor 展开. $g(V(x,0))=g(x)$. $\frac{\partial g}{\partial y}=g'(v)\cdot V_y=g'(v)f(v)V_x$

注意 $V_x|_{y=0}=1$. 所以 $\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{y=0}=g'(x)f(x)$.

引理: 对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\partial_y^k g=\partial_x^{k-1}(g'(v)f^k(v)V_x).$$

证明: $k=1$ 时已证. 假设 k 时成立. 对于 $k+1$, 有

$$\partial_y^{k+1}g=\partial_y\partial_x^{k-1}(g'(v)f^k(v)V_x)=\partial_x^{k-1}((g'(v)f^k(v))_v V_y V_x+g(v)f^k(v)V_{xy})$$

$$=\partial_x^{k-1}((g'(v)f^k(v))_x\cdot f(v)V_x+(g'(v)f^k(v))\cdot(f(v)V_x)_x)$$

$$=\partial_x^k(g'(v)f^{k+1}(v)V_x).$$ □.

存在 x_0 的邻域 U 和 $\varphi(x_0)$ 的邻域 $\tilde U$, 使 $\varphi:U\to\tilde U$ 为微分同胚. 现在设 $g:\tilde U\to\mathbb{R}^m$. $g=f\circ\varphi^{-1}$. 则 $g'=f'\circ(\varphi^{-1})'$. 因为 $(\varphi^{-1})'$ 处处非退化. 所以 $\operatorname{rank} g'=k$. 设 $(u_1,\cdots,u_n)$ 为 $\tilde U$ 上的坐标.

则 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=(u_1,\cdots,u_n)\Rightarrow\begin{cases}u_i=f_i(x) & i=1\cdots k\\ u_{k+i}=x_{k+i} & i=1\cdots n-k\end{cases}$

于是 $g(u_1,\cdots,u_n)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))=(u_1,\cdots,u_k,g_{k+1}(u),\cdots,g_m(u))$.

$g'=\begin{pmatrix}I&0\\ *&B\end{pmatrix}$ 其中 $B=\left(\frac{\partial g_{k+i}}{\partial x_{k+j}}\right)$. 注意 $\operatorname{rank} g'=k$. 所以 B 必为零矩阵. 于是 $g_{k+i}(u)=g_{k+i}(u_1,\cdots,u_k)$. $(i=1\cdots m-k)$. 现在定义映射 $\psi: E\to\mathbb{R}^m$, (其中 E 是 $y_0=f(x_0)$ 的某一邻域

$$(y_1,\cdots,y_m)\mapsto(y_1,\cdots,y_k,y_{k+1}-g_{k+1}(y_1,\cdots,y_k),\cdots,y_m-g_m(y_1,\cdots,y_k)).$$

则 $\psi'=\begin{pmatrix}I&0\\ *&I\end{pmatrix}$, 于是存在 y_0 的开邻域 V 以及 $\mathbb{R}^m$ 的开集 $\tilde V$ 使 $\psi:V\to\tilde V$ 为微分同胚. 现在, 对于 $(u_1,\cdots,u_n)\in\tilde U$.

$$\tilde f(u_1,\cdots,u_n)=\psi\circ g(u_1,\cdots,u_n)=\psi(u_1,\cdots,u_k,g_{k+1}(u),\cdots,g_m(u))$$

$$=(u_1,\cdots,u_k,0,\cdots,0)$$ □.

秩定理要求在 x_0 的邻域内 f 的秩恒为 k. 这对一般的 x_0 未必成立. 所以秩定理常与下面的结果联用.

定义: 设 $f:D\to\mathbb{R}^m$. C^1. 定义

$$D_k=\{x\in D\mid \operatorname{rank} f'(x)=k\}.\quad 0\le k\le\min(m,n)$$

由此引理不难知道 $\partial_y^k g|_{y=0} = \partial_x^{k-1}(g'(x)f^k(x))$. 所以有

$$g(v) = g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\partial_x^{k-1}(f^k(x)g'(x)).$$ （若级数收敛）

这就是Lagrange反演公式. 若 $g(v)=v$. 则有

一般地 方程 $\frac{\partial v}{\partial y} = f(v)\frac{\partial v}{\partial x}$, $v|_{y=0} = g(x)$ 的解可表示为

$v = g(x+yf(v))$. 它在 $|y|$ 充分小的区域上存在.

$$v(x,y) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\partial_x^{k-1}(f^k(x)).$$

若 $\gamma: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 呢? or $\gamma: \mathbb{R}\to T^2$?

~~当 $n<m$ 时. f 可以是满的. 例如 Peano 曲线的光滑化.~~ →

~~利用秩定理只能证明局部上不满. 但无法排除整体行为.~~

No. C^1 曲线的像一定是无处稠密的

证: $\gamma: [0,1]\to\mathbb{R}^2$. 则 γ 长度有限 $L = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|dt$.

另一方面, 考虑 $[0,1]^2$ 中的格点 $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ $0\le i,j\le n$. $n\in\mathbb{N}$.
它们之间的距离至少是 $\frac{1}{n}$. 点数是 $(n+1)^2$. 所以经过它们全部的曲线长度至少是 $\frac{1}{n}\cdot((n+1)^2-1) = n+2$. 当 n 充分大时它将大于 L. 所以 L 不可能经过所有这些点. □

（见下页）

使 D_k 非空的最大的 k 叫 f 在 D 上的秩.

定理: 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中区域, $f: D\to\mathbb{R}^m$ 连续可微, k 是 f 在 D 上的秩. 则 D_k 是开集. 具体地, 若 $\operatorname{rank} f'(x_0) = k$, 则存在 x_0 的开邻域 D', 使得对 $\forall x \in D'$. $\operatorname{rank} f'(x) = k$.

证明: $\operatorname{rank} f'(x_0) = k$ 说明存在 $f'(x_0)$ 的 k 阶子式非零. 注意这个子式的矩阵元都是连续函数. 所以存在 x_0 的邻域 D', 使得这个子式在 D' 上恒不为零. 所以 $\forall x\in D'$ $\operatorname{rank} f'(x) \ge k$. 又因为 k 是极大的, 所以 $\operatorname{rank} f(x) \le k$. □

例: 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$. $E\subseteq\mathbb{R}^m$ 是开集, $f: D\to E$ 是 C^1 的.

i) 若 $n>m$. 则 f 不可能是单射.

ii) 若 f 是微分同胚, 则 $n=m$

证明: 设 f 在 D 上的秩是 k. 则 $k\le\min(n,m)$ 设 $\operatorname{rank} f'(x_0) = k$. 则存在 x_0 的开邻域 D' 使得对 $\forall x\in D'$. $\operatorname{rank} f'(x) = k$. 由秩定理. f 局部上等价于映射 $(u_1,\cdots u_n)\mapsto(u_1,\cdots u_k,0,\dots,0)$

若 $n>m$. 则 $k<n$, 所以 $(u_1,\cdots u_n)$ 与 $(u_1,\cdots u_n')$ 像相同. 不单.

~~若 $n<m$. 则 $k<m$. 所以 $(u_1,\cdots u_k,1,0,\cdots 0)$ 没被映到.~~

若 f 是微分同胚. 则 f 单 得 $n\le m$. f^{-1} 单 则 $n\ge m$. 所以 $n=m$. □

此问题的一般答案即 Sard 定理

Sard定理: 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是 C^k 的 ($k\geq\max\{n-m+1,1\}$)
设 $X=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \operatorname{rank} f'(x)<m\}$. 则 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的 Lebesgue 零测集.

特别地. 若 $n<m$. 则 $n-m+1<1$, 于是 任何 C^1 映射的像都是零测的. (因为 $\operatorname{rank} f'(x)\leq\min(n,m)<m$. 所以 $X=\mathbb{R}^n$. $f(X)$ 即 f 的像). 所以不可能满.

Mini-Sard: 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 开. $f:D\to\mathbb{R}^m$ 连续可微. 若 $n<m$. 则 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集

证明: ① $i:\mathbb{R}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^m$ $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_n,0,\cdots,0)$ 的像是零测的. 因为 $\mathbb{R}^n$ 可分解为 $\bigcup_{k_1\cdots k_n\in\mathbb{Z}} B(k_1\cdots k_n)$. 其中 $B(k_1\cdots k_n)=[a_n,b_n]$, $a_n=(k_1,\cdots,k_n)$. $b_n=(k_1+1,\cdots,k_n+1)$. 于是只需证每个 $i(B(k_1\cdots k_n))$ 零测. 这等价于证明 $\overset{B}{[0,1]^n}$ 在 $\mathbb{R}_m$ 中零测. 对 $\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta<\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{m-n}}$. $\tilde{B}=[\hat{a},\hat{b}]$. 其中 $\hat{a}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n个},\underbrace{-\delta,\cdots,-\delta}_{m-n个})$. $\hat{b}=(\underbrace{1,\cdots,1}_{n个},\underbrace{\delta,\cdots,\delta}_{m-n个})$
则 $\mathrm{Vol}_m\tilde{B}=(2\delta)^{m-n}<\varepsilon$. 而 $i(B)\subseteq\tilde{B}$. 所以 $i(\mathbb{R}^n)$ 零测

~~② D 可分解为 $D=\bigcup_{k_1\cdots k_n\in\mathbb{Z}} D_{k_1\cdots k_n}$. $D_{k_1\cdots k_n}$ 是 $D\cap B_{(k_1\cdots k_n)}$ 的一个具有界闭包的开邻域. 只要证明每个 $f(D_{k_1\cdots k_n})$ 零测, 就可说明 $f(D)$ 零测. 所以不妨假设 D 有界的闭包. 于是~~

(接下页)

②

~~Remark Weierstrass 逼近定理说 任何连续映射可由多项式映射逼近. 多项式映射是 C^1 的. 所以, 结合上述结果可以证明 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 当 $n\neq m$ 时一定不同胚.~~ / 又能说

$D\subseteq\mathbb{R}^n$ $E\subseteq\mathbb{R}^m$

设 $f:D\to E$ 连续可微.

① 若对 $\forall x\in D$, $\operatorname{rank} f'(x)=n$. 则称 f 是一个浸入 (immersion).

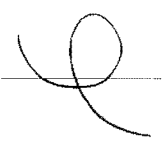
② 若对 $\forall x\in D$. $\operatorname{rank} f'(x)=m$, 则称 f 是一个淹没 (submersion).

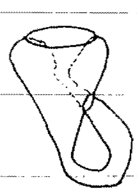
③ 若对 $x\in D$, $\operatorname{rank} f'(x)<m$, 则称 x 是 f 的临界点, 相应的 $y=f(x)$ 则叫 f 的临界值. 若 $x\in D$ 不是临界点, 则称 x 是正则点. 若 $y\in E$ 不是临界值, 则称 y 为正则值. (正则值可以不在 $f(D)$ 上).

(embedding)

④ 若 f 是单的浸入, 且 $f:D\to f(D)$ 是同胚, 则称 f 是一个嵌入.

例: ①





$[0,2\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow$

$(\theta,\varphi)\mapsto x=(R+r\cos\theta)\cos\varphi.\ y=(R+r\cos\theta)\sin\varphi.\ z=r\sin\theta.$

现在令 $\theta=\alpha t$, $\varphi=\beta t$, $t\in\mathbb{R}$. 于是得映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$.
它的像总在环面上. 若 $\alpha/\beta\in\mathbb{Q}$ 经若干圈可回到起点. 若 $\alpha/\beta\notin\mathbb{Q}$ 则永不回到起点. 这个映射称为环面无理流

② 设 $p:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $(x_1\cdots x_n,\cdots x_m)\mapsto(x_1\cdots x_n)$

$\tilde{D}=D\times\mathbb{R}^{m-n}$. $\tilde{f}:\tilde{D}\to\mathbb{R}^m$ $x\mapsto f(p(x))$. 则 $\tilde{D}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中开集. $\tilde{f}$ 连续可微. 且 $\tilde{f}(\tilde{U})=f(U)$ 于是只需证 $\tilde{f}(\tilde{U})$ 零测. 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有中心和半径都为有理数的闭球的全体. 显然 $D=\bigcup\{B\in S\mid B\subseteq D\}$ S 可数. 于是满足 $(B\in S)$ $B\subseteq D$ 的 B 也可数. 只要证明每个 $f(B)$ 零测即可说明 $f(U)$ 零测. $i(B)$ 是 $\tilde{D}$ 中的零测集. 所以问题归结为: 设 $\tilde{D}\subseteq\mathbb{R}^m$ 开. $f:\tilde{D}\to\mathbb{R}^m$ 连续可微. $A\subseteq\tilde{D}$ 是零测集 则 $f(A)$ 也是零测集. 设 W 是 A 的有界开邻域. 满足 $\overline{W}\subseteq\tilde{D}$ ~~$\|f'\|$ 在 W 上连续. 于是有最大值 M. 于是对任意 $x,y\in\overline{W}$. $\|f(x)-f(y)\|\leq M\|x-y\|$~~

$\|f'\|$ 在 $\overline{W}$ 上连续. 于是有最大值 M. 于是对 $\forall x,y\in\overline{W}$, $\|f(x)-f(y)\|\leq M\|x-y\|$.

~~对于任意闭区间 $I=[a,b]\subseteq W$. 设 $f=(f_1,\cdots f_m)$ $m_j=\min_{x\in I}f_j(x)$ $M_j=\max_{x\in I}f_j(x)$. 则 $f(I)\subseteq[m,M]$. $m=(m_1\cdots m_m)$. $M=(M_1\cdots M_m)$. 对每个 j, 有 $M_j-m_j\leq M$.~~ 对任意立方体 $I=[a,a+\varepsilon]$. 设 $f=(f_1\cdots f_m)$

$c_j=\min_{x\in I}f_j(x)$. $d_j=\max_{x\in I}f_j(x)$ 则 $f(I)\subseteq[c,d]$. $c=(c_1\cdots c_m)$. $d=(d_1\cdots d_m)$

$$Vol_m([c,d])=\prod_{j=1}^{n}(d_j-c_j)\leq M\,diam(I)^m=M\cdot m^{\frac{m}{2}}\,Vol_m(I).$$ 设 $M'=M\cdot m^{\frac{m}{2}}$

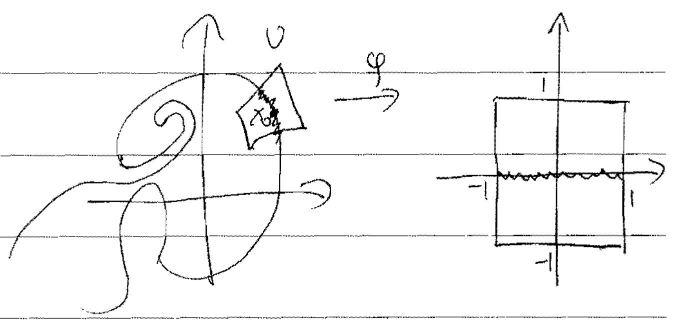
若 A 可由总体积小于 $\frac{\varepsilon}{M'}$ 的些立方体覆盖. 则 $f(A)$ 可由总体积小于 ε 的立方体覆盖 所以 $f(A)$ 是零测集. □

每个闭区间可分解为可数多个半径为有理数的闭区间的并

为什么可用立方体 任何闭区间可分解为可数立方体的并.

§6.6. 流形 (manifold)

定义: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ 叫做 k 维流形, 如果对 $\forall x_0\in M$, 存在 x_0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域 U, 以及从 U 到 $I_\varepsilon^n=\{t\in\mathbb{R}^n \mid |t_i|<\varepsilon\}$ 的微分同胚 φ, 使得 ($\varphi(x_0)=0$, 且) $\varphi(M\cap U)$ 正好是 I_ε^n 中满足 $\{t_{k+1}=0,\cdots,t_n=0\}$ 的点构成的子集.



如果所有这样的 φ 都是 C^k 的. 则称 M 为 C^k 的.

定理(正则值) 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $E\subseteq\mathbb{R}^m$ 都是区域, $f:D\to E$ 连续可微. $q\in f(D)$ 是 f 的一个正则值 则 $f^{-1}(q)$ 是流形. 维数是 $n-m$.

证明: 因为 $q\in f(D)$. 所以 $f^{-1}(q)$ 非空. 设 $x_0\in f^{-1}(q)$, 则 $\operatorname{rank}f'(x_0)=m$. 所以 f 在 x_0 处达到了极大秩. 于是存在 x_0 的开邻域 U_0. 使得对 $\forall x\in U_0$. $\operatorname{rank}f(x)=m$. 由秩定理. 存在 x_0 的邻域 U. q 的开邻域 V. $\mathbb{R}^n$ 的开集 $\tilde{U}$. $\mathbb{R}^m$ 的开集 $\tilde{V}$ 以及微分同胚 $\varphi:U\to\tilde{U}$. $\psi:V\to\tilde{V}$, 使 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(\tilde{u}_1\cdots\tilde{u}_n)=(\tilde{u}_1\cdots\tilde{u}_m$

~~设 $\tilde{\varphi}(x_0)=y_0$. 以 y_0 为原点, 在 $\tilde{U}$ 内重建坐标系 $(u_1,\cdots,u_n)$ 使 $u_i=\tilde{u}_{n+1-i}$ 于是 $\tilde{\psi}\circ f\circ\tilde{\varphi}^{-1}(u_1\cdots u_n)=(\tilde{u}_n,\cdots,\tilde{u}_{n-m+1})$~~. 对于 $x\in M\cap U$

不妨设 $\varphi(x_0)=0$. $\psi(q)=0$. $\tilde{U}$ 已取为 I_ε^n. 重新将 $u_1\cdots u_n$

编号为 $t_n \cdots t_1$, 则有 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(t_n\cdots t_1)=(t_n,\cdots t_{n-m+1})$

对于 $x\in M\cap S$, 注意 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))=\psi\circ f(x)=\psi(a)=0$. 于是 $\varphi(x)$ 刚好满足 $t_{n-m+1}=0,\cdots,t_n=0$. 所以M是一个n-m维流形. □

例: ① $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_1^2+\cdots+x_n^2$.
$f'(x)=(2x_1,\cdots,2x_n)$. 于是只要 $x\neq0$, 就有 $\operatorname{rank} f'(x)=1$. 所以对任意的 $r>0$. $f^{-1}(r^2)$ 都是流形, 它的维数是 $n-1$. 即 $S^{n-1}_{(r)}$.

② 设 $R>r>0$. $f(x,y,z)=\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+z^2-r^2$.
$M=f^{-1}(0)$. 则在M上 $x^2+y^2\neq0$. (否则 $z^2<0$).

$$f'=(f_x,f_y,f_z)=\left(2(\sqrt{x^2+y^2}-R)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 2(\sqrt{x^2+y^2}-R)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 2z\right)$$

于是 f' 的每分量都连续. 且有 $f_x^2+f_y^2+f_z^2=4r^2\neq0$. 所以M是流形. 它实际上就是前面用参数方程给出的环面. (若 $R<r$. 则 x^2+y^2 可以为零. 此时 f' 不连续. $f^{-1}(0)$ 含有坏点, 所以不是流形)

③ 设 $M_n(\mathbb{R})$ 是n阶实矩阵全体构成的 $\mathbb{R}^{n^2}$. $\det: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 是行列式运算. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$. a_{ij} 可视为 $M_n(\mathbb{R})$ 上的坐标. 习题课上曾证明过 $\frac{\partial\det A}{\partial a_{ij}}=A_{ij}$. 所以. 若对 $\forall i,j$ $\frac{\partial\det A}{\partial a_{ij}}=0$. 由Laplace展开可知 $\det A=0$. 所以, $\forall b\in\mathbb{R}$. $b\neq0$ 都是det的正则值. 特别地. $SL(n,\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid\det A=1\}$ 是一个流形, 维数是 n^2-1.

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}.$$ →

S ← n阶对称阵

④ $f: M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ $A \mapsto A^TA$. $M = f^{-1}(I)$.

首先求 $f'(A): M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ 根据定义 方向导数的

$$f'(A)(X) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+tX)-f(A)}{t} = A^TX + X^TA.$$ （注意 $f'(A)(B)$ 总是对称的）

现在对于任意 $Y \in S_n(\mathbb{R})$. 若取 $X = \frac{1}{2}AY$. 则有

$$f'(A)(X) = A^T(\tfrac{1}{2}AY) + \tfrac{1}{2}Y^TA^TA = \tfrac{1}{2}(Y+Y^T) = Y.$$ 所以 $f'(A)$ 是满射. 于是 I 是

f 的正则值, 所以 $f^{-1}(I)$ 是流形. 这就是正交群 $O(n)$ 若 $A^TA=I$.

则 $\det A = \pm 1$. 所以 $O(n)$ 有两个连通分支, 其中 $\det = 1$ 的记为 $SO(n)$.

设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 k 维流形. $x_0 \in M$. 则有 x_0 的开邻域 U 以及微分同胚 $\varphi: U \to I_\varepsilon^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t_i| < \varepsilon\}$ 使 $\varphi(M \cap U)$ 由 $\{t_{k+1}=0, \dots, t_n=0\}$ 给出. 设 φ 的具体形式为

$t_1 = \varphi_1(x_1 \cdots x_n), \cdots, t_n = \varphi_n(x_1 \cdots x_n)$. 则 $M \cap U$ 可由方程 $\varphi_{k+1}(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots, \varphi_n(x_1 \cdots x_n) = 0$ 给出. 另一方面, 设 ψ 是 φ 的逆映射. 其坐标形式为 $x_1 = \psi_1(t_1 \cdots t_n), \cdots, x_n = \psi_n(t_1 \cdots t_n)$. 则 $M \cap U$ 由如下参数方程给出: $\tilde{\psi}: (t_1 \cdots t_k) \mapsto x_1 = \psi_1(t_1, \cdots, t_k, 0, \cdots 0), \cdots,$

$x_n = \psi_n(t_1 \cdots t_k, 0, \cdots, 0)$.

$t_0 = 0$?

对于一点 $x_0 = \tilde{\psi}(t_0)$, 以及 t_0 附近的 t, 我们有

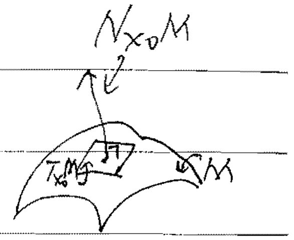
$$x = \tilde{\psi}(t) = x_0 + \tilde{\psi}'(t_0)(t-t_0) + o(\|t-t_0\|).$$

练习：验证：切空间的定义与(U,φ)的选取无关. →

$T_{x_0}M$的基可选为 $\psi'(t_0)(e_l)$ $(l=1\cdots k)$, →

即 $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_l},\cdots,\frac{\partial x_n}{\partial t_l}\right)$

法空间的基可选为 $\nabla\varphi_i$ $(i=k+1,\cdots,n)$.



这样的M叫超曲面. →

例如球面 $f'=(f_x,f_y,f_z)$. $f_x^2+f_y^2+f_z^2=4r^2$. 所以可选法向量 $n=\frac{f'}{2r}$.

若M是$\mathbb{R}^n$中的紧致超曲面. $G: M\to S^{n-1}$, $x\mapsto\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ 叫做Gauss映照. 它是微分几何中的重要对象. 可以用来定义曲率等几何量.

~~[illegible]~~ →

若忽略高阶项，则得一k维超平面的参数方程 记为$T_{x_0}M$

$x=x_0+\psi'(t_0)(t-t_0)$, 它叫M在x_0处的切空间

它也可写为 $x=x_0+\psi'(t_0)(t_1,\cdots,t_k,\overbrace{0\cdots0}^{n-k个})$. 注意 $\psi'(t_0)$ 与 $\varphi'(x_0)$ 互为正交关系. 所以它又可写为 $(\varphi'(x_0)(x-x_0))_i=0$, $i=k+1,\cdots,n$.

即
$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial x_1}(x_0)(x-x_0)_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial x_n}(x_0)(x-x_0)_n=0\\ \vdots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(x_0)(x-x_0)_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x_0)(x-x_0)_n=0.\end{cases}$$

或写为 $(\nabla\varphi_i)\cdot(x-x_0)=0$, $i=k+1,\cdots,n$. 所以若 $x\in T_{x_0}M$. 则 $\xi=x-x_0$ 总和 $\nabla\varphi_i$ $(i=k+1,\cdots,n)$ 垂直. 记 $\mathrm{Span}(\nabla\varphi_{k+1},\cdots,\nabla\varphi_n)$, 它称为M在$x_0$处的法空间, 记为$N_{x_0}M$.

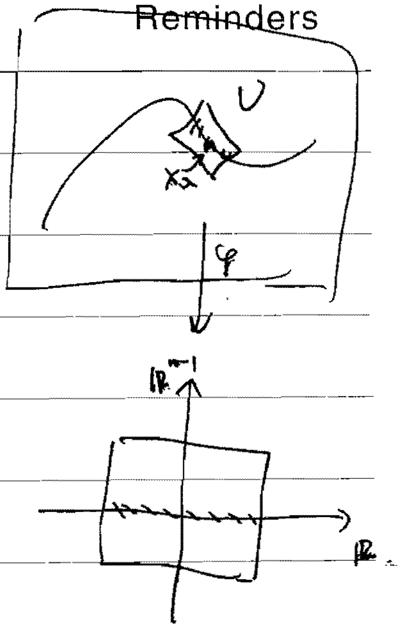
例：若M由一个函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$定义 $M=f^{-1}(0)$. 则切空间即超平面 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-x_0)_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x-x_0)_n=0$. 法空间则为 $\mathbb{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

所以f的梯度向量即M的法向量. 因为∇f在M上处处非零. 所以总可将其归一化：$n=\nabla f/\|\nabla f\|$, 得到M上的单位法向量.

~~若M由两个或更多函数确定，则法空间不止一维. 此时M上不一定有处处非零的法向量构成的基. 这样的M是不可定向的.~~

：下面考虑一维流形：$M\subseteq\mathbb{R}^n$. C^1. $\dim M=1$.

假设M连通



根据定义，对 $\forall x_0 \in M$ 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U，以及微分同胚 $\varphi: U \to I_\varepsilon^n$.
使 $\varphi(M\cap U)=\{t_2=0,\cdots,t_n=0\}$.
于是 $M\cap U$ 可写为参数方程形式
$x_1=\psi_1(t_1),\cdots,x_n=\psi_n(t_n)$.
因为 φ 是微分同胚，ψ 是它的逆，所以
$(\psi_1'(t),\cdots,\psi_n'(t))$ 恒不为零。若记
$f:(-\varepsilon.\varepsilon)\to M$, $t\mapsto(\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t))$ 则有 $\|f'(t)\|\neq 0$.
根据上学期积分学的有关结论，$f((t_0,t))$ 的长度可按如
下式计算：$S(t)=\int_{t_0}^{t}\|f'(t)\|dt$. 特别地，$S'(t)=\|f'(t)\|\neq 0$.
所以由反函数定理，存在反函数 $t=h(s)$. 设 $f((-\varepsilon,\varepsilon))$ 为
长度为 l. 则可重新取参数化 $\tilde{f}:(0,l)\to M$
这样的参数化总满足 $\|\tilde{f}'\|=1$. 称为 $s\mapsto f(h(s))$.
弧长参数化。

引理1：设 $f: I\to M$, $g: J\to M$ 是 M 的两个弧长参数化，
则 $N=f(I)\cap g(J)$ 至多有两个连通分支.
证明：$f: I\to f(I)$ 和 $g: J\to g(J)$ 都是微分同胚，所以
N 是 M 中的开集. $f^{-1}(N)$ 则是 I 中的开集. 于是是一些开
区间的不交并. 设 p 是 $f^{-1}(N)$ 的一个端点. 若 $p\in I$. 取 $f^{-1}(N)$ 中

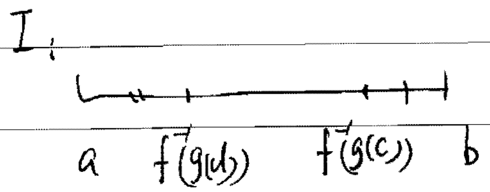
的单调点列$\{P_k\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P$. 则$\{g^{-1}\circ f(P_k)\}$是J中的单调点列. 设$q=\lim\limits_{k\to\infty} g^{-1}(f(P_k))$. 若$q\in J$. 则

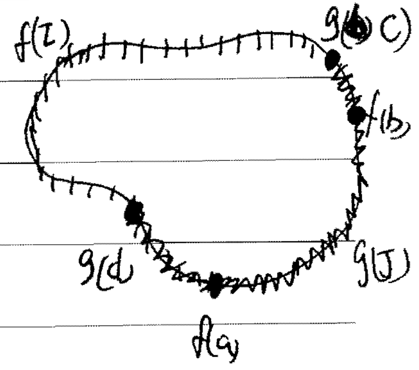
$$g(q)= g\left(\lim_{k\to\infty} g^{-1}(f(P_k))\right)=\lim_{k\to\infty} f(P_k) = f(P).$$

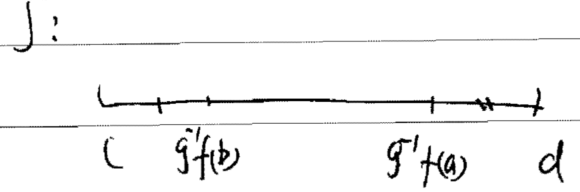
于是$f(P)$(或$g(q)$)是N的内点. 这与P是$f^{-1}(N)$的边界点矛盾, 所以$q\notin J$. 于是$q\in\partial J$. 但J是区间. 所以q必是J的两端点之一. 所以我们可知, 要么P是I的端点. 要么$g^{-1}f(P)$是J的端点. 因为I. J一共只有4个端点. 所以 N 至多只有两个连通分支.

引理2: 条件同前. 若N有两个连通分支. 则M 微分同胚于S^1.

证明: 由前一引理的讨论可知. $f(I)$的端点一定在$g(J)$的内部, $g(J)$的端点也在 $f(I)$的内部. 于是 $f(I)\cup g(J)$是闭集. 它同时也是开集. 所以必有$M=f(I)\cup g(J)$.







如图, 易知 M 的总长度为 $L = b-a+g^{-1}f(a)-g^{-1}f(b)$

定义映射 $h: S^1 \to M$

$$\theta \in [0,2\pi] \mapsto \begin{cases} f(a+t) & 0 \le t \le b-a \\ g(a+c-f^{-1}g(c)+t) & b-a \le t \le L \end{cases}$$

$t = \frac{\theta}{2\pi} \cdot L$

易知 h是微分同胚. □

~~引理3. 若M不同胚于S^1, 则对任意 $f: I \to M$, $g: J \to M$, $f(I) \cap g(J)$ 至多~~

引理3. 条件同前, 若 $f(I) \cap g(J)$ 只有一个连通分支, 则可将它们合并为一个更大的弧长参数化 $F: K \to f(I) \cup g(J)$.

证明: 与引理2同理, 略.

定理: 一维连通流形一定微分同胚于 (0,1) 或 S^1.

证明: 若 M 不微分同胚于 S^1, 则任意 $f(I) \cap g(J)$ 至多只能有一个连通分支, 将这样的 $f(I)$ 不断合并成更大的参数化, 则可得一个最大的弧长参数化 $f: I \to M$. 若 f 弧长 是满射, 则 M 微分同胚于 [illegible]. ~~若 $x \in M \setminus f(I)$, 在 x 附近取一个弧长参数化 $g: J \to M$, 若 $f(I) \cap g(J)$ 有一个连通分支, 则可得更大的参数化. 矛盾. 若有两个连通分支, 则~~

若不是满射，取 $f(I)$ 在 M 中的边界点 p，因为 $f(I)$ 开，所以 $p \notin f(I)$。取 p ~~附近~~ p 附近的弧长参数化 $g: J \to M$，则 $N = f(I) \cap g(J)$ 非空（因为 p 是边界）若 N 有一个连通分支，则 f 不是最大。若有两个则 $M \cong S^1$，都矛盾。 $\square$

2维流形的分类：$\overset{代数}{}$拓扑~~学~~（基本群或同调群），

3维流形的分类：Poincaré 猜想，几何化猜想，……

4维及以上流形的分类：mission i'm possible！

~~定义：$M \subseteq \mathbb{R}^n$ 叫做 k 维带边流形，如果对 $\forall x_0 \in M$，$\exists U \overset{开}{\subseteq} \mathbb{R}^n$，$x_0 \in U$，以及 $\varphi: U \to I^n_\varepsilon$，使得 $\overset{\varphi(x_0)=0且}{\varphi(M \cap U)}$ 正好是 I^n_ε 中满足 $\{t_{k+1}=0, \dots, t_n=0\}$ 或 $\{t_k \geq 0, t_{k+1}=0, \dots, t_n=0\}$ 的点构成的集合。~~

~~若 $\varphi(M \cap U) = \{t_k \geq 0, t_{k+1}=0, \dots, t_n=0\}$ 则称 x_0 是 M 的一个边界点。M 的边界点的全体构成的集合记为 ∂M，称为 M 的边界~~

~~练习：∂M 是一个 $k-1$ 维流形。~~

~~例：$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$，则 $\partial B = S^{n-1}$。~~

~~若M是带边流形，则 $M-\partial M$ 是通常的流形.~~

~~定理：一维$\overset{\text{连通}}{\text{带}}$边流形同胚于以下四种之一：~~

~~S^1, (0.1), $[0.1)$, $[0.1]$~~

~~特别地，若M是紧致一维带边流形，则 ∂M $\overset{\text{一定}}{\text{有}}$偶数个点~~

~~引理：若M是紧带边流形，则不存在光滑映射 $f: M\to\partial M$，使得对 $\forall x\in\partial M$ $f(x)=x$.~~

~~证明：假设存在这样的f. 取 $y\in\partial M$ 是f的一个正则值，则 $f^{-1}(y)$ 是一维紧致带边流形. 它的边界一定在~~

§6.7 极值问题.

设 $f: D\to\mathbb{R}$ 连续可微. $x_0\in D$ 是f的极值点，则由 Fermat 引理，$f'(x_0)=0$. 于是 x_0 是f的临界点.

定义：设 $f\in C^2(D)$. $x_0\in D$ 是f的临界点，若矩阵 $H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)\right)$ 非退化，则称 x_0 是f的非退化临界点. H称为f在 x_0 处的Hesse矩阵.

H的$\overset{\text{负}}{\text{正}}$特征值个数叫做$\overset{\text{负}}{\text{正}}$惯性指数，分别记为 p.q.

显然有 $p+q=n$. q 也叫 f 在p处的指标，记为 $\text{ind}_f(x_0)$.

先讲 C^2 版用Peano余项的判据更好 →

$$f\circ\varphi^{-1}(z_1,\cdots,z_n)=f(x_0)-z_1^2-z_2^2-\cdots-z_q^2+z_{q+1}^2+\cdots+z_n^2. \rightarrow$$

$D\subseteq\mathbb{R}^n$ 开

定理(Morse) 设 $f\in C^3(D)$. $x_0\in D$ 是 f 的非退化临界点. 则存在 x_0 的开邻域U, 以及微分同胚 $\varphi: U\to I^n_\varepsilon$, 使得 ~~$f\circ\varphi^{-1}(y_1,\cdots,y_n)=f(x_0)-y_1^2-\cdots-y_q^2+y_{q+1}^2+\cdots+y_n^2$~~.

证明: 为书写方便. 不妨假设 $x_0=0$. $f(x_0)=0$. 由 Hadamard引理,

$$f(x)=\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_{ij}(x)x_ix_j.$$ 其中 $h_{ij}\in C^1(D)$.

不妨设 $h_{ij}=h_{ji}$ (若不然. 取 h_{ij} 为 $\frac{1}{2}(h_{ij}+h_{ji})$) 因 $h_{ij}(0)+h_{ji}(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(0)$.

于是有 $h_{ij}(0)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(0)$. 下面使用归纳法. 设 $\varepsilon_i=\pm1$, 假设已经证明存在坐标变换使 f 在新坐标 $(y_1\cdots y_n)$ 下具有形式

$$f(y)=\varepsilon_1y_1^2+\cdots+\varepsilon_{r-1}y_{r-1}^2+\sum_{i,j\geq r}h_{ij}(y)y_iy_j.$$ 此时

$$Hf(0)=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&&&\\&\ddots&&\\&&\varepsilon_{r-1}&\\&&&(h_{ij}(0))\end{pmatrix}$$ 所以 $\det(h_{ij})\neq0$. 若 $h_{rr}=0$. 则一定有某个 $r<s\leq n$ 使 $h_{rs}\neq0$. 做坐标变换 $(y_r,y_s)\mapsto(y_r+y_s,\ y_r-y_s)$ 可使新的 $h_{rr}\neq0$. 所以我们总可假设 $h_{rr}\neq0$. 于是存在 0 的邻域 V_1 使 h_{rr} 在 V_1 上恒不为零

引入坐标变换: $\tilde{y}_i=y_i\ (i\neq r)$.

$$\tilde{y}_r=\sqrt{|h_{rr}|}\left(y_r+\sum_{i>r}\frac{h_{ir}}{h_{rr}}y_i\right),$$ 则

$$\det\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\right)=\frac{\partial\tilde{y}_r}{\partial y_r}=\sqrt{|h_{rr}|}\left(1+\sum_{i>r}\frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{h_{ir}}{h_{rr}}\right)\cdot y_i\right)+\frac{1}{2\sqrt{|h_{rr}|}}\frac{\partial|h_{rr}|}{\partial y_r}\left(y_r+\sum_{i>r}\frac{h_{ir}}{h_{rr}}y_i\right)$$

因为 $|h_{rr}|\neq0$. 所以 上式各项都是连续函数. 于是在 0 的某邻域上

此推论可不用Morse引理，直接通过 Peano 余项的 Taylor 公式证明. 这一版本对 f 的光滑性要求更低.

定理：设 $f \in C^2(D)$. $x_0 \in D$ 是 f 的临界点.

i) 若 $H_f(x_0)$ 正定，则 x_0 是 f 的极小值点.

ii) 若 $H_f(x_0)$ 负定. 则 x_0 是 f 的极大值点

证明：根据 Taylor 公式. 假设 $H_f(x_0)$ 正定.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{1}{2}H_f(x_0)(h,h)+o(\|h\|^2)$$

设 $H_f(x_0)$ 在 $\|h\|=1$ 上的最小值为 m. 则有

$$f(x_0+h)-f(x_0)\geq\frac{1}{2}m\|h\|^2+o\|h\|^2=\left(\frac{m}{2}+o(1)\right)\|h\|^2.$$

当 $\|h\|$ 充分小时. $\frac{m}{2}+o(1)>0$. 于是 $f(x_0)$ 是极小值.

若 $H_f(x_0)$ 负定. 考虑 $-f$ 即可. □

若 $H_f(x_0)$ 不定. 则 x_0 不是极值点 (略).

ind=0 的 H 称为正定. ind=n 的称负定.

0<ind<n 的称不定.

有最大值. 于是当 $\|y\|$ 充分小时. $\det\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial y}\right)\simeq\sqrt{|h_{rr}|}>0$.

所以存在 y_0 的更小的邻域 V_2, 使 $y\mapsto\tilde{y}$ 是微分同胚.

另一方面,

$$f(y)=\varepsilon_1\tilde{y}_1^2+\cdots+\varepsilon_{r-1}\tilde{y}_{r-1}^2+h_{rr}y_r^2+2\sum_{i>r}h_{ir}\tilde{y}_iy_r+\sum_{i,j>r}h_{ij}\tilde{y}_i\tilde{y}_j$$

其中 $h_{rr}y_r^2+2\sum_{i>r}h_{ir}\tilde{y}_iy_r=\frac{h_{rr}}{|h_{rr}|}\tilde{y}_r^2-h_{rr}\left(\sum_{i>r}\frac{h_{ir}}{h_{rr}}y_i\right)^2$, 代入可得

$$f(\tilde{y})=\varepsilon_1\tilde{y}_1^2+\cdots+\varepsilon_r\tilde{y}_r^2+\sum_{i,j>r}\tilde{h}_{ij}\tilde{y}_i\tilde{y}_j,$$ 其中 $\varepsilon_r=\frac{h_{rr}}{|h_{rr}|}$.

所以 f 一定可以写成 $f(z)=\varepsilon_1z_1^2+\cdots+\varepsilon_nz_n^2$ 的形式.

最后我们仍需证明 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ 中 -1 的个数就是 H 的负特征值的个数. 设 $D=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}\right)(0)=\begin{pmatrix}2\varepsilon_1&&\\&\ddots&\\&&2\varepsilon_n\end{pmatrix}$. $H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0)\right)$.

$P=\frac{\partial z_j}{\partial x_i}$. 由链式 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^k\partial z^l}\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\frac{\partial z^l}{\partial x^j}+\frac{\partial f}{\partial z^k}\cdot\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\partial x^j}$

以及 $\left.\frac{\partial f}{\partial z_k}\right|_{z_0}=0$ 可知 $H=P^TDP$. 接下来由线性代数中二次型的有关理论可知 H 和 D 的正负特征值个数相同. □

推论: 条件同前, 若 $\mathrm{ind}_f(x_0)=0$. 则 x_0 是 f 的极小值. 若 $\mathrm{ind}_f(x_0)=n$. 则 x_0 是 f 的极大值. 若 $0<\mathrm{ind}_f(x_0)<n$. 则既非极大又非极小.

例 假设已知 $y=ax+b$. 测得数据点 $(y_1,x_1)\cdots(y_n,x_n)$ 求 a,b 的估值

$$f(a,b)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2 \qquad (x_i \neq x_i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)b-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)a+nb-\sum_{i=1}^{n}y_i=0.$$

$$\det = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2>0.$$ 所以有唯一解.

$$Hf=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{pmatrix}$$ 正定. 所以这个唯一解就是极小值点.

□.

注：若 H 不是非退化的. 则 f 在 x_0 附近可以有非常坏的性质. 奇点理论研究的就是这类映射的性质.

~~例：假设已知某物理量 y 线性依赖物理量 x. $y=ax+b$. 实验测得一批数据点 $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$. 要求 a,b 的估计.~~

~~设 $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$. 我们要找 a,b 使 f 最小.~~

~~$\frac{\partial f}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0$, $\frac{\partial f}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0$~~

~~例：假设已知物理量 y 线性依赖物理量 $x_1\cdots x_n$.~~

~~$y=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b$.~~

~~现有数据点 $(y_1, x_{11}, x_{12},\dots,x_{1n})$~~
~~$(y_2, x_{21}, x_{22},\dots,x_{2n})$~~
~~$\vdots$~~
~~$(y_m, x_{m1}, x_{m2},\dots,x_{mn})$.~~

~~求 $a_1,a_2,\dots,a_n,b$ 的估计.~~

~~定义 $f(a_1,\dots,a_n,b)=\sum_{i=1}^{m}(a_1x_{i1}+\cdots+a_nx_{in}+b-y_i)^2$.~~

下面考虑条件极值.

有时我们并不关心 M 以外的点处的函数值 → 即 f 仅定义在 M 上. 若 M 是 k 维流形. 我们可按如下方式定义 $f: M \to \mathbb{R}^n$ 的光滑性.

~~定义: 设 $M \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个 k 维流形, $f: M \to$~~

定义: 设 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个 k 维 C^p 流形 $N \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个 l 维 C^p 流形 $f: M \to N$. 对任意 $x_0 \in M$. 设 $y_0 = f(x_0) \in N$. 取 x_0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域 U, 以及 C^p 微分同胚 $\varphi: U \to I^n_\varepsilon$. 取 y_0 在 $\mathbb{R}^m$ 中的开邻域 V. 以及 C^p 微分同胚 $\psi: V \to I^m_\delta$. 由流形定义, $\varphi(M \cap U) = I^k_\varepsilon$ $\psi(N \cap V) = I^l_\delta$. 于是存在映射 $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: I^k_\varepsilon \to I^l_\delta$. 若对任意 $x_0 \in M$. 如此定义的 $\tilde{f}$ 都是 I^k_ε 到 I^l_δ 的 C^p 映射. 则称 f 是从 M 到 N 的 C^p 映射

(图见下页)

练习: 上述定义不依赖于图 (U, φ) 和 (V, ψ) 的选取

有了上述定义, 条件极值研究的就是流形上的光滑函数 f $f: M \to \mathbb{R}$ 的极值.

设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$. $f: D \to \mathbb{R}$ 充分光滑, $M \subseteq D$ 是一个 k 维流形. 则可限制 f 到 M 上得 $f|_M: M \to \mathbb{R}$. 设 $x_0 \in M$. 若存在开集 U x_0 的, 使得对 $\forall x \in U \cap M$. 有 $f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0)$, 则称 x_0 是 $f|_M$ 的极大值点 (小). 求 $f|_M$ 的极值点即所谓的条件极值问题.

定理: 若 x_0 是 $f|_M$ 的一个极值点. 则存在常数 $\lambda_1 \cdots \lambda_{n-k}$, 使得 $Df(x_0) = \lambda_1 D\varphi_{k+1}(x_0) + \cdots + \lambda_{n-k} D\varphi_n(x_0)$. 其中 $\varphi_{k+1} \cdots \varphi_n$ 是 x_0 附近 M 的定义方程.

证明: 设 x_0 附近 M 的参数方程为 $x_i = \psi_i(t_1 \cdots t_k)$ $i = 1 \cdots n$. 于是 $f|_M$ 可视为 $t_1 \cdots t_k$ 的函数 $\tilde{f} = f|_M \circ \Psi: (t_1 \cdots t_k) \mapsto f(\psi_1(t_1 \cdots t_k), \ldots, \psi_n(t_1 \cdots t_k))$ $f|_M$ 的条件极值问题转化为 $\tilde{f}$ 的无条件极值问题. 于是有

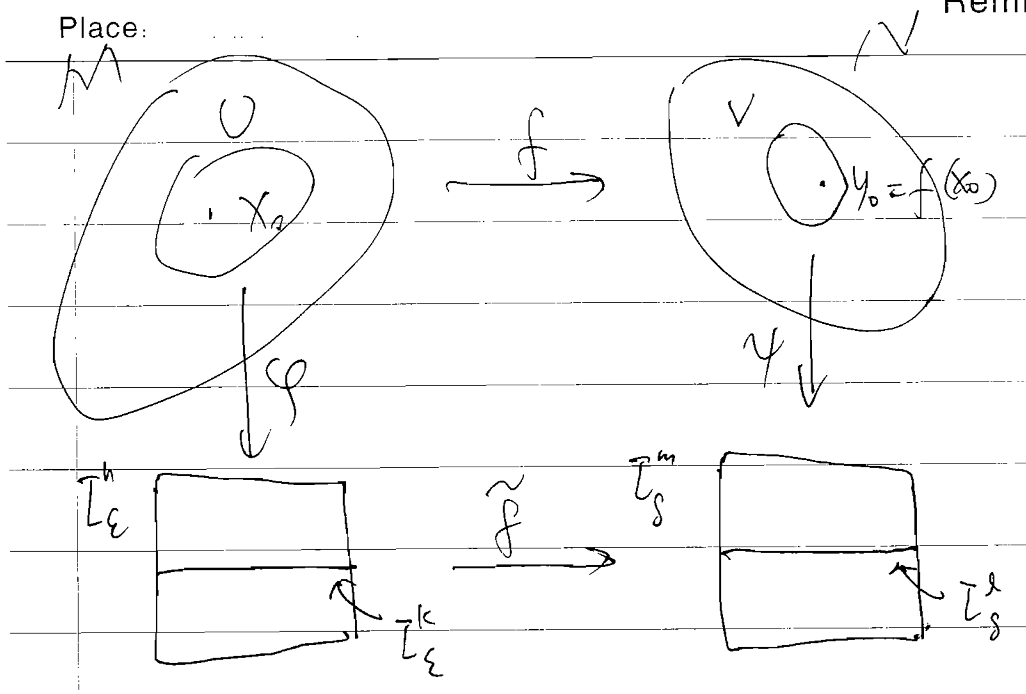
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_l} = 0.$$

注意 $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_l}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t_l}\right)$ $(l = 1 \cdots k)$ 给出切空间 $T_{x_0}M$ 的一组基. 所以上式表明 $\nabla f \in N_{x_0}M$. 于是它可由法空间的基 $\nabla\varphi_{k+1}(x_0), \ldots, \nabla\varphi_n(x_0)$ 线性表出. □

根据上述定理, 要求 $f|_M$ 的极值, 可先将 M 表示为 $\{\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_{n-k}(x) = 0\}$ 然后解方程

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_{n-k} \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_i} & i = 1 \cdots n. \\ \varphi_l(x) = 0, & l = 1, \ldots, n-k. \end{cases}$$

共 n 个 x, n-k 个 λ 需要解. 方程的个数也正好是 2n-k.



解出之后再判断是极大还是极小.或者利用下面的定理.

定理：设 x_0 附近 M 的定义方程为 $\{\varphi_1(x)=0,\dots,\varphi_{n-k}(x)=0\}$ $F(x;\lambda)=f(x)-\lambda_1\varphi_1(x)-\cdots-\lambda_{n-k}\varphi_{n-k}(x)$. x_0 与 $\lambda_1\cdots\lambda_{n-k}$ 满足取极值的必要条件，即 $\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda_\alpha}=0$. $i=1\dots n$. $\alpha=1\dots n-k$.

~~则 x_0 是 $f|_M$ 的极[illegible]小(大)值点~~ 记 $H_F=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j=1\dots n}$

i) 若 $H_F(x_0)$ 正定，则 x_0 是 $f|_M$ 的极小值点.

ii) 若 $H_F(x_0)$ 负定，则 x_0 是 $f|_M$ 的极大值点.

证明：$\frac{\partial F}{\partial t_\alpha}=\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t_\alpha}$. $\frac{\partial^2 F}{\partial t_\alpha\partial t_\beta}=(H_F)_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t_\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial t_\beta}+\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial t_\alpha\partial t_\beta}$.

于是 $\frac{\partial^2 F}{\partial t_\alpha\partial t_\beta}(t_0)=(H_F(x_0))_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t_\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial t_\beta}$, 所以若 $H_F(x_0)$ $\overset{(负)}{\text{正}}$定，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial t_\alpha\partial t_\beta}$ $\overset{(负)}{\text{正}}$定. (此处用到 $\frac{\partial x^i}{\partial t_\alpha}$ 是满秩的. 且 $k\leq n$. 否则不正确 ← 线性代数) □.

例：设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性变换. 求 $\|A\|$.

解：$\|A\|=\max\limits_{\|x\|=1}\|A(x)\|$. 设 $F(x)=x^TA^TAx-\lambda x^Tx$.

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2A^TAx-2\lambda x=0 \\ \|x\|=1\end{cases}$$

⇒ λ是 A^TA 的特征值. x是相应的特征向量.

于是 $\|A(x)\|=\sqrt{x^TA^TAx}=\sqrt{\lambda x^Tx}=\sqrt{\lambda}$. 所以

$\|A\|=\sqrt{\lambda_{\max}}$, $\lambda_{\max}$ 是 A^TA 的最大特征值. □

此处更好的讲法是：设 $y_i = \frac{x_i}{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}$，则 →

$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = 1$. 求证 $y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \le \frac{1}{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}$

接下来再考虑 $M = \{\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = 1\}$.

例：设 $\alpha_i > 0$, $x_i > 0$ $(i = 1, \cdots n)$. 求证

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \le \left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$$

"="成立 $\Leftrightarrow$ $x_1 = \cdots = x_n$

证明：设 $M = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = c\}$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log x_i$. 则

$$F(x;\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log x_i - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - c\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} - \lambda\alpha_i = 0. \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = c \Rightarrow \begin{array}{l} x_i = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \end{array}$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \left(-\frac{\alpha_i}{x_i^2}\delta_{ij}\right) = -\frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

显然负定，所以 $f|_M$ 有极大值. 即

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log x_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \log \frac{c}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad 即$$

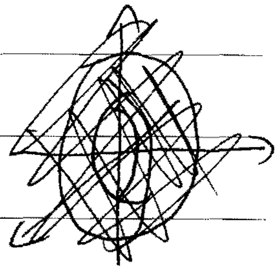
$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \le \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$$

"="成立 $\Leftrightarrow$ $x_1 = \cdots = x_n \left(= \frac{c}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)$. □

条件极值法是证明不等式的利器.

例: ~~$R>r>0$ $M=\{\sqrt{x^2+y^2}$~~ 设 $R>r>0$.

$$M=\{x^2+(\sqrt{y^2+z^2}-R)^2=r^2\}.\quad f=z$$

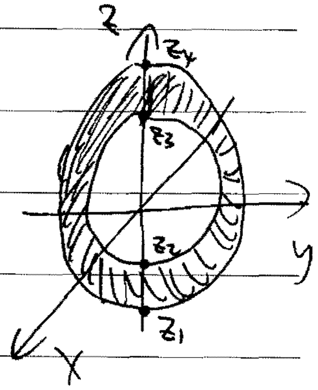


$$F=z-\lambda(x^2+(\sqrt{y^2+z^2}-R)^2-r^2)$$

$$F_x=-2\lambda x.\quad F_y=-2\lambda(\sqrt{y^2+z^2}-R)\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$F_z=1-2\lambda\left(\sqrt{y^2+z^2}-R\right)\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow x=0.\ y=0.\ z=\pm R\pm r.\ \lambda=\frac{\mathrm{sgn}(z)}{2(|z|-R)}$$



$$H_F=\begin{pmatrix}-2\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda\left(\frac{Rz^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right) & -2\lambda\frac{Ryz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ 0 & -2\lambda\frac{Ryz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & 2\lambda\left(\frac{Ry^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right)\end{pmatrix}$$

记 $z_1=-R-r.\ z_2=-R+r.\ z_3=R-r.\ z_4=R+r.$ 则

$$\lambda_1=-\frac{1}{2r}.\ \lambda_2=\frac{1}{2r}.\ \lambda_3=-\frac{1}{2r}.\ \lambda_4=\frac{1}{2r}.$$

$$H_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}&0&0\\0&\frac{1}{R+r}&0\\0&0&\frac{1}{r}\end{pmatrix}.\ H_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{r}&0&0\\0&\frac{1}{R-r}&0\\0&0&-\frac{1}{r}\end{pmatrix}.\ H_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}&0&0\\0&-\frac{1}{R-r}&0\\0&0&\frac{1}{r}\end{pmatrix}.\ H_4=-H_1$$

$=-H_2.$

Date:

Place:

Reminders

$\chi = 1-2+1=0.$ →

$\chi = 1-4+1=-2.$ →

$\chi = 1-1+2=2.$ →

一般地. $\chi = 2-2g$. g是洞的个数.

Date:

Place:

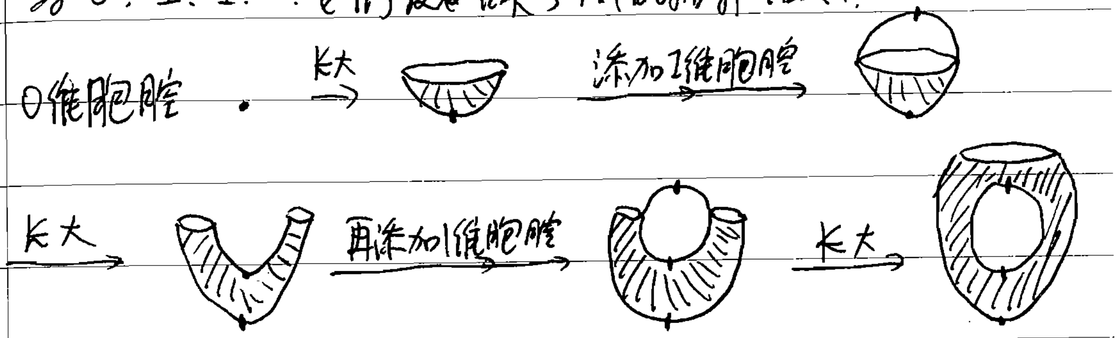
Reminders

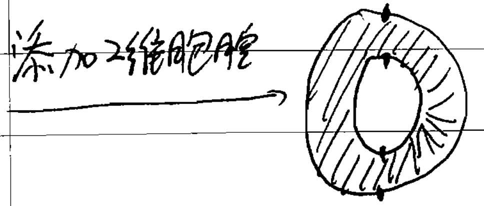
~~→ ind(z_1) = 0. ind(z_2) = 2. ind(z_3) = 1. ind(z_4) = 3.~~

所以z_1是极小值点、z_4是极大值点 z_2、z_3不是极值点.

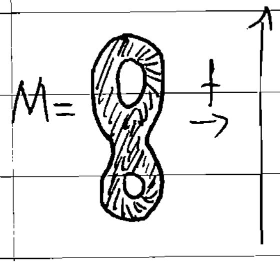
在每个z_i附近可取x、y为局部坐标. $z=\pm\sqrt{(R\pm\sqrt{r^2-x^2})^2-y^2}$

所以也可按无条件极值的方法计算4个Hesse矩阵. 相应的ind为0、1、1、2. 它们反映了M的拓扑信息.



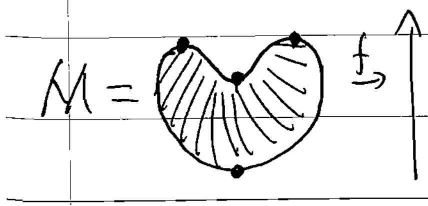


利用流形上函数在临界点处的指数研究流形的拓扑的分支叫Morse理论. 再比如

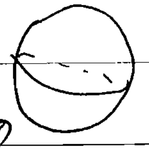


它有6个临界点, 指数分别为0,1,1,1,1,2. 所以先从0维胞腔开始生长, 添加4次1维胞腔, 最后用一个2维胞腔封口.

~~是些代数拓扑不变量. 由维胞腔的个数~~



它有4个临界点 指数分别为0,1,2,2



它和 [上图] 是同胚的, 指数不同. 但χ相同.

两个临界点 指数为 0, 2.

初等性质: $|z| := \|z\| = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$. $\overset{z=a+bi}{\Downarrow}$ $\bar{z} = a-bi$. →

$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$. $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

§6.8 复分析初步.

~~定义~~ 定理: 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义乘法:

$$(a.b)\cdot(c.d) = (ac-bd,\ ad+bc),$$

则 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ 构成一个域. 叫复数域. 记为 $\mathbb{C}$.

证明: 只需验证如下性质:

①交换性: $(a.b)\cdot(c.d) = (c.d)\cdot(a,b)$

②结合性: $((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e.f) = (a.b)\cdot((c,d)\cdot(e.f))$.

③有单位: 设 $\mathbb{1} = (1.0)$. 则 $\mathbb{1}\cdot(a.b) = (a.b)$.

④有逆: 对于 $z=(a.b)$ 取 $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. 则有

$$z\cdot z^{-1} = \mathbb{1}.$$ □.

引理: 方程 $z^2+1=0$ 在 $\mathbb{C}$ 中有解 $z=(0,\pm1)$.

证明: $(0.1)\cdot(0.1) = (-1.0)$ □.

~~更一般地我们~~ 记 $i=(0.1)$. 则任一 $(a.b)$ 可记为

$(a.b) = a\cdot\mathbb{1} + b\cdot i =: a+bi$. 相应的乘法则可按如下方式计算: $(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2$

$$= (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

这正是我们熟悉的复数运算法则

当 $z \to z_0$ 时, $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|)$. $\Leftrightarrow$

在 $\mathbb{C}$ 上, $\mathbb{R}^2$ 中的向量可以相乘相除, 所以可以像 $\mathbb{R}$ 上一样定义复导数或复可微的概念.

定义: 设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的区域. $f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. 若极限 $A = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在. 则称 f 在 z_0 复可微. A 记为 $f'(z_0)$. 若对 $\forall z_0 \in D$, $f'(z_0)$ 存在. 则称 f 是 D 上的全纯 (或解析) 函数.

定理: 将 $f: D \to \mathbb{C}$ 记为 $\overset{x+iy}{~} \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$, 则 f 在 D 上全纯 $\Leftrightarrow$ $u, v: D \to \mathbb{R}^2$ 可微且满足 Cauchy-Riemann 方程: $u_x = v_y$. $v_x = -u_y$.

证明: 对 $\forall z_0 \in D$. 记 $f'(z_0) = A + iB$. $z - z_0 = h + ik$. f 在 z_0 可微意味着

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|)$. 即

$u(x+h, y+k) + i\,v(x+h, y+k) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$+ (A+iB)(h+ik) + o(\sqrt{h^2+k^2})$, 按分量展开.即

$u(x+h, y+k) = u(x,y) + (Ah - Bk) + o(\sqrt{h^2+k^2})$.

$v(x+h, y+k) = v(x,y) + (Bh + Ak) + o(\sqrt{h^2+k^2})$.

$J = |f'(z_0)|^2$ →

这说明u可微. 且 $u_x = A$. $u_y = -B$. v可微且 $v_x = B$. $v_y = A$. 所以有C-R方程. 反之. 若u. v可微且满足CR方程. 将上述推导反推回去即得f的复可微性. □

事实上. 函数的解析性可以在更弱的条件下被证明. 这方面最强的定理是Looman-Menchoff定理: 若 $f: D \to \mathbb{C}$ 连续. u_x, u_y, v_x, v_y 存在且满足CR方程. 则f解析. 它的证明需要更多实分析和复分析的工具. 目前我们无法证明它.

根据上述定理. $f'(z_0) = A + iB = u_x + iv_x = v_y - iu_y$. 特别地, 若考虑 $(x.y) \longmapsto (u.v)$ 的Jacobi行列式, 则有

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = A^2 + B^2 \geq 0.$$

所以J恒大于零. 若考虑f'的秩. 则可知rank f'只能为2或者0. (若 $(A.B) \neq (0.0)$. 则rank为2. 若 $A = B = 0$. 则rank $f' = 0$), 绝不能为1. 根据秩定理. (粗略地说) 解析函数将区域映为2维或0维对象. 即区域或点. 绝不可能为线. 这一结果的严格表述叫开映射定理. 我们因为暂时缺少一些复分析中的高级的工具 (复积分. 幂级数), 所以目前只能证明多项式情形的开映射定理.

$D \subseteq \mathbb{C}$ 区域

定理：设 $f: D \to \mathbb{C}$ 解析，$z_0 \in D$，若 $f'(z_0) \neq 0$，则存在 z_0 的开邻域 U，w_0 的开邻域 V，使得 $f: U \to V$ 是微分同胚，且 $f^{-1}: V \to U$ 也是解析的

证明：$J = |f'(z_0)|^2 > 0$。由反函数定理知 U, V 的存在性以及 f^{-1} 的存在性，可微性，且有 $(f^{-1})' = (f')^{-1}$。设 $f' = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$，则 $(f^{-1})' = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$，即满足 C-R 方程。

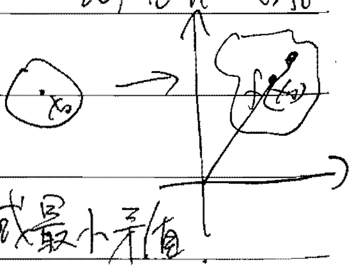
所以 f^{-1} 解析 □

$\subseteq \mathbb{C}$ $\subseteq \mathbb{C}$

若微分同胚 $f: U \to V$ 满足 f 和 f^{-1} 都解析，则称 U 和 V 解析同构（或全纯同构、全纯等价）。

推论：设 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是非常数多项式，$D \subseteq \mathbb{C}$ 是一个区域，则 $|f|$ 在 $\bar{D}$ 上的最大值和最小值必在 ∂D 上取到。

证明：设 $x_0 \in D$，~~[illegible]~~ $|f|$ 在 x_0 处达到最大值（或最小值），取 $\delta > 0$ 使 $B_\delta(x_0) \subseteq D$。则由开映射定理，$f(B_\delta(x_0))$ 是包含 $f(x_0)$ 的开集 U，于是存在 $y \in U$，使 $|y| > |y_0|$（或 $|y| < |y_0|$），于是存在 $x \in B_\delta(x_0)$，$f(x) = y$，这与 $|f(x_0)|$ 最大或最小矛盾。



□

定理：设 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是非常数多项式，则 ~~[illegible]~~ f 是一个开映射。~~[illegible] $f(D)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的区域~~

~~[illegible]~~

~~$\{z: |z| \leq r\}$~~

~~把 $B_r(0)$ 映为一个圆盘~~

~~引理1. 对于 $m \geq 1$，$f: B_r(0) \to \mathbb{C}$，$z \mapsto z^m$ [illegible]。~~

~~证明：设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则 $z^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$。显然 $f(B_r(0)) = B_{r^m}(0)$。[illegible] □~~

~~引理2. 对于 $m \geq 1$，$g: D \to \mathbb{C}$，$z_0 \in D$，$g(z_0) \neq 0$，w_0 是 $g(z_0)$ 的一个 m 次根（即 $w_0^m = g(z_0)$），则存在 z_0 的开邻域 U，w_0 的开邻域 V 以及全纯同构 $h: U \to V$，使得对 $\forall z \in U$，$(h(z))^m = g(z)$。~~

~~证明：考虑 w_0 的开邻域 V_1 到 $g(z_0)$ 的开邻域 V_2 的映射 $f: V_1 \to V_2$，$w \mapsto w^m$。因为 $f' = m w^{m-1} \neq 0$，所以可适当缩小 V_1, V_2，使 f 是一个全纯同构。[illegible] $U = g^{-1}(V_2)$~~

~~$V = V_1$，$h = f^{-1} \circ g$，则 h 即是所求~~ ~~因为 g~~

~~证明：我们将证明，对 $\forall z_0 \in D$，设 $w_0 = f(z_0)$，则存在 z_0 的开邻域 U，以及 w_0 的开邻域 V，使 $f(U) \supseteq V$。（对 D 的任何开子集 D'，设 $w_0 \in f(D')$，则存在 $z_0 \in D'$，使 $w_0 = f(z_0)$，对 z_0, w_0 应用上述结论，则有 $U \ni z_0$，$V \ni w_0$ 使 $f(U) \supseteq V$，于是~~

证明：对任一多项式 $f(z)$，以及 $z_0\in D$，存在 $m\geq 1$，使
$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)^m g(z)$，且 $g(z_0)\neq 0$。这个 m 叫 f 在 z_0 处的重数。
若 $m=1$，则 $f'(z_0)=g(z_0)\neq 0$，于是 f 在 z_0 附近是解析同构（反函数定理）所以显然是开映射。若 $m>1$，设 $g(z_0)=w_0\neq 0$
ξ_0 是 w_0 的一个 m 次根。注意映射 $\varphi:\xi\mapsto\xi^m$ 在 $\xi=\xi_0$ 附近满足 $\varphi'(\xi)=m\xi^{m-1}\neq 0$，于是 φ 在 ξ_0 附近是解析同构，于是可定义 $\varphi^{-1}: z\mapsto z^{\frac{1}{m}}$ 记 $h=\varphi^{-1}\circ g$，则 f 可写为
$f(z)=f(z_0)+((z-z_0)h(z))^m$ 记 $F(z)=(z-z_0)h(z)$，则 $F(z_0)=h(z_0)\neq 0$。
于是 F 在 z_0 附近也是解析同构，所以也是开映射。最后，只需证明 $\varphi: z\mapsto z^m$ 是开的。设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 $\varphi(z)=r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)$。所以它将 $B_r(0)$ 映为 $B_{r^m}(0)$。所以是开的。因此 f 将任何开集映为开集。 □

推论（代数基本定理）设 f 是非常数多项式，则存在 $z_0\in\mathbb{C}$，使 $f(z_0)=0$

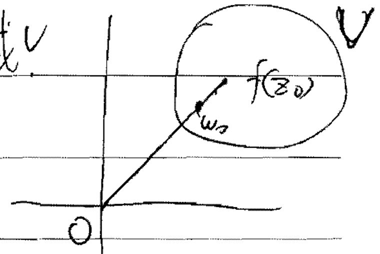
证明：注意 $\lim\limits_{z\to\infty}|f(z)|=\lim\limits_{z\to\infty}|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0|$

$$\geq\lim_{z\to\infty}\left(|a_n|\cdot|z|^n-|a_{n-1}||z|^{n-1}-\cdots-|a_1||z|-|a_0|\right)$$

$$=\lim_{R\to\infty}R^n\left(|a_n|-\frac{|a_{n-1}|}{R}-\cdots-\frac{|a_1|}{R^{n-1}}-\frac{|a_0|}{R^n}\right)=\infty.$$

这两个推论都是代数的，也许可省略 →

所以一定存在 $M>0$，使 $|z|>M$ 时，$|f(z)|>|f(0)|$. 考虑 $|f|: \overline{B}_M(0)\to\mathbb{C}$，它是紧集上的连续函数，于是一定有最小值. 根据 M 的取法，它的最小值一定不在边界 $|z|=M$ 上. 设 z_0 是 $|f(z)|$ 的最小值点. 若 $f(z_0)\neq 0$. 由开映射定理，f 将 z_0 的某开邻域 U 映为 $f(z_0)$ 的某开邻域 V. 连接 0 和 $f(z_0)$ 的线段将与 V 交于某点，例如 w_1，它在 V 中，于是存在 $z_1\in U$ 使 $w_1=f(z_1)$. 它显然满足 $|w_1|<|f(z_0)|$，于是 $|f(z_1)|<|f(z_0)|$，这与 $|f(z_0)|$ 最小矛盾. 所以必有 $f(z_0)=0$. □



推论：设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 次多项式，$f(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$. $a_n\neq 0$.
则存在 $z_1\cdots z_n\in\mathbb{C}$. 使 $f(z)=a_n\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$

证明：由代数基本定理，存在 $z_0\in\mathbb{C}$. 使 $f(z_0)=0$、于是，由 Taylor 定理可知 $f(z)=(z-z_0)\cdot g(z)$. 其中 $\deg g=n-1$. 之后对 n 归纳即可. □

推论：设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 次多项式，则存在 $c_1\cdots c_k\in\mathbb{R}$.
$z_1\cdots z_l\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. 使得 $f(z)=a_n\prod_{i=1}^{k}(z-c_i)\prod_{j=1}^{l}(z-z_j)(z-\overline{z_j})$.

若设 $z_j=a_j+ib_j$ $(j=1\cdots l)$ 则

$$f(z)=a_n\prod_{i=1}^{k}(z-c_i)\prod_{j=1}^{l}\left(z^2-2a_iz+(a_i^2+b_i^2)\right).$$

利用这些结论不难证明上学期关于实系数有理函数的部分分式展开定理.（此处略，因为是纯代数问题）

期中考试题：（备选）

(15分) 1. 设E是$\mathbb{R}^n$的一非空子集，求证：

i) 若E道路连通，则E连通. (7分)

ii) 若E是连通开集，则E道路连通. (8分)

(15分) 2. 设X是$\mathbb{R}^n$中的紧集，$f: X\to\mathbb{R}^m$是连续的单射，记$Y=f(X)$

求证：f的逆映射$f^{-1}: Y\to X$连续.　（送分题？）

(15分) 3. 设$f(x)=x^2+px+q$. 已知当$(p,q)=(p_0,q_0)$时 $f(x)=0$ 有两个不等的实根$x_1<x_2$.

i) 求证：存在(p_0,q_0)在$\mathbb{R}^2$中的开邻域U，以及C^∞映射 $g: U\to\mathbb{R}^2$, $(p,q)\mapsto(u(p,q),v(p,q))$，使得对$\forall p,q\in U$

$f(u(p,q))=f(v(p,q))=0$. 且$u(p_0,q_0)=x_1$. $v(p_0,q_0)=x_2$.

(10分)(5分)

~~i) 求证：$\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2} = 4\sqrt{a^4-b^4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$~~ (5分)

~~$\|\nabla f\|^2 = 4\sqrt{a^4-b^4}\|x\|$.~~

~~ii) 求证：$M = f^{-1}$~~

设 $M=f^{-1}(0)$.

i) 求证：~~在M上有~~对于 $p\in M$ $\|\nabla f(p)\| = 4\sqrt{a^4-b^4}\|p\|$. (5分)

ii) 求证：M是$\mathbb{R}^3$中的一个紧致二维流形. (5分)

---

ii) 求 ~~$\det(g'(p,q))$~~ g的Jacobi行列式 $\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\right)$. (5分)(选)

(20分) 4. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto \overset{(u,v)=}{(e^x\cos y,\ e^x\sin y)}$

i) 将$\mathbb{R}^2$视为$\mathbb{C}$. 求证f是一解析函数. (5分)

ii) 求f的Jacobi矩阵 $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ 及其范数$\|J\|$. (8分)

iii) 设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0\}$. 求证：对 $\forall z_1,z_2\in D$ (7分)

$\|f(z_1)-f(z_2)\| < \|z_1-z_2\|$.

(5分) 6. 设 $a>b>0$. $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-2a^2(y^2+z^2-x^2)+b^4$

~~i) 求证：$M=f^{-1}(0)$是$\mathbb{R}^3$中的一个二维流形 紧致~~ ~~(10分)~~

iii) 求高度函数 $H(x,y,z)=z-z_0$ 在M上的极值. (5分).

(20分) 5. 设M是$\mathbb{R}^n$中的流形 $x_0\in\mathbb{R}^n\setminus M$. $f: M\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\|x-x_0\|$.

i) 若M紧, 求证 f可取到最大值和最小值. (5分)

ii) 试举例, 使得f取不到最大值和最小值(只需写出例子,不必证明) (5分)

iii) 设 $x\in M$是f的一个局部极值点, 求证向量$\overrightarrow{xx_0}$垂直于M在x_0处的切空间$T_{x_0}M$. (10分).

(10分) 7. 设 $p,q\in\mathbb{N}$. $p,q\geq 2$. $f: \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$, $(z_1,z_2)\mapsto z_1^p+z_2^q$.

求证：$M=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \mid f(z_1,z_2)=0,\ |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$ 是一个一维流形.

Date:

Place:

Reminders

太复杂. →

~~替换成 d维~~

~~设M是$\mathbb{R}^n$可定向 若有$\omega\in$ 满足~~

~~设D是$\mathbb{R}^n$中区域 $M\subseteq D$是k维流形 若~~

~~$\omega\in$ d~~

~~太复杂~~ →

Date:

Place:

Reminders

期末考试试题(备选).

1. 设 $$\omega = \frac{\left(1-\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(y\,dz\wedge dx + x\,dy\wedge dz) + z\,dx\wedge dy}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2\right)}$$

i) 求证: $d\omega=0$.

ii) 设 $M_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=b^2\}$, 按外法向量赋以$M_1$定向, 求 $\int_{M_1}\omega$ ~~[illegible]~~.

iii) ~~计算 $\int \omega$~~. ((定向同上))

设 $M_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2)^2-2a^2(y^2+z^2-x^2)+b^4=0\}$

求 $\int_{M_2}\omega$. $(a>b>0)$

2. 设 $M=\{((R+\rho\sin\frac{\theta}{2})\cos\theta, (R+\rho\sin\frac{\theta}{2})\sin\theta, \rho\cos\frac{\theta}{2}) \mid 0\le\theta\le 2\pi, -r\le\rho\le r\}$. $(R>r>0)$.

i) 求证: M是一个紧致带边2维流形.

ii) 求证: ∂M是一个紧致连通无边 2维流形.

iii) 设 $\omega=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$. 求 $\int_{\partial M}\omega$. ~~请指定∂M的定向~~ ~~然后~~

iv) 求证: M不可定向. ~~[illegible]~~

要一偏重的

ii) 太难，需要覆盖性质　　i) 可。 →

涉及n维球体积，略难，降维更好。 →

~~改成 $\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^2$ 把~~. 没必要. →

~~$2\pi^2$.~~ →

~~$\frac{2\pi^2}{3}$.~~ →

仍涉及多维球体积，不妥。

3. 设 $I\subseteq\mathbb{R}^n$, $J\subseteq\mathbb{R}^m$ 是两个非退化闭区间.

K 是 $I\times J$ 中的紧集. ~~求证~~ 对于 $x\in I$,

~~① 若K 是Lebesgue零测集~~ 定义

$K_x=\{y\in J \mid (x,y)\in K\}$ 求证

i) 若 K 是 L零测集 则对于几乎所有 $x\in I$,

K_x 是 J 中的 L零测集.

~~ii) 若对几乎所有 $x\in I$, K_x 是J中的L零测集. 则K是L零测集.~~

~~4. 设 $D=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\le 1$~~

~~$n\geq 2$,　　$x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1\}$.~~

~~求 $\mu(D)$.~~

5. 设 D是 $\mathbb{R}^n$ 中区域 $f: D\to\mathbb{R}^m$ C^∞. $q\in\mathbb{R}^m$ 是f的正则

值. $M=f^{-1}(q)$ 求证: M 可定向

~~4. (1) 求 $\mathbb{R}^4$ 中3维单位球面的3维体积, 即 $\mu(M)$, 其中~~

~~$M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$~~

~~(2) 求 $\mathbb{R}^6$ 中如下区域的6维体积 $\mu(D)$.~~

~~$D=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\in\mathbb{R}^6 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\le 1 \wedge x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2\le 1\}$.~~

$\int_{\gamma_1}\omega_1 = \int_0^R e^{-x^2}dx$. $\int_{\gamma_2}\omega_1 = -\int_0^R e^{-(R^2-y^2)}\sin(2Ry)dy$

$\int_{\gamma_3}\omega_1 = -\int_0^R [\cos(2t^2)+\sin(2t^2)]\,dt$ $\Rightarrow I_c+I_s=\boxed{\cdots}$

$\int_{\gamma_1}\omega_2 = 0$. $\int_{\gamma_2}\omega_2 = \int_0^R e^{-(R^2-y^2)}\cos(2Ry)dy$

$\int_{\gamma_3}\omega_2 = -\int_0^R (\sin(2t^2)$ [illegible] $\cos(2t^2))\,dt$ $\Rightarrow I_c=I_s$

$\int_{\gamma_1}\omega = \int_0^R e^{-x^2}dx$. $\int_{\gamma_2}\omega = \int_0^R e^{-(R+iy)^2}i\,dy$

$\int_{\gamma_3}\omega = -\int_0^R e^{-((1+i)t)^2}(1+i)\,dt$.

问题：$\int_0^R e^{-(R^2-y^2)}\sin(2Ry)dy \to 0,\ R\to\infty$.

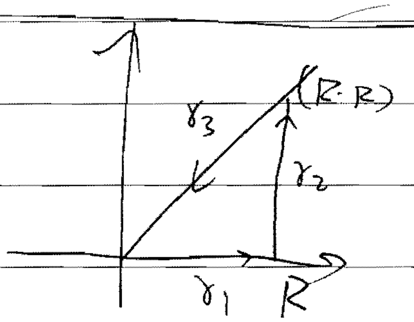
$\int_0^R e^{-(R^2-y^2)}\cos(2Ry)dy \to 0.\ R\to\infty$.

分部积分一次. 然后放缩.

4. 求 $D=\{(x_1,\cdots,x_5)\in\mathbb{R}^5 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le 1,$
$x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\le 1\}$

的体积.

答案：$4\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot 4\pi = \frac{32}{15}\pi$.



Green公式 & 曲线积分：

$\omega = e^{-z^2}dz$

$= e^{-(x^2-y^2)}[\cos(2xy) - i\sin(2xy)](dx+idy)$

$= e^{-(x^2-y^2)}[(\cos(2xy)dx+\sin(2xy)dy)$
$+i(\sin(2xy)dx-\cos(2xy)dy)]$

$\omega_1 = e^{-(x^2-y^2)}[\cos(2xy)dx+\sin(2xy)dy]$

$\omega_2 = e^{-(x^2-y^2)}(\sin(2xy)dx-\cos(2xy)dy)$.

$\gamma_1 = \{(x,0) \mid 0\le x\le R\}$, $\gamma_2 = \{(R,y) \mid 0\le y\le R\}$.

$\gamma_3 = \{(t,t) \mid t: R\to 0\}$.

~~$q_1^2+q_2^2+q_3^2=1.$ $p_1^2+p_2^2+p_3^2=1.$ $p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3=0.$~~

~~$q_1^2+q_2^2+q_3^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2-2(p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3)$~~

~~$\Rightarrow \left(\frac{q_1-p_1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{q_2-p_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{q_3-p_3}{\sqrt{2}}\right)^2=1$~~

~~$\Rightarrow \left(\frac{q_1+p_1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{q_2+p_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{q_3+p_3}{\sqrt{2}}\right)^2=1$~~

~~附加题：设 $M=\{(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^6 \mid$~~

~~$q_1^2+q_2^2+q_3^2=1.$ $p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3=0\}$~~

~~$p_1^2+p_2^2+p_3^2$~~