Date:

Place:

Reminders

若某个 $a_i>b_i$，则 I 为空集，此时可直接规定 $|I|=0$. →

Date:

Place:

Reminders

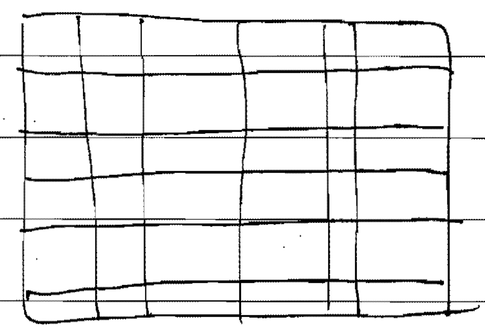
§7. 重积分.

§7.1 Riemann 积分 闭区间上的

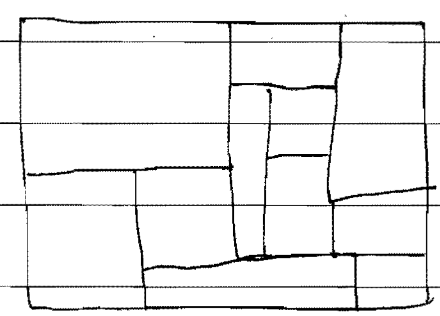
设 $I=[a.b]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭区间，即 $a=(a_1,\cdots,a_n)$. $b=(b_1,\cdots,b_n)$. $a_i\le b_i$. $I=I[a,b]=\{(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i\le x_i\le b_i, (i=1\cdots n)\}$. 定义 $|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$，叫做 I 的测度或 n 维体积. 若 $|I|=0$，则至少有一个 $a_i=b_i$. 这样的 I 叫退化的.

设 $I.J$ 是两个 $\mathbb{R}^n$ 中的闭区间. 则 $I\cap J$ 要么是空集要么也是闭区间. ($I=[a.b]$ $J=[c.d]$. $I\cap J=\{(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_i\le x_i\le b_i \wedge c_i\le x_i\le d_i\}=\{(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \max(a_i.c_i)\le x_i\le \min(b_i.d_i)\}$ 若某个 $\max(a_i,c_i)>\min(b_i.d_i)$. 即某个 $c_i>b_i$ 或 $a_i>d_i$，则 $I\cap J$ 为空集. 否则 $I\cap J$ 为闭区间). 若 $I\cap J$ 是退化闭区间或空集，则称 $I.J$ 是无重叠的.

设 I 是非退化闭区间. 若存在非退化闭区间 $I_1.I_2,\cdots,I_N$. 满足 ① $I=\bigcup_{\alpha=1}^{N} I_\alpha$. ② 对 $\forall\alpha\ne\beta$，I_α，I_β 无重叠. 则称 $\{I_1,\cdots,I_N\}$ 构成 I 的一个分划



网格分划.



一般分划.

1

$N = m_1\times\cdots\times m_n$.

设 $E = J\setminus\bigcup_{K\in\tilde P_J} K$. 它在 J 中开. 于是 $E = J\cap U$, $x_0\in E$. 于是有 $\delta>0$ 使 $B_\delta(x_0)\subseteq U$. 于是 $B_\delta(x_0)\cap J\subseteq E$.
若 x_0 不是 J 的内点, 则是边界点 (J 闭). 于是 $B_\delta(x_0)\cap J$ 中必有 J 的其他内点. 任取一个做为新的 x_0 即可.

引理: $\tilde P$ 是 P 的加细 $\Leftrightarrow$ $\forall K\in\tilde P$ $\exists J\in P$ s.t. $K\subseteq J$.

证明: ~~设 $K\in\tilde P$. 因为 $K\subseteq I=\bigcup_{J\in P} J$, 于是存在 $J_1,\dots,J_l$ 使 $K\subseteq J_1\cup\cdots\cup J_l$. 假如 K 不包含于任何一个 $J_1,\dots,J_l$ 中, 则对 $\forall J\in P$ $\tilde P_J$ 将不包含~~

$\Rightarrow$ 假设存在 $K_0\in\tilde P$ 使得对 $\forall J\in P$ $K_0\not\subseteq J$. 于是 $K_0\notin\tilde P_J$.
于是 $I=\bigcup_{J\in P}J=\bigcup_{J\in P}\bigcup_{K\in\tilde P_J}K$. 所以我们只用了 $\tilde P$ 的一部分集就覆盖了 I. 这是不可能的. 因为 K_0 的任何内点 (注意, 因为非退化) 不在 $\tilde P$ 的其他 K 中 (无重叠). 所以必有 J 使 $K_0\subseteq J$.

$\Leftarrow$ 假设 $J\in P$ 使 $\tilde P_J$ 不是 J 的分划. 因为 $\tilde P_J$ 中的元素都是非退化无重叠闭区间. 所以必有 $J\neq\bigcup_{K\in\tilde P_J}K$. 于是存在 $x_0\in J\setminus\bigcup_{K\in\tilde P_J}K$, 注意 $\bigcup_{K\in\tilde P_J}K$ 闭. 所以不妨设 x_0 是 J 的内点. 因为 $\tilde P$ 覆盖 I. 所以存在 K_0 使 $x_0\in K_0$. 于是有 J_0 使 $K_0\subseteq J_0$. 现在 $x_0\in J\cap J_0$ 这与 J, J_0 不重叠矛盾. □

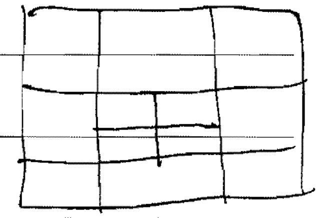
例: 设 $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}^n$. 对每个 $\mathbb{R}$ 中的闭区间 $[a_i,b_i]$ $(i=1,\dots,n)$ 取一个分划 $P_i=\{J_{i,1},\dots,J_{i,m_i}\}$. 再定义

$$P=\{I_{j_1\cdots j_n}\mid I_{j_1\cdots j_n}=J_{1,j_1}\times\cdots\times J_{n,j_n},\ 1\le j_i\le m_i\}$$

则 P 构成 I 的一个分划. 这样的分划叫网格分划. 记为 $P=P_1\times\cdots\times P_n$.

~~设 $P,\tilde P$ 是 I 的两个分划. 若对 $\forall J\in P$, 存在 $K\in\tilde P$~~

设 $P,\tilde P$ 是 I 的两个分划. 若对 $\forall J\in P$, 集合 $\tilde P_J=\{K\in\tilde P\mid K\subseteq J\}$ 构成 J 的分划, 则称 $\tilde P$ 是 P 的加细.



引理: 对于 I 的任意分划 P 都存在一个网格加细 $\tilde P$.

证明: 设 $I=[a,b]$, $a=(a^1,\dots,a^n)$, $b=(b^1,\dots,b^n)$. $P=\{I_1,\dots,I_N\}$, 其中 $I_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha]$, $a_\alpha=(a_\alpha^1,\dots,a_\alpha^n)$, $b_\alpha=(b_\alpha^1,\dots,b_\alpha^n)$. 对每个 $i\in\{1,\dots,n\}$, 取 $P_i=\{a_\alpha^i, b_\alpha^i\mid \alpha=1,\dots,N\}$, 将 P_i 中元素排序并去掉可能的重复, 则 P_i 构成 $[a^i,b^i]$ 的一个分划. 取 $P'=P_1\times\cdots\times P_n$. 则 P' 是 P 的加细. (对 $\forall K\in P'$, 由定义易知 $\mathring K\cap\left(\bigcup_{\alpha=1}^N\partial I_\alpha\right)=\varnothing$, 于是必存在某个 $I_\alpha\in P$ 使 $\mathring K\subseteq\mathring I_\alpha$. 于是 $K\subseteq I_\alpha$) □

Date:
Place:
Reminders

对于 $f: I\to\mathbb{R}$. (P,ξ) 是I的带标记分划. 定义 →

$$S(f,P,\xi)=\sum_{\alpha=1}^{N} f(\xi_\alpha)|I_\alpha|$$

Date:
Place:
Reminders

定理：若 I 是一个非退化闭区间. $P=\{I_1,\dots,I_N\}$ 是 I 的分划，则有 $|I|=\sum_{\alpha=1}^{N}|I_\alpha|$

证明：设 $I=[a,b]$. $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$.

① 若 P 是网格分划. 设 $P=P_1\times\cdots\times P_n$. 其中

$P_i=\{a_i=x_{i,0}<x_{i,1}<\cdots<x_{i,m_i}=b_i\}$, $i=1,\dots,n$.

$J_{i,j}=[x_{i,j-1},x_{i,j}]$. $|J_{i,j}|=(x_{i,j}-x_{i,j-1})$

$$\sum_{J\in P}|J|=\sum_{j_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{m_n}(x_{1,j_1}-x_{1,j_1-1})\times\cdots\times(x_{n,j_n}-x_{n,j_n-1})$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j_i=1}^{m_i}(x_{i,j_i}-x_{i,j_i-1})\right)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=|I|.$$

② 若 P 不是网格的. 取一个 P 的网格加细 $\tilde P$. 则 $|I|=\sum_{J\in\tilde P}|J|$

另一方面. 对 $\forall I_\alpha\in P$. $\tilde P_\alpha=\{J\in\tilde P \mid J\subseteq I_\alpha\}$ 是 I_α 的一个网格分划，所以 $|I_\alpha|=\sum_{J\in\tilde P_\alpha}|J|$. 因为 $\tilde P$ 是 $\tilde P_1,\dots,\tilde P_N$ 的不交并（若 $J\subseteq I_\alpha$, $J\subseteq I_\beta$. 则或者J退化. 或者 I_α I_β 重叠），所以 $\sum_{J\in\tilde P}|J|=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{J\in\tilde P_\alpha}|J|$，即 $|I|=\sum_{\alpha=1}^{N}|I_\alpha|$. □

设 P 是 I 的一个分划 $\{I_1,\dots,I_N\}$, $\xi=\{\xi_1,\dots,\xi_N\}$ $\subseteq I$ 满足 $\xi_\alpha\in I_\alpha$ $(\alpha=1,\dots,N)$

则称 ξ 为 P 的一个标记点组. (P,ξ) 则称为 I 的一个带标记分划.

对于 $P=\{I_1,\cdots,I_N\}$，定义 $\|P\|:=\max\{\operatorname{diam}(I_\alpha)\mid\alpha=1,\cdots,N\}$

称为 P 的粒度. 若对 $\delta>0$, $\|P\|<\delta$, 则称 P 是 δ 细的.

定义: 设 $f: I\to\mathbb{R}$. $A\in\mathbb{R}$. 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$

使得对任意 I 的带标记分划 (P,ξ).

$$|S(f,P,\xi)-A|<\varepsilon.$$

则称 f 在 I 上 Riemann 可积, A 是 f 在 I 上的 Riemann 积分,

记为 $A=\int_I f(x)dx$. 并记 $f\in\mathcal{R}(I)$.

性质: ① $\int_I f(x)dx+\int_I g(x)dx=\int_I (f(x)+g(x))\,dx$.

② $\int_I cf(x)dx=c\int_I f(x)dx$.

③ 若 $f(x)\geq g(x)\ (\forall x\in I)$, 则 $\int_I f(x)dx\geq\int_I g(x)dx$.

④ $\int_I 1\,dx=|I|$.

引理: 若 $f\in\mathcal{R}(I)$. 则 f 在 I 上有界.

证明: 与 $\mathbb{R}^1$ 上的情形完全相同. $\square$

现在设 $f: I\to\mathbb{R}$ 有界. P 是 I 的分划 $=\{I_1,\cdots,I_N\}$. 则可定义

$$M_\alpha=\sup_{x\in I_\alpha}f(x),\quad m_\alpha=\inf_{x\in I_\alpha}f(x),\quad \omega_\alpha=M_\alpha-m_\alpha=\sup_{x,y\in I_\alpha}|f(x)-f(y)|$$

$\alpha=1,\cdots,N.$

以及 $\overline{S}(f,P)=\sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha|I_\alpha|$. $\underline{S}(f,P)=\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha|I_\alpha|$

$\omega(f,P)=\sum_{\alpha=1}^{N} \omega_\alpha|I_\alpha| = \overline{S}-\underline{S}\geq 0.$

分别叫做关于分划 P 的 Darboux 上和, Darboux 下和与振幅和.

引理：设 P, $\tilde{P}$ 是 I 的两个分划. 且 $\tilde{P}$ 是 P 的加细. 则

$$\underline{S}(f,P)\leq \underline{S}(f,\tilde{P})\leq \overline{S}(f,\tilde{P})\leq \overline{S}(f,P)$$

证明：设 $P=\{I_1,\cdots,I_N\}$ 则 $\underline{S}(f,P)=\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha|I_\alpha|$.

$\underline{S}(f,\tilde{P})=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{J\in\tilde{P}_\alpha} m_J|J|$. 注意 $|I_\alpha|=\sum_{J\in\tilde{P}_\alpha}|J|$. 所以

$\underline{S}(f,\tilde{P})-\underline{S}(f,P)=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{J\in\tilde{P}_\alpha}(m_J-m_\alpha)|J|$. 因为对每个

$J\in\tilde{P}_\alpha$. $J\subseteq I_\alpha$. 于是 $m_J=\inf_{x\in J} f(x)\geq \inf_{x\in I_\alpha} f(x)=m_\alpha$. 所以

$\underline{S}(f,\tilde{P})\geq \underline{S}(f,P)$. Darboux 上和时同理(或取 $g=-f$). □

另一个方向的估计则要复杂一些. 我们首先定义：对于 I 的两个分划 P_1. P_2. 定义

~~$P_3=\{I_\alpha\cap J_\beta \mid I_\alpha\in P_1,\ J_\beta\in P_2\}$. P_3 中的非退化区间构成 I 的一个新分划. 且是 P_1,P_2 的公共加细. 称之为 P_1,P_2 的并. 记为 P_1+P_2.~~

推论：设 P_1,P_2 是两个分划，则 $\underline{S}(f,P_1)\le \overline{S}(f,P_2)$.

证明：取 $P=P_1+P_2$，则有

$$\underline{S}(f,P_1)\le \underline{S}(f,P)\le \overline{S}(f,P)\le \overline{S}(f,P_2).\qquad \square$$

于是可定义 $\underline{A}=\sup_P\{\underline{S}(f,P)\}$，$\overline{A}=\inf_P\{\overline{S}(f,P)\}$

则有 $\underline{A}\le\overline{A}$.

同理有 $\overline{S}(f,\tilde P)\ge \overline{S}(f,P)-L(P_0)\cdot\omega\cdot\|P\|$. →

$P_1+P_2:=\{K_{\alpha\beta}=I_\alpha\cap J_\beta \mid I_\alpha\in P_1,\ J_\beta\in P_2,\ K$ 非退化$\}$

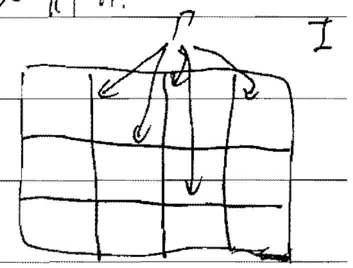
则 P_1+P_2 也是 P 的分划，且是 P_1,P_2 的公共加细，它称为 P_1,P_2 的和.

引理：设 P 是 I 的任一分划，P_0 是 I 的一个网格分划 $P_0=P_1\times\cdots\times P_n$，设每个 P_i $(i=1,\dots,n)$ 的内分点数为 l_i.

记 $L(P_0)=\left(\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{b_i-a_i}\right)\cdot|I|$. 取 $\tilde P=P+P_0$. 则有

$$\underline{S}(f,\tilde P)\le \underline{S}(f,P)+L(P_0)\cdot\omega\|P\|.$$

其中 $\omega=\omega(f,I)$.



证明：设 $\Gamma=\mathring{I}\cap\left(\bigcup_{J\in P_0}\partial J\right)$.

则它可写为 $\Gamma=\Gamma_{1,1}\cup\Gamma_{1,2}\cup\cdots\cup\Gamma_{1,l_1}$

$\cup\Gamma_{2,1}\cup\Gamma_{2,2}\cup\cdots\cup\Gamma_{2,l_2}\cup\cdots\cup\Gamma_{n,1}\cup\Gamma_{n,2}\cup\cdots\cup\Gamma_{n,l_n}$.

其中 Γ_{ij} 是垂直于 x_i 轴的第 j 个"内墙"，它是一个 $n-1$ 维的闭区间，其 $n-1$ 维体积为 $\frac{|I|}{b_i-a_i}$，于是 $L(P_0)$ 就是所有 Γ_{ij} 的体积之和.

现在考虑 $\underline{S}(f,\tilde P)-\underline{S}(f,P)$，由前一引理的证明知

$$\underline{S}(f,\tilde P)-\underline{S}(f,P)=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{J\in\tilde P_\alpha}(m_J-m_\alpha)|J|,$$

Date:
Place:

Reminders

(5月9日)

期中考试时间：第10周周六 9:00 – 11:00

地点：新水325

Date:
Place:

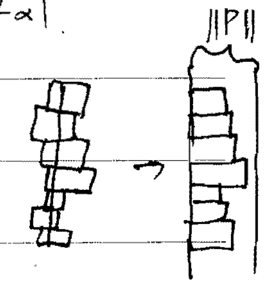
Reminders

注意当 $I_\alpha \cap \Gamma = \phi$ 时，I_α 也是 $\tilde{P}$ 的元素，于是 $m_{I_\alpha} = m_\alpha$，所以对上式无贡献，所以有

$$\underline{S}(f,\tilde{P}) - \underline{S}(f,P) = \sum_{\alpha: I_\alpha \cap \Gamma \neq \phi} \sum_{J \in \tilde{P}_\alpha} (m_J - m_\alpha)|J|$$

$$\le \omega \cdot \sum_{\alpha: I_\alpha \cap \Gamma \neq \phi} \sum_{J \in \tilde{P}_\alpha} |J| = \omega \cdot \sum_{\alpha: I_\alpha \cap \Gamma \neq \phi} |I_\alpha|$$

$$< \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{\alpha: I_\alpha \cap \Gamma_{ij} \neq \phi} |I_\alpha|$$



$$< \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} \mathrm{Vol}_{n-1}(\Gamma_{ij}) \cdot \|P\|$$

$$= L(P_0) \cdot \omega \|P\|. \qquad \square$$

定理(Darboux) $\lim_{\|P\| \to 0} \overline{S}(f,P) = \overline{A}$，$\lim_{\|P\| \to 0} \underline{S}(f,P) = \underline{A}$.

证明：只证下和的情况，上和同理。由 $\underline{A} = \sup_P \{\underline{S}(f,P)\}$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists P_0$ s.t. $A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,P_0) \le A$。不妨设 P_0 是一个网格分割（若不然，可取 P_0 的网格加细后新的 P_0，则它仍满足上述不等式）。取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2 L(P_0) \omega}$（记号意义见前一引理），则对 $\forall P$ 满足 $\|P\| < \delta$，取 $\tilde{P} = P + P_0$，则有

$$A \ge \underline{S}(f,P) \ge \underline{S}(f,\tilde{P}) - L(P_0) \cdot \omega \cdot \|P\| > \underline{S}(f,P_0) - \frac{\varepsilon}{2} > A - \varepsilon \qquad \square$$

Date:
Place:
Reminders

② 若 $f\in R(I)$. 则 $|f|\in R(I)$. 且 $\left|\int_I f(x)dx\right|\le\int_I|f(x)|dx$.

③ 若 $f\in R(I)$. J是I的子区间. 则 $f\in R(J)$.

④ 若 $f,g\in R(I)$. 则 $f\cdot g\in R(I)$.

引理: 该定义不依赖于区间I的选取.

推论: 若 $f\in R(D)$. 则 f 有界.

Date:
Place:
Reminders

定理: 设f是 $I=[a,b]$ 上的有界函数. 则以下等价

i) $f\in R(I)$

ii) (Cauchy) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall\|P_1\|<\delta$. $\|P_2\|<\delta$. 以及 $\forall\xi_1,\xi_2$. 有 $|S(f,P_1,\xi_1)-S(f,P_2,\xi_2)|<\varepsilon$.

iii) (振幅) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall\|P\|<\delta$, $\omega(f,P)<\varepsilon$.

iii)' (振幅) $\forall\varepsilon>0\ \exists P$ s.t. $\omega(f,P)<\varepsilon$.

iv) (Darboux) $\underline{A}=\bar{A}$.

证明: 与一维时完全一样. □.

推论: ① 若 $f\in C(I)$. 则 $f\in R(I)$.

§7.2 有界区域上的Riemann积分.

定义: 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个有界区域 $f: D\to\mathbb{R}$

取一个闭区间 $I\subseteq\mathbb{R}^n$, 使 $D\subseteq I$. 定义

$$\tilde{f}: I\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases} f(x) & x\in D\\ 0 & x\notin D.\end{cases}$$

若 $\tilde{f}\in R(I)$. 则称f在D上Riemann可积. 并定义

$$\int_D f(x)dx := \int_I\tilde{f}(x)dx.\quad \text{记 } f\in R(D).$$

Date:
Place:
Reminders

由定义易知. 若 E 是紧集, 则 E 零测 →

⟺ 存在有限个开(或闭)区间 $I_1, I_2, \cdots, I_{k_n}$, 使

① $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{n} I_k$. ② $\sum_{k=1}^{n}|I_k|<\varepsilon$.

利用这一引理的方法可证 在零测集定义中用 →

开区间还是闭区间都可以. 这一性质可简化 Lebesgue 定理必要性部分的证明.

Date:
Place:
Reminders

在这一定义中, 区域 D 的形状也将直接影响 $f(x)$ 的可积性. 对于比较坏的区域, 即使是常数函数都不是 R 可积的. 所以我们这一节的首要任务是定义一类好的区域, 然后再讨论其上的 R 可积函数. 我们的工具则是 Lebesgue 可积性定理.

定义: 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$. 若对 $\forall\varepsilon>0$, 存在(开或)闭区间 $I_1, I_2, \cdots$ 满足 ① $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. ② $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\varepsilon$.

则称 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 零测集.

若闭区间 $I=[a,b]$ 满足 $b_i-a_i=c$ $(i=1,\cdots,n)$. 则称它为边长为 c 的 n 维立方体.

以下跑4题

引理: 在零测集的定义中, 可将 $I_1, I_2, \cdots$ 改为 n 维立方体.

证明: 设 $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<\frac{\varepsilon}{2}$. 我们只需证明, 对每个 I_k, 存在一些 n 维立方体 $J_{k,1},\cdots,J_{k,m_k}$, 使 $I_k\subseteq\bigcup_{l=1}^{m_k}J_{k,l}$, $\sum_{l=1}^{m_k}|J_{k,l}|<|I_k|+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. 将这些 $J_{k,l}$ 重新编号为 $J_1, J_2, \cdots$ 则有 $\sum_{k=1}^{\infty}|J_k|<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}=\varepsilon$, 所以问题归结为: 对给定闭区间 I, 存在一些立方体 $J_1,\cdots,J_m$, 使 $I\subseteq\bigcup_{k=1}^{m}J_k$. 且 $\sum_{k=1}^{m}|J_k|<I+\varepsilon$

Date:
Place:
Reminders

引理：若E是δ维零测集，则对于δ'>δ，E也是δ'维零测集

证明：取ε<1，则 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\delta} < \varepsilon \Rightarrow c_k<1 \Rightarrow c_k^{\delta'} < c_k^{\delta}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\delta'} < \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\delta} < \varepsilon$. □

n=m=δ=δ' 的情况在换元公式部分会用到 ⟶

Date:
Place:
Reminders

设 $I=[a,b]$，于是 $|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$，考虑多项式 $P(y)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i+y)$，它在 $y=0$ 处连续，所以存在 $\delta>0$，使 $0<y<\delta$ 时，有 $|I|<P(y)<|I|+\varepsilon$.

现在对每个 $i=1,\dots,n$ 取一个 $b_i'\in(b_i, b_i+\frac{y}{2})\cap\mathbb{Q}$，$a_i'\in(a_i-\frac{y}{2}, a_i)\cap\mathbb{Q}$，于是 $I'=[a',b']$ 满足 $I\subseteq I'$，$|I'|<|I|+\varepsilon$

最后因为 I' 的边长为有理数，于是存在 $r\in\mathbb{Q}$，使 $\frac{b_i'-a_i'}{r}\in\mathbb{N}$，于是可将 I' 分割为有限个边长为 r 的立方体。 □

推论：$E\subseteq\mathbb{R}^n$ 是n维零测集 ⟺ $\forall\varepsilon>0$ 存在边长为 $c_1, c_2, \cdots$ 的立方体 $I_1, I_2, \cdots$，使① $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$，② $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^n<\varepsilon$.

定义：设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，$\delta>0$，若对 $\forall\varepsilon>0$ 存在边长为 $c_1, c_2, \cdots$ 的立方体 $I_1, I_2, \cdots$ 使① $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ② $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\delta}<\varepsilon$，则称E为δ维零测集(Hausdorff)。$D=\inf\{\delta>0 \mid E\text{是}\delta\text{维零测集}\}$ 则称D为E的Hausdorff维数 ⟶ 分形维数

定理：设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是区域，$f: D\to\mathbb{R}^m$ 可微，$E\subseteq D$ 是δ维零测集，则对于 $\delta'\geq\delta$，$f(E)$ 是δ维零测集.

证明：$\mathbb{R}^n$ 可分成可数多个闭区间的并

要证E零测，只需证每个 $E\cap I_k$ 零测，于是不妨设存在一个闭区间

$I\subseteq D$ 使 $E\subseteq I$. 因为 I 凸. 所以存在 $M>0$ 使得对 $\forall x,y\in I$, 有 $\|f(x)-f(y)\|<M\|x-y\|$.

因为 E 是 s 维零测集, 所以对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ 边长分别为 $c_1,c_2,\cdots$ 的 n 维立方体 $I_1,I_2,\ldots$, 使得

① $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ ② $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^s<\varepsilon/K$ (K 待定).

设 x_k 是 I_k 的中心, 则对 $\forall x\in I_k$, 有 $\|x-x_k\|<\sqrt{n}\cdot\frac{c_k}{2}$.
于是 $\|f(x)-f(x_k)\|<M\cdot\sqrt{n}\cdot\frac{c_k}{2}$. 于是 $f(I_k)$ 包含于以 $f(x_k)$ 为中心, 边长为 $M\sqrt{n}c_k$ 的立方体中. 记其为 I_k', 则有

① $f(E)\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}f(I_k)\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k'$.

② $\sum_{k=1}^{\infty}(c_k')^s=\sum_{k=1}^{\infty}(M\cdot\sqrt{n}\,c_k)^s<(M\cdot\sqrt{n})^s\cdot\frac{\varepsilon}{K}$

于是只需取 $K=(M\sqrt{n})^s$, 则上述结论意味着 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的 s 维零测集. ~~接下来我们证明对于 $s'>s$ 也成立~~ $\square$

~~推论: 取 $s=n$, $s'=m$, 则有~~

~~推论: 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}^m$ 可微, $n\leq m$, 则 $f(D)$~~

~~取 $s=n$, $s'=m$ 则有 Mini-Sard 定理~~

推论 (Mini-Sard) 设 $f:D\to\mathbb{R}^m$ ($D\subseteq\mathbb{R}^n$ 开, $n<m$) 可微, 则 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集.

Date:
Place:

Reminders

可像一元时一样用Cousin引理证明.(但因为我们) 不打算讲KH积分,所以不用Cousin引理,而用一种更简单的做法

之所以比较简单是因为已经有开、闭、紧等概念.

$$\omega(f,x)=\lim_{\delta\to 0}\omega(f,B_\delta(x))$$

Date:
Place:

Reminders

证明: 设 $\pi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是投影. $\tilde f = f\circ\pi: D\times\mathbb{R}^{m-n}\to\mathbb{R}^m$.
则 $\tilde f$ 可微. $\tilde D = D\times\{0\}$ ($0\in\mathbb{R}^{m-n}$) 是 $D\times\mathbb{R}^{m-n}$ 中的零测集.
于是 $\tilde f(\tilde D)$ ($=f(D)$) 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集. (因为定理: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $(n<m)$ 的像零测集) □

跳跃间断

定理(Lebesgue) 设 $f: I\to\mathbb{R}$ 有界. ($I=[a,b]$)
则 $f\in R(I) \iff f$ 在 I 上几乎处处连续.

引理1: 设 $f:I\to\mathbb{R}$ 有界. $D_\varepsilon(f)=\{x\in I \mid \omega(f,x)\ge\varepsilon\}$. 则 $D_\varepsilon(f)$ 是闭集(于是紧)

证明: 设 $C=\mathbb{R}^n - D_\varepsilon(f)$. 对于 $\forall x_0\in C$.

- 若 $x_0\notin I$. 则存在 $\delta>0$, 使 $B_\delta(x_0)\subseteq\mathbb{R}^n - I\subseteq C$.
- 若 $x_0\in I$, 则有 $\omega(f,x_0)<\varepsilon$. 于是存在 $\delta>0$, 使 $\omega(f,B_\delta(x_0))<\varepsilon$.

对于 $\forall y\in B_\delta(x_0)$, 存在 $\delta'>0$ 使 $B_{\delta'}(y)\subset B_\delta(x_0)$. 于是

$$\omega(f,B_{\delta'}(y))\le\omega(f,B_\delta(x_0))<\varepsilon.$$

所以 $\omega(f,y)<\varepsilon$. 于是 $B_\delta(x_0)\subseteq C$.

综上所述, C中每一点 x_0 都是内点, 所以C是开集. 于是 $D_\varepsilon(f)$ 是闭集. □

引理2: 设 $f:I\to\mathbb{R}$ 有界 且满足对 $\forall x\in I$, $\omega(f,x)<\varepsilon$.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

则存在 I 的分划 P，使 $\omega(f,P)<\varepsilon\cdot|I|$.

证明：对任意 $\overbrace{x\in I}^{\omega(f,x)<\varepsilon\Rightarrow}$，存在 $\delta_x>0$，使 $\omega(f, I\cap B_{\delta_x}(x))<\varepsilon$.

设 I_x 为满足 $x\in I_x\subseteq B_{\delta_x}(x)$ 的开区间. 则 $\omega(f, I\cap I_x)<\varepsilon$.

$\{I\cap I_x \mid x\in I\}$ 构成 I 的开覆盖. 于是存在有限子覆盖 $I_1\cdots I_N$.

利用 $I_1,\cdots,I_N$ 的端点构造一个 I 的网格分划 P. 则对 $\forall J\in P$

存在某个 I_α，使 $J\subseteq I_\alpha$. 于是 $\omega(f,J)\le\omega(f,I_\alpha)<\varepsilon$.

所以 $\omega(f,P)=\sum_{J\in P}\omega(f,J)|J|<\varepsilon\cdot|I|$. $\square$

Lebesgue 定理的证明:

$\Rightarrow$ 设 $D_m=\{x\in I\mid \omega(f,x)\ge\frac{1}{m}\}$. 只需证每个 D_m 零测.

对于 $\forall\varepsilon>0$. 取 I 的分划 P，使 $\omega(f,P)<\frac{\varepsilon}{m}$. 记

$Q=\{J\in P\mid J\cap D_m\neq\emptyset\}$ 则 Q 构成 D_m 的覆盖.

由定义可知 对于 $J\in Q$, $\omega(f,J)\ge\frac{1}{m}$. 于是

$$\frac{1}{m}\sum_{J\in Q}|J|\le\sum_{J\in Q}\omega(f,J)|J|\le\sum_{J\in P}\omega(f,J)|J|<\frac{\varepsilon}{m}.$$

所以有 $\sum_{J\in Q}|J|<\varepsilon$，所以 D_m 是零测集.

$k=2|I|$

$\Leftarrow$ 设 $D(f)$ 是零测集. 则对 $\forall\varepsilon>0$. $D_{\varepsilon/k}(f)$ (k 待定)

也是零测集且紧(引理1)，于是存在开区间 $I_1\cdots I_N$，使

① $D_{\varepsilon/k}(f)\subseteq\bigcup_{\alpha=1}^{N}I_\alpha$. ② $\sum_{\alpha=1}^{N}|I_\alpha|<\frac{\varepsilon}{L}$. ($L$ 待定)

$L=2\omega(f,I)$.

利用 $I_1,\cdots,I_N$ 的边界构造一个分划 P. 则 P 中的闭区间可分为两类: $P=Q_1\cup Q_2$

$Q_1=\{J\in P \mid \exists\alpha\in\{1\cdots n\},\ J\subseteq I_\alpha\}$

$Q_2=\{J\in P \mid \forall\alpha\in\{1\cdots n\},\ J\cap I_\alpha=\phi\}$

对于 Q_2 中的 J. $J\cap P_{\varepsilon/k}(f)=\phi$. 于是 对 $\forall x\in J$, $\omega(f,x)<\frac{\varepsilon}{k}$. 所以由引理2, 存在 J 的分划 P_J, 使 $\omega(f,P_J)<\frac{\varepsilon}{k}|J|$. 进一步地

将 Q_1 中的 J 保持不动, Q_2 中的 J 按引理2进行分划. 则可得 P 的一个加细 $\tilde{P}$. 于是 $(\tilde{P}=Q_1\cup\bigcup_{J\in Q_2}P_J)$

$$\omega(f,\tilde{P})=\sum_{J\in Q_1}\omega(f,J)|J|+\sum_{J\in Q_2}\omega(f,P_J)$$

$$<\overset{=W}{\omega(f,I)}\cdot\sum_{J\in Q_1}|J|+\sum_{J\in Q_2}\frac{\varepsilon}{k}|J|$$

$$<W\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}|I_\alpha|+\frac{\varepsilon}{k}\sum_{J\in P}|J|$$

$$<W\cdot\frac{\varepsilon}{L}+\frac{\varepsilon}{k}\cdot|I|.$$ 取 $k=2|I|$, $L=2W$ 可得

$\omega(f,\tilde{P})<\varepsilon$. 所以 $f\in R(I)$.

D.

推论：设E是有界集. 若E是L零测集. 则E是J零测集.

证明：$\bar{E}$紧，于是 L⇒J. 于是$\bar{E}$ J零测. □

Jordan零测集的性质：E是J零测 ⟺ $\bar{E}$ J零测

证明 ⟸ $E\subset\bar{E}$. 若$\bar{E}$ J零测. 则E J零测

⟹ 若E J零测. 则对 $\forall\varepsilon>0$ ∃有限闭区间 $I_1\cdots I_m$ s.t. $E\subseteq J_1\cup\cdots\cup J_m$. 且 $\sum_{i=1}^{m}|J_i|<\varepsilon$.

注意 $J_1\cdots J_m$ 闭. 于是 $J_1\cup\cdots\cup J_m$ 也闭. 于是 $\bar{E}\subseteq J_1\cup\cdots\cup J_m$ 所以 $\bar{E}$也零测. □

推论 ~~定理~~：设D是有界区域. I是包含D的有界闭区间.

定义 $\chi_D: I\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\begin{cases}1 & x\in D\\ 0 & x\notin D\end{cases}$$

则 $\chi_D\in R(I)\iff\partial D$是零测集.

证明：当x是D的内点时，χ_D在x_0的某邻域内恒为1. 所以 χ_D在x_0处连续. 同理 χ_D在D的外点处也连续. 若$x_0\in\partial D$ 则对 $\forall\delta>0$. $B_\delta(x_0)$中即有$y\in D$. 又有$z\notin D$. 于是 $\omega(\chi_D, B_\delta(x_0))=1$. 于是 χ_D的不连续集 $D(\chi_D)=\partial D$. 所以由Lebesgue定理 $\chi_D\in R(I)\iff\partial D$零测. □

注意 ∂D是紧的. 所以零测的定义还可加强为有限多个开或闭区间. 这样的集合叫Jordan零测集

定义：若有界区域D的边界是Jordan零测集. 则称D为Jordan可测集. 对于Jordan可测集D 定义 $\mu(D)=\int_D\chi_D(x)dx$，称为D的Jordan测度

推论 ~~定理~~：设D是Jordan可测集. $f: D\to\mathbb{R}$有界. 则 $f\in R(D)\iff f$在D上几乎处处连续.

证明：取$I\supseteq D$. $\tilde{f}: I\to\mathbb{R}$是f的零延拓. 则

② 的 Jordan 版：设 $f: I \to \mathbb{R}$ 有界. $\bar{E} = \{x \in I \mid f(x) \neq 0\}$ Jordan 零测，则 $f \in R(I)$ 且 $\int_I f\,dx = 0$.

证明：$D(f) \subseteq \partial I \cup \bar{E}$. ∂I 显然 J 零测. E J 零测 $\Rightarrow$ $\bar{E}$ 也 J 零测. 于是 $\partial I \cup \bar{E}$ J 零测. 于是 L 零测. 于是 $D(f)$ L 零测. 给出 $f \in R(I)$. $\int_I f(x)dx = 0$ 显然. □

$\partial(D_1 \cup D_2) \subseteq (\partial D_1) \cup (\partial D_2)$ $\partial(D_1 \cap D_2) \subseteq (\partial D_1) \cup (\partial D_2)$ $\to$

f 可能的不连续点只有 D 的边界，或 f 的不连续点.
由 Lebesgue 定理可知定理成立. □

性质：① D Jordan 可测. $f \in R(D)$, $f \geq 0$.
若 $\int_D f(x)dx = 0$, 则 $f = 0$ a.e.

② D Jordan 可测, $f \in R(D)$, $f = 0$ a.e., 则 $\int_D f(x)dx = 0$.

③ 设 D_1, D_2 J 可测. 则 $D_1 \cup D_2$ 与 $D_1 \cap D_2$ 也 J 可测.
设 $f: D_1 \cup D_2 \to \mathbb{R}$ 有界 则 $f \in R(D_1 \cup D_2) \Leftrightarrow f \in R(D_1) \wedge f \in R(D_2)$

④ 条件同上 若 $f \in R(D_1) \wedge f \in R(D_2)$, 则 $f \in R(D_1 \cap D_2)$. 若 $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$, 则 $\int_{D_1 \cup D_2} f(x)dx = \int_{D_1} f(x)dx + \int_{D_2} f(x)dx$.

证明：①② 同一维. ③ 由 Lebesgue 判据. ④ 利用
$\chi_{D_1 \cup D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2} - \chi_{D_1 \cap D_2}$. □

§7.3 累次积分

累次积分是一种将重积分化为若干一元积分的技术. 例如 $f: I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b] \times [c,d]$. 要计算 $\int_I f(x,y)dxdy$ 可先考虑 $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ 然后再计算 $\int_a^b F(x)dx$. 或写为 $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$.

更一般地，设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ 是两个 Jordan 可测集. 则 $D = A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ 也是 Jordan 可测的 (为什么?)

若 $f \in R(D)$. 则 f 有界. 对于 $x \in A$. $\int_B f(x,y)dy$ 未必存在

Date:
Place:
Reminders

不过因为有界，所以总可定义其 Darboux 上积分和 Darboux 下积分：$U(x)=\overline{\int}_B f(x,y)\,dy$.

$L(x)=\underline{\int}_B f(x,y)\,dy$.

定理（Fubini）设 A、B、f、U、L 如前，则

$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_A U(x)\,dx=\int_A L(x)\,dx$.

证明：不妨设 A、B 都是闭区间（否则可用覆盖 A、B 的闭区间代替它们，然后将 f 用零延拓）。设 $P_A=\{I_1,\cdots,I_N\}$ 是 A 的分划，$P_B=\{J_1,\cdots,J_M\}$ 是 B 的分划，于是它们的直积 $P=P_A\times P_B=\{I_\alpha\times J_\beta \mid \alpha=1\cdots N,\ \beta=1\cdots M\}$ 构成 D 的分划。

由 Darboux 和的定义

$s(f,P)=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{M}\left(\inf\{f(x,y)\mid x\in I_\alpha,\ y\in J_\beta\}\right)|I_\alpha||J_\beta|$

$=\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\sum_{\beta=1}^{M}\inf\{f(x,y)\mid x\in I_\alpha,\ y\in J_\beta\}|J_\beta|\right)|I_\alpha|$.

对于固定的 $x\in I_\alpha$，显然有

$\inf\{f(x,y)\mid x\in I_\alpha,\ y\in J_\beta\}\le\inf\{f(x,y)\mid y\in J_\beta\}$，于是

$\sum_{\beta=1}^{M}\inf\{f(x,y)\mid x\in I_\alpha,\ y\in J_\beta\}|J_\beta|\le\sum_{\beta=1}^{M}\inf\{f(x,y)\mid y\in J_\beta\}|J_\beta|$

$\le L(x)$. 因为 x 是任取的，左边与 x 无关，所以对右边

Date:
Place:
Reminders

取下确界可得

$$\sum_{\beta=1}^{M} \inf\{f(x,y) \mid x\in I_\alpha, y\in J_\beta\}|J_\beta| \le \inf\{l(x) \mid x\in I_\alpha\}.$$

于是 $\underline{S}(f,P)\le \underline{S}(l,P_A)$. 同理可证

$\overline{S}(f,P)\ge \overline{S}(u,P_A)$. 再由上和、下和、上积分、下积分的关系可得

$$\underline{S}(f,P)\le \underline{S}(l,P_A)\le \overline{S}(l,P_A)\le \overline{S}(u,P_A)\le \overline{S}(f,P) \quad (*1)$$

同理可得

$$\underline{S}(f,P)\le \underline{S}(l,P_A)\le \underline{S}(u,P_A)\le \overline{S}(u,P_A)\le \overline{S}(f,P) \quad (*2)$$

因为 $f\in R(D)$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists P$ 使 $|\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)|<\varepsilon$.
不妨设P是网格的(若不然，可用其网格分划代替之)，于是P可写为 $P=P_A\times P_B$. 于是不等式(*1)(*2)都成立，于是可得

$$|\overline{S}(l,P_A)-\underline{S}(l,P_A)|<\varepsilon, \quad |\overline{S}(u,P_A)-\underline{S}(u,P_A)|<\varepsilon.$$

所以我们找到了A的分划 P_A，使 $\omega(l,P_A)<\varepsilon$，$\omega(u,P_A)<\varepsilon$.
所以 l, u 在A上可积，再由(*1)(*2)不等式知道

$$\int_A u(x)dx=\int_A l(x)dx=\int_D f(x,y)dxdy. \qquad \square$$

推论：若 $f\in R(D)$，则积分 $F(x)=\int_B f(x,y)dy$ 几乎处处存在. 在使 $F(x)$ 不存在的x处随意规定 $F(x)$ 的值，使得 $l(x)\le F(x)\le u(x)$，则有 $F\in R(A)$，且 $\int_D f(x,y)dxdy=\int_A F(x)dx$.

Date:
Place:

Reminders

此外还需证明 $F\in R(D)$，由 $L\le F\le U$.

所以前面的 (*1) (*2) 可扩展为

$\underline{S}(f.P)\le \underline{S}(L.P_A)\le \overline{S}(L.P_A)\le \overline{S}(F.P_A)\le \overline{S}(U.P_A)\le \overline{S}(f.P)$.

$\underline{S}(f.P)\le \underline{S}(L.P_A)\le \underline{S}(F.P_A)\le \underline{S}(U.P_A)\le \overline{S}(U.P_A)\le \overline{S}(f.P)$.

于是有 $|\overline{S}(F.P_A)-\underline{S}(F.P_A)|\le|\overline{S}(f.P)-\underline{S}(f.P)|<\varepsilon$. □

Date:
Place:

Reminders

证明：设 $g(x)=U(x)-L(x)$，则 $g(x)\ge 0$. 且有

$$\int_A g(x)dx=\int_A U(x)dx-\int_A L(x)dx=\int_D f(x.y)dxdy-\int_D f(x.y)dxdy=0.$$

所以 $g(x)$ 几乎处处为零，于是 $F(x)$ 几乎处处存在 (Darboux 判据). □

注：①交换 A.B 的角色可得：$G(y)=\int_A f(x.y)dx$ 几乎处处存在，且有 $\int_B G(y)dy=\int_D f(x.y)dxdy$.

② 设 $I=[a_1.b_1]\times\cdots\times[a_n.b_n]$，$f\in R(I)$. 则有

$$\int_I f(x)dx=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\cdots\left(\int_{a_n}^{b_n}f(x_1.x_2,\cdots,x_n)dx_n\right)\cdots\right)dx_2\right)dx_1.$$

上面常记为 $=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\cdots\int_{a_n}^{b_n}dx_n\, f(x_1,\cdots x_n)$.

③ 若 $f\in C(D)$，则 $f\in R(D)$，且 F.G 处处存在. 此时 Fubini 定理无需任何其它条件或假设就成立.

④ 反例 $D=[0.1]\times[0.1]$.

$$f(x.y)=\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{c} & 若 x=\frac{b}{a}.\ y=\frac{d}{c}\\ 0 & 否则\end{cases}\qquad (a.b.c.d\in\mathbb{N}_{>0},\ (a.b)=1,\ (c.d)=1.$$

则 $f\in R(D)$. 但当 $x=\frac{b}{a}$ 时. $\int_0^1 f(x.y)dy$ 不存在. 当 $y=\frac{d}{c}$ 时 $\int_0^1 f(x.y)dx$ 不存在. (此例的确说明使 $F(x)$ 或 $G(y)$ 不存在的 x.y 构成零测集)

Date:
Place:

Reminders

(5) 若不规定 $l(x)\le F(x)\le u(x)$. F 可能不是 R 可积的. 即使简单地在不可积处取 $F(x)=0$ 也不行. 例

$$f(x,y)=\begin{cases}1-\frac{1}{a} & x=\frac{b}{a},\ y=\frac{d}{c}\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

则 $f\in R(D)$. 而 $u(x)=1$. $l(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{a} & x=\frac{b}{a}\\ 1 & x\ne\frac{b}{a}\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}\text{不存在} & x=\frac{b}{a}\\ 1 & x\ne\frac{b}{a}\end{cases}$. 若规定 $F(x)=\begin{cases}0 & x=\frac{b}{a}\\ 1 & x\ne\frac{b}{a}\end{cases}$. 则

显然 $F\in R([0,1])$.

Date:
Place:

Reminders

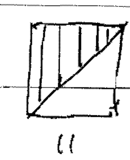
$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{若 } x=\frac{b}{a},\ y=\frac{c}{a},\ (a,b)=1,\ (c,a)=1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad a,b,c\in\mathbb{N}_{>0}$$

则 $F(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy=0$. $G(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx=0$.

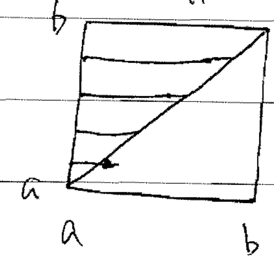
于是 $\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 G(y)dy=0$. 但 f 在 D 上不是 R 可积的. 因为它在任何区间上的振幅都是 1.

例: ① $D=[a,b]\times[a,b]$. $f\in R(D)$. 求证

$$\int_a^b\left(\int_a^y f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_x^b f(x,y)dy\right)dx$$



证明: $\chi(x,y)=\begin{cases}1 & y\ge x.\\ 0 & y<x.\end{cases}$ □



② 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Jordan 可测集. I 是一个闭区间覆盖 D. 将 I 分解为 $I=I_x\times I_y$. 于是 D 的示性函数 χ 可写为 $\chi(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$ 因为 D 可测. 所以 $\chi\in R(D)$.

于是 $\mu(D)=\int_I \chi(x,y)dxdy=\int_{I_x}dx\int_{I_y}\chi(x,y)dy$

$$=\int_{I_y}dy\int_{I_x}\chi(x,y)dx.$$

记 $\mu(D_x)=\int_{I_y}\chi(x,y)dy$. $\mu(D_y)=\int_{I_x}\chi(x,y)dx$

Date:
Place:
Reminders

则 $\mu(D)=\int_{I_x}\mu(D_x)\,dx=\int_{I_y}\mu(D_y)\,dy$.

③ n维球的体积. 设 $D_r^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2\le r^2\}$.

则 $\mu(D_r^1)=2r$. $\mu(D_r^2)=\pi r^2$. $\cdots$ 更一般地. 若已知 $\mu(D_r^{k-1})=C_{k-1}r^{k-1}$. 则

$$\mu(D_r^k)=\int_{-r}^{r} C_{k-1}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^{k-1}dx \qquad x=r\sin\theta$$

$$=\left(C_{k-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\,dx\right)r^k.$$

于是可得 C_k 的递推公式:

$$C_k=C_{k-1}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\,dx \quad 其中 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\,dx=\begin{cases}\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & k=2l\\ \frac{(2l)!!}{(2l+1)!!}, & k=2l+1\end{cases}$$

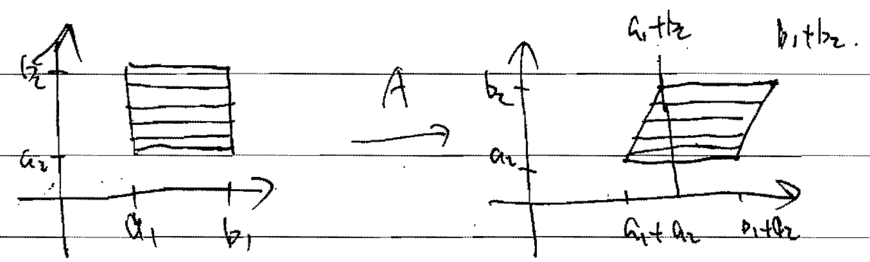
于是 $$C_{2l+1}=\left(\frac{(2l)!!}{(2l+1)!!}2\right)\left(\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\cdot\pi\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\right)C_1$$

$$=\frac{2\cdot(2\pi)^l}{(2l+1)!!}.$$

$$C_{2l}=\left(\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\cdot\pi\right)\left(\frac{(2l-2)!!}{(2l-1)!!}\cdot 2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\right)C_1$$

$$=\frac{(2\pi)^l}{(2l)!!}$$

Date:
Place:
Reminders



Date:
Place:
Reminders

④ 设 $I=[a,b]$ ($a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$, $a_i<b_i$)

$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个线性变换，它将 I 变为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭区域 $A(I)$. 则 $\mu(A(I))=|\det A|\cdot\mu(I)$.

证明：~~A可分解为三类初等变换的乘积~~ 若 $\det A=0$. 则 $A(I)$ 在一个 $n-1$ 维子空间中. 所以显然有 $\mu(A(I))=0$. 若 $\det A\neq 0$. 则 A 可分解为三类初等变换的乘积 $A=E_1\cdots E_n$. 显然，只要证明 A 为初等变换的情况即可.

i) 若 $A(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$

则 $A(I)=[a',b']$. 其中 $a'=(a_1,\dots,a_j,\dots,a_i,\dots,a_n)$. $b'=(b_1,\dots,b_j,\dots,b_i,\dots,b_n)$

则显然有 $\mu(A(I))=\mu(I)$. 此时 $\det A=-1$. ✓

ii) 若 $A(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=(x_1,\dots,\lambda x_i,\dots,x_n)$

则 $A(I)=[a'',b'']$, 其中 $a''=(a_1,\dots,\lambda a_i,\dots,a_n)$. $b''=(b_1,\dots,\lambda b_i,\dots,b_n)$.

于是 $\mu(A(I))=\lambda\cdot\mu(I)$. 此时 $\det A=\lambda$. ✓

iii) 若 $A(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_i+x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)$. 不妨设 $i=1$, $j=2$. 此时 $A(I)$ 是 (x_1,x_2) 平面内的平行四边形 D 与 $(x_3,\dots,x_n)$ 中的区间 J 的直积. 于是根据②

$$\mu(A(I))=\int_D \mu(J)\,dx_1dx_2=\mu(J)\int_D dx_1dx_2.$$

而平行四边形的面积仍等于 $(b_1-a_1)\times(b_2-a_2)$. 所以

$\mu(A(I))=\mu(I)$. 此时 $\det A=1$. □

Date:
Place:
Reminders

微分同胚要求 $\det\varphi'(t)\neq 0\ \forall t\in D_t$. 这比一元定积分中的 φ 严格单调略强(例如 $t\mapsto t^3$ 严格单调, 但 φ' 有一个零点 $t=0$). 我们后面会利用 Sard 定理解决这一问题.

Date:
Place:
Reminders

§7.4 换元法.

先回忆一下一元定积分的换元法

定理: 设 $f\in R[a,b]$. $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ C^1. 严格单调增 $\varphi(\alpha)=a$. $\varphi(\beta)=b$. 则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

在重积分换元法中. f 可换成某 Jordan 可测区域 D_x 上的 R 可积函数. φ 则换成从另一个区域 D_t 到 D_x 的微分同胚. 于是, 在适当的条件下 f 在 D_x 的 Riemann 积分可以通过另一个函数在 D_t 上的积分来计算. 这就是换元法. 与一元定积分时不同的是, 重积分换元法的主要功能是改变积分区域的形状. 这个问题在一维时是不存在的.

本节的主要结果是如下定理.

定理(重积分换元公式) 设 D_t. D_x 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Jordan 可测闭区域. $\varphi: D_t\to D_x$ 是连续可微的微分同胚. 记 $\psi: D_t\to\mathbb{R}$. $t\mapsto|\det\varphi'(t)|$. 设 f 是 D_x 上的函数, 则

i) $f\in R(D_x)\Longleftrightarrow f(\varphi(t))\psi(t)\in R(D_t)$.

ii) 若 $f\in R(D_x)$, 则 $\int_{D_x}f(x)dx=\int_{D_t}f(\varphi(t))\psi(t)dt$.

~~引理: i) 成立. 即 $f\in R(D_x)\Leftrightarrow f\circ\varphi\cdot\psi\in R(D_t)$.~~ ~~[illegible]~~

证明 i) 注意 ψ 是 D_t 上的连续函数. 而 D_t 紧. 所以最大值存在

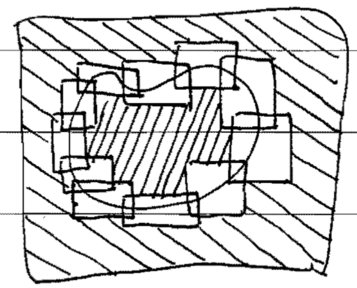
要证换元公式 (i) 先准备几个引理.

引理 1 若 $\mu(D_x) \le \int_{D_t} \psi(t)\,dt$. 对任意的C微分同胚 $\varphi: D_t \to D_x$ 有

则换元公式成立

证明过程基本一致 (见下页边注).

$$\int_{D_x} c\,dx \le \int_{D_t} c\,\psi(t)\,dt. \quad 对 \forall c \ge 0.$$



最小值. 设 $m_\psi \le \psi(t) \le M_\psi$. 则 $m_\psi > 0$. 由此不难知道 f 有界 $\Longleftrightarrow$ $f\circ\varphi\cdot\psi$ 有界.

因为 φ 连续. 所以若 f 在 $x=\varphi(t)$ 处连续 则 $f\circ\varphi$ 在 t 处连续. 于是 $f\circ\varphi$ 的不连续点一定是 $\varphi^{-1}(D(f))$ 的子集. 若 $f\in R(D_x)$, 则 $D(f)$ 是零测集 于是 $\varphi^{-1}(D(f))$ 也是零测集. 于是 $D(f\circ\varphi)$ 也是零测集. 所以 $f\circ\varphi\in R(D_t)$. 因为 ψ 连续 所以 $f\circ\varphi\cdot\psi\in R(D_t)$. 要证反过来的结论. 取 $\tilde\varphi=\varphi^{-1}$. $\tilde f = f\circ\varphi\cdot\psi$ 即可. □

引理 2. 只要对 $f=1$ 证明定理 (的 (i)) 则对一般的 $f\in R(D_x)$ 也成立.

对于 $f\in R(D_x)$, 则 $|f|\in R(D_x)$, 于是 $f_\pm = (|f|\pm f)/2 \in R(D_x)$ 而 $f=f_+-f_-$. 所以只要证明公式对 f_+ 和 f_- 成立即可. 它们都满足 $f_\pm \ge 0$. 所以不妨假设 $f\ge 0$.

取一个闭区间 I, 使 $D_x\subseteq I$. 因为 D_x Jordan 可测. 对 $\forall\varepsilon>0$ 存在闭区间 $I_1, I_2,\cdots,I_N$, 使得 ① $\partial D_x \subseteq I_1\cup\cdots\cup I_N$, 且 ② $\sum_{\alpha=1}^{N} |I_\alpha| < \varepsilon/M_f$. 其中 $M_f=\sup\{f(x)\mid x\in D_x\}$ 用 $I_1,\cdots,I_N$ 的边界构造一个 I 的网格分划 P_0.

对任一 I 的分划 P. 取 $\tilde P = P + P_0$ 为 P 和 P_0 的公共加细. 则 $\tilde P$ 中的闭区间可分为三类:

此外用条件 $\mu(J) \le \int_{\varphi^{-1}(J)} \psi(t)\,dt$. →

比较得 $\int_{D_x} f(x)\,dx \le \int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt$. →

再对 $\int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt$ 与 φ^{-1} 运用上述得

$$\int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt \le \int_{D_x} f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\,\psi(\varphi^{-1}(x))\cdot(\varphi^{-1})'(x)\,dx$$

$$\le \int_{D_x} f(x)\,dx.$$ 即得 ii) □

$Q_1 = \{ J \in \tilde{P} \mid$ 存在 $\alpha \in \{1, \dots, N\}$ 使 $J \subseteq I_\alpha \}$

$Q_2 = \{ J \in \tilde{P} \setminus Q_1 \mid J$ 在 D_x 的内部$\}$

$Q_3 = \{ J \in \tilde{P} \setminus Q_2 \mid J$ 在 D_x 的外部$\}$

下面考虑 Darboux 下和，显然只有 Q_1, Q_2 中的 J 有贡献.

$$S(\tilde{f}, P) \le S(\tilde{f}, \tilde{P}) = \Big(\sum_{\substack{J\in Q_1 \\ J \in P_\alpha}} + \sum_{J \in Q_2}\Big) \underbrace{\inf\{f(x) \mid x \in J\}}_{\text{记为 } f_J(x)\text{. 实为常数函数}} |J|$$

$$\le M_f \sum_{\alpha=1}^{N} |I_\alpha| + \sum_{J\in Q_2} \int_J f_J(x)\,dx$$

$\Downarrow$ $f_J(\varphi(t)) \le f(\varphi(t))$ $(\forall t \in \varphi^{-1}(J))$

$$< \varepsilon + \sum_{J\in Q_2} \int_{\varphi^{-1}(J)} f_J(\varphi(t))\psi(t)\,dt \le \varepsilon + \int_{\varphi^{-1}(\bigcup_{J\in Q_2} J)} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt$$

$$\le \varepsilon + \int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt$$ （因为 $\varphi^{-1}(\bigcup_{J\in Q_2} J)$ 是 D_t 的子集且 $f \ge 0$）

右边是与 P 无关的常数，所以取 $\|P\| \to 0$ 的极限得

$\int_{D_x} f(x)\,dx \le \varepsilon + \int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt$. 再取 $\varepsilon \to 0$ 得

~~同理可得~~

~~$\underline{\int}_{D_x} f(x)\,dx \le \int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt$，同理可得~~

~~$\overline{\int}_{D_x} f(x)\,dx \ge \int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt$. 因为 $\underline{\int}_{D_x} = \overline{\int}_{D_x}$，所以~~

ii) 成立. □

~~根据引理2，我们只需证明~~
~~$\mu(D_x)=\int_{D_x}dx=\int_{D_t}\varphi(t)\,dt$，即 $\mu(D_x)=\int_{D_t}|\det\varphi'(t)|dt$.~~

引理2. 若 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是可逆线性变换，则

$$\mu(D_x)=|\det\varphi'|\,\mu(D_t).$$

证明：当 D_t 是区间时，前一节中我们已经用 Fubini 定理证明过上述公式。若取 $\tilde{\varphi}=\varphi^{-1}$，则当 D_x 是区间时，上述公式也成立。所以只需证明由区间情形可推出一般情形。

取 I 是覆盖 D_x 的闭区间，对于 I 的任一分划 P，P 中的小区间可分为三类：

$Q_1=\{J\in P \mid \bar{J}\cap\partial D_x\neq\emptyset\}$.

$Q_2=\{J\in P\mid \bar{J}\subseteq \mathring{D}_x\}$ $\quad Q_3=\{J\in P\mid \bar{J}\cap \bar{D}_x=\emptyset\}$.

设 $\chi:I\to\mathbb{R}$ 是 D_x 的指示函数，则

$\underline{S}(\chi,P)=\sum\limits_{J\in Q_2}\mu(J)$. $\quad \overline{S}(\chi,P)=\sum\limits_{J\in Q_1\cup Q_2}\mu(J)$.

注意 $\mu(J)=|\det\varphi'|\,\mu(\varphi^{-1}(J))$，记 $A=|\det\varphi'|$，则有

$$A^{-1}\underline{S}(\chi,P)=\sum_{J\in Q_2}\mu(\varphi^{-1}(J)) = \mu\Big(\bigcup_{J\in Q_2}\varphi^{-1}(J)\Big)$$
$$=\mu\Big(\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{J\in Q_2}J\Big)\Big)$$
$$\le \mu(D_t).$$

注意 $\bigcup\limits_{J\in Q_2}J\subseteq \mathring{D}_x$，所以

$\varphi^{-1}\Big(\bigcup\limits_{J\in Q_2}J\Big)\subseteq \mathring{D}_t$，所以

这个最大值是可以取到的. 不妨设当 $i=1$ 时 $\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ 最大.

于是可取 $x_j = \mathrm{sgn}\, a_{1j}$, 则 $\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{1j}|$.

所以 $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

若 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 上都取无穷范数

则 $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$ 　$\|x\|_\infty = 1$ 即以 0 为中心边长为 2 的立方体表面. 为紧集. 于是有最大值. 所以

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \max_{1\le i\le m} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right|$$

$$\le \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

对 P 取 $\|P\|\to 0$ 的极限得 $\overline{\int_I} \chi_D(x)dx \le A\cdot \mu(D_\epsilon)$.

同理可证 $\underline{\int_I} \chi_D(x)dx \ge A\, \mu(D_\epsilon)$. 而 $\underline{\int_I} = \overline{\int_I}$. 所以

$$\mu(D_\epsilon) = \int_I \chi_D(x)dx = A\,\mu(D_\epsilon).$$ □

后面我们将利用立方体覆盖所求区域. 而欧氏范数在处理立方体时不够精确. 所以有必要引入另一种为处理立方体而准备的范数. 即无穷范数

定义 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1,\cdots,x_n) \mapsto \max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$.

于是一个以 x_0 为中心的立方体可写为 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\|_\infty < \frac{c}{2}\}$

其中 c 是它的边长. 它的体积则为 c^n.

无穷范数的有限增量定理: 设 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 区域, $x_1, x_2 \in D$ 使 $I_{x_1x_2} \subseteq D$. $f: D \to \mathbb{R}^m$ 可微. 则存在 $\xi \in I_{x_1x_2}$ 使 $\|f(x_1)-f(x_2)\|_\infty \le \|f'(\xi)\|_\infty \cdot \|x_1-x_2\|_\infty$ 其中 $\|f'(\xi)\|_\infty$ 是矩阵的无穷范数.

证明: $f(x_1)-f(x_2) = (f_1(x_1)-f_1(x_2), \cdots, f_m(x_1)-f_m(x_2))$

$= (f_1'(\xi_1)(x_1-x_2), \cdots, f_m'(\xi_m)(x_1-x_2))$ 于是

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |f_i'(\xi_i)(x_1-x_2)| \le \max_{1\le i\le m} \|f_i'(\xi_i)\|_\infty \|x_1-x_2\|_\infty$$

此引理是改用无穷范数的主要原因. 其它范数 →
都会在估界中增加不必要的常数使得估计不可用.

可以说这个引理是Schwarz证明中最关键的一个观察.

其中 $\|f_i'(\xi_i)\|_\infty$ 是作为 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的映射的无穷范数. 于是

$$\|f_i'(\xi_i)\|_\infty = \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i)\right| \quad \text{所以有}$$

$$\|f(x_1)-f(x_2)\|_\infty \le \underbrace{\left(\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i)\right|\right)}\|x_1-x_2\|_\infty$$

因为 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 都连续 所以一定存在 ξ, 使 达到最大值.

而此时

$$\sim = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi)\right| = \|f'(\xi)\|_\infty. \qquad \square$$

~~引理: 设J是立方体 $|x-x_0|\le\frac{c}{2}$. φ 在J的开邻域上连续可微~~

引理3. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集. $\varphi: D\to\mathbb{R}^n$ 连续可微.
J是D中的立方体, 则有

$$\mu(\varphi(J)) \le \left(\max_{t\in J}\|\varphi'(t)\|_\infty\right)^n\cdot\mu(J).$$

证明: 设 $J=\{\|x-x_0\|_\infty\le\frac{c}{2}\}$. 则 $\mu(J)=c^n$. 对于任意 $x\in J$.

$$\|\varphi(x)-\varphi(x_0)\|_\infty \le \|\varphi'(\xi)\|_\infty\cdot\|x-x_0\|$$

$$\le \max_{t\in J}\|\varphi'(t)\|_\infty\cdot\frac{c}{2}.$$

两边乘2, 再取n次方即可. $\square$

Date:
Place:
Reminders

现在给出定理的证明.

证明(换元公式): 根据引理1. 只需证明 $\mu(D_x) \le \int_{D_t} \psi(t)dt$.

首先任取一个 $\varepsilon>0$.

① 设 I_0 是覆盖 D_x 的一个闭区间. 因为 D_x Jordan可测. 所以存在 $I_1, I_2, \cdots, I_N$, 使得 $\partial D_x \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_N$. 且 $\sum_{\alpha=1}^{N} \mu(I_\alpha) < \varepsilon$.
利用 $I_1, \cdots, I_N$ 的边界构造 I_0 的一个网格分划 P_0, 则 P_0 中的闭区间 I 可分为以下三类:

$P_1 = \{ I \in P_0 \mid \exists \alpha \in \{1, \cdots, N\}. s.t. I \subseteq I_\alpha \}$.

$P_2 = \{ I \in P_0 \setminus P_1 \mid I \subseteq \mathring{D}_x \}$

$P_3 = \{ I \in P_0 \setminus P_1 \mid I \cap D_x = \phi \}$.

记 $D_x' = \bigcup_{I \in P_2} I$. $D_x'' = \bigcup_{I \in P_1 \cup P_2} I$. 则有 $D_x' \subseteq D_x \subseteq D_x''$. 另一方面,

$\mu(D_x'') - \mu(D_x') = \sum_{I \in P_1} \mu(I) \le \sum_{\alpha=1}^{N} \mu(I_\alpha) < \varepsilon$. 所以有

$\mu(D_x') \le \mu(D_x) \le \mu(D_x') + \varepsilon$. 接下来只需估计 $\mu(D_x')$.

② 设 $D_t' = \varphi^{-1}(D_x')$. 则 D_t' 是 D_t 中的闭集, 于是可取
$\delta_1 = \inf\{ \|x-y\|_\infty \mid x \in D_t'. y \in \partial D_t \}$ 因为 D_t' 和 ∂D_t 都是紧的. 所以存在 $x_0 \in D_t'$. $y_0 \in \partial D_t$. 使得 $\delta_1 = \|x_0 - y_0\|_\infty$.
因为 $D_t' \cap \partial D_t = \phi$. 所以 $x_0 \ne y_0$. 于是 $\delta_1 > 0$.

Date:
Place:
Reminders

$$\mathrm{diam}_\infty J = \max\{\|x-y\|_\infty \mid x,y\in J\}$$

$$\max(\mathrm{diam}_\infty(J_1),\cdots,\mathrm{diam}_\infty(J_N)).$$

此外 $\|P\|_\infty = \cancel{\max(\|J_1\|_\infty,\cdots,\|J_N\|_\infty)}$. 若 $P=\{J_1,\cdots,J_N\}$. →

~~而 $\|J\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|b_i-a_i|$ 若 $J=[a,b]$. $a=(a_1,\cdots,a_n)$. $b=(b_1,\cdots,b_n)$~~

因为范数都是等价的($\exists A,B$ s.t. $A\|x\|\le\|x\|_\infty\le B\|x\|$), 所以这个改动不影响结论.

~~记 M 是 $t\mapsto\|(\varphi'(t))^{-1}\|_\infty$ 在 D_t 上的最大值~~

~~结论改为 $\|\varphi'(t_1)^{-1}\cdot\varphi(t_2)-I\|_\infty<\varepsilon$~~

③ 考虑函数 $\eta: D_t\times D_t\to\mathbb{R}$. $(t_1,t_2)\mapsto\|\varphi'(t_1)^{-1}\varphi'(t_2)\|_\infty$

则 $\eta(t,t)=1$. 记 $\Delta=\{(t,t)\mid t\in D_t\}\subseteq D_t$. Δ 是紧的. 于是存在 $\delta_3>0$, 使得对 $\forall(t_1,t_2)\in D_t\times D_t$ 满足 $d_\infty((t_1,t_2),\Delta)<\frac{\delta_3}{2}$, 就有 $\eta(t_1,t_2)<1+\varepsilon$.

注意 $d_\infty((t_1,t_2),\Delta)=\left\|(t_1,t_2)-\left(\frac{t_1+t_2}{2},\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right\|_\infty=\frac{1}{2}\|t_1-t_2\|_\infty$.

所以亦可改为 $\|t_1-t_2\|_\infty<\delta_3$, 就有 $\eta(t_1,t_2)<1+\varepsilon$.

Date:
Place:
Reminders

② 取一个覆盖 D_t 的立方体 J_0. 设它边长为 C_0. $\Phi: J_0\to\mathbb{R}$ 是 $\psi: D_t\to\mathbb{R}$ 的零延拓. 于是 $\int_{D_t}\psi(t)dt=\int_{J_0}\Phi(t)dt$.

由 $\Phi\in R(J_0)$. 存在 $\delta_2>0$, 使得对 J_0 的任意分划 P, 只要 $\|P\|_\infty<\delta_2$. 则对任意标记点组 ξ, 有

$$\left|S(\Phi,P,\xi)-\int_{J_0}\Phi(t)dt\right|<\varepsilon.$$

~~设 $\eta: D_t\to\mathbb{R}$. $t\mapsto\|\varphi(t)\|_\infty$ 则 η 连续. 记 m_η 是 η 在 D_t 上的最小值. 则 $m_\eta>0$. 因为 η 一致连续. 所以存在 $\delta_3>0$. 使得只要 $t_1,t_2\in D_t$ 满足 $\|t_1-t_2\|_\infty<\delta_3$, 就有 $|\eta(t_1)-\eta(t_2)|<\frac{\varepsilon}{M}$. 于是 $\left|\frac{\eta(t_1)}{\eta(t_2)}-1\right|<\frac{m_\eta\varepsilon}{m_\eta}\le\varepsilon$.~~

④ 取充分大的 $m\in\mathbb{N}$, 使 $\frac{C_0}{m}<\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$. 将 J_0 各边 m 等分得网格分划 Q_0. 则 Q_0 的元素可分三类.

$Q_1=\{J\in Q_0\mid J\cap\partial D_t\ne\phi\}$.

$Q_2=\{J\in Q_0\mid J\subseteq D_t^\circ\}$. $Q_3=\{J\in Q_0\mid J\cap D_t=\phi\}$.

则 $D_t'\subseteq\bigcup_{J\in Q_2}J$, 于是 $\mu(D_x')=\mu(\varphi(D_t'))\le\sum_{J\in Q_2}\mu(\varphi(J))$

(证明: 设 $t_0\in D_t'$. 则 t_0 必属于某个 $J\in Q_0$. 对于 J 中的其它 t

则有 $d_\infty(t,\partial D_t)\ge d_\infty(t_0,\partial D_t)-d_\infty(t_0,t)$.

由 δ_1 的定义知 $d_\infty(t_0, \partial D_\varepsilon) \geq \delta_1$. 由 m 的取法知 $d_\infty(t_0, t) <$

于是 $d(t, \partial D_\varepsilon) > \delta_1 - \frac{c_0}{m} > 0$. 所以 $J \subseteq D_\varepsilon^\circ$, 所以 $J \in Q_2$. $\square$

⑤ 任取一个 $J \in Q_2$. 设 t_J 是 J 的中心. 记 $A = \varphi'(t_J)$. 则 A 是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的可逆线性变换. 对集合 J 和变换 $A^{-1} \circ \varphi$ 应用引理3. 则有

$$\mu(A^{-1} \circ \varphi(J)) \leq \left(\max_{t \in J} \| A^{-1} \circ \varphi'(t) \|_\infty\right)^n \cdot \mu(J)$$

因为 A 是线性变换. 由引理2. $\mu(A^{-1} \circ \varphi(J)) = \det(A)^{-1} \cdot \mu(\varphi(J))$.

所以有 $\mu(\varphi(J)) \leq \det(A) \cdot \left(\max_{t \in J} \| A^{-1} \circ \varphi'(t) \|_\infty\right)^n \mu(J)$

$$\leq \left(\max_{t \in J} \| \varphi'(t_J)^{-1} \circ \varphi'(t) \|_\infty\right)^n \psi(t_J)\, \mu(J).$$

根据 m 的取法 $\left(\|\varphi'(t_J)^{-1} \varphi'(t)\|_\infty\right)^n = \eta(t_J, t) < 1 + \varepsilon$. 于是

$$\mu(\varphi(J)) \leq (1 + \varepsilon)\, \psi(t_J)\, \mu(J).$$

⑥ 对 $J \in Q_2$ 求和. 则有

$$\sum_{J \in Q_2} \mu(\varphi(J)) \leq (1+\varepsilon) \cdot \sum_{J \in Q_2} \psi(t_J)\, \mu(J).$$

对于 Q_1. Q_3 中的 J. 取 $t_J \notin D_\varepsilon$. 则有

$$= (1+\varepsilon) \sum_{J \in Q_0} \tilde{\psi}(t_J)\, \mu(J) = (1+\varepsilon)\, S(\tilde{\psi}, Q_0, \underbrace{\xi}_{\{t_J \mid J \in Q_0\}}).$$

Date: ....
Place: ....

Reminders

因为D紧. E闭. 所以E紧. 所以L零测可改为J零测. →

此证明思想来自Spivak, 反证技术来自 徐森林的换元式证明. →

Date: ....
Place: ....

Reminders

⑦ $$\mu(D_x) \le \mu(D_x') + \varepsilon \le \sum_{J\in Q_2} \mu(\varphi(J)) + \varepsilon$$

$$\le (1+\varepsilon)\Big(S(\tilde\psi, Q, \xi)\Big) + \varepsilon$$

$$\le (1+\varepsilon)\Big(\int_{J_0} \tilde\psi(t)\,dt + \varepsilon \Big) + \varepsilon$$

← m的取法保证 $\|Q\|_\infty \le \frac{c_0}{m} < \delta_0$

$$= (1+\varepsilon)\Big(\int_{D_t} \psi(t)\,dt + \varepsilon \Big) + \varepsilon.$$ 取 $\varepsilon \to 0$ 得

$\mu(D_x) \le \int_{D_t} \psi(t)\,dt.$ 定理证完. □.

接下来考虑换元公式的一个加强版. 即不要求φ是微分同胚. 仅仅是C^1的双射(逆未必可微). 首先证明一个$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$的Sard定理.

定理(Sard) 设D是$\mathbb{R}^n$中的Jordan可测闭区域.
$\varphi: D \to \mathbb{R}^n$连续可微, $E = \{x \in D \mid \det \varphi'(x) = 0\}$.
则 $\varphi(E)$是$\mathbb{R}^n$中的Lebesgue零测集.

证明: 假设$\varphi(E)$不是零测集. 于是存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

Date:
Place:
Reminders

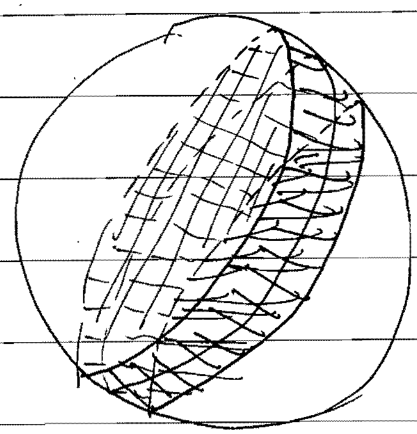
对E的任意开区间覆盖 $\varphi(E)\subseteq J_1\cup J_2\cup\cdots$，都有
$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\mu(J_\alpha)\ge\varepsilon_0$

取一个立方体 C_0 包含 D. C_0 的边长为 l_0. 将 C_0 的各边二分，可得 $N=2^n$ 个小立方体，边长为 $l_0/2$. 其中必有一个（记为 C_1）使 $E_1=C_1\cap E$ 满足 $\varphi(E_1)$ 的任意开区间覆盖 $\varphi(E_1)\subseteq J_1\cup J_2\cup\cdots$ 满足 $\sum_{\alpha=1}^{\infty}\mu(J_\alpha)\ge\varepsilon_0/N$. 对 $E_1\subseteq C_1$ 做同样的二分和讨论可知，存在边长为 $l_0/2^2$ 的小立方体 $C_2\subseteq C_1$，以及 $E_2=C_2\cap E$，使得 $\varphi(E_2)$ 的任意开区间覆盖 $\varphi(E_2)\subseteq J_1\cup J_2\cup\cdots$ 满足 $\sum_{\alpha=1}^{\infty}\mu(J_\alpha)\ge\varepsilon_0/N^2$. 如此便得一闭区间套 $C_0\supseteq C_1\supseteq C_2\cdots$ 边长为 $l_0, l_0/2, l_0/2^2,\cdots$ 以及 $E_k=C_k\cap E$ 使得 $\varphi(E_k)$ 的任意开区间覆盖 $\varphi(E_k)\subseteq J_1\cup J_2\cup\cdots$ 满足 $\sum_{\alpha=1}^{\infty}\mu(J_\alpha)\ge\varepsilon_0/N^k$.

由紧集套定理，存在唯一的 $x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$. 于是 $\det\varphi'(x_0)=0$. 所以 $\varphi'(x_0)$ 将 $\mathbb{R}^n$ 映为 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维子空间. 其中 $k=\operatorname{rank}\varphi'(x_0)<n$. 根据 $\varphi'(x_0)$ 的定义，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in B_\delta(x_0)$ 时，有 $\|\varphi(x)-\varphi(x_0)-\varphi'(x_0)(x-x_0)\|<\varepsilon\|x-x_0\|$. 取一 k 使 $I_k\subseteq B_\delta(x_0)$，则亦有 $E_k\subseteq B_\delta(x_0)$. ~~于是 $\varphi(E_k)\subseteq\varphi(B_\delta(x_0))$~~.

~~注意 $\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)$ 总落在某 n−1 维仿射子空间 $\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(\mathbb{R}^n)$ 内，于是 $\varphi(B_\delta(x_0))$ 到这个仿射子空间的距离不超过 $\varepsilon\|x-x_0\|$~~

Date:
Place:
Reminders



Date:
Place:
Reminders

对于 $x \in E_k$. $\|x-x_0\| \le \frac{l_0}{2^k}$. 于是

$$\|\varphi(x)-[\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0)]\| \le \varepsilon \cdot \frac{l_0}{2^k}.$$

设 $\varphi'(x_0)(\mathbb{R}^n)$ 落在某 $n-1$ 维子空间 V 中.

于是 上式表明 $\varphi(x)$ 到仿射子空间 $\varphi(x_0)+V$ 的距离不超过 $\varepsilon \cdot l_0/2^k$. 另一方面. 设 $M=\max_{x\in D}\|\varphi'(x)\|$. 则

$$\|\varphi(x)-\varphi(x_0)\| \le M \cdot \|x-x_0\| \le M \cdot \frac{l_0}{2^k}.$$

所以 $\varphi(E_k)$ 落在 $\mathbb{R}^n$ 中一个柱形区域 F 内. 其高为 $2\cdot\varepsilon\cdot\frac{l_0}{2^k}$. 底面半径为 $M\cdot\frac{l_0}{2^k}$. 于是（其中 C_{n-1} 为 $n-1$ 维单位球的体积).

$$\mu(F) = 2\varepsilon\frac{l_0}{2^k}C_{n-1}\left(M\frac{l_0}{2^k}\right)^{n-1} = \left(2C_{n-1}l_0^{n}M^{n-1}\right)\frac{\varepsilon}{N^k} = C\cdot\frac{\varepsilon}{N^k}$$

另一方面. F 是 Jordan 可测的. 所以可选一些区间 $J_1,\cdots,J_m$ 使 $F\subseteq J_1\cup\cdots\cup J_m$. 且 $\mu(J_1)+\cdots+\mu(J_m)\le\mu(F)+\frac{\varepsilon}{N^k}$.

于是 $\varphi(E_k)\subseteq J_1\cup\cdots\cup J_m$. 根据 $\varphi(E_k)$ 的取法, 应有 $\frac{\varepsilon_0}{N^k}\le\mu(J_1)+\cdots+\mu(J_m)\le\mu(F)+\frac{\varepsilon}{N^k}=(C+1)\cdot\frac{\varepsilon}{N^k}$. 所以有

$(C+1)\varepsilon \ge \varepsilon_0$. 但 ε 是任取的, 它不可能总满足左边的不等式. 所以 $\varphi(E)$ 必是零测集. □.

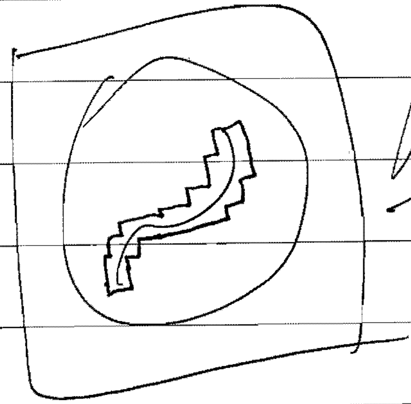
Date:
Place:

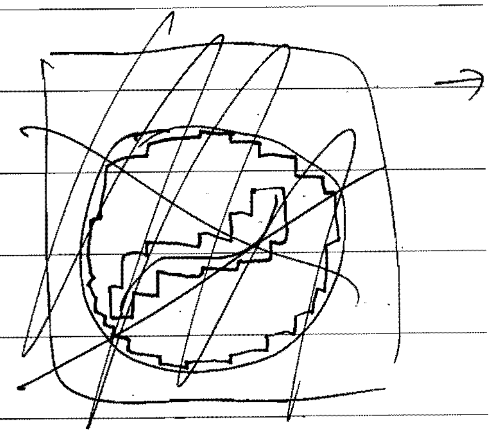
Reminders

E本身未必零测. 但在E附近ψ很小. 所以对积分贡献亦很小. →

不妨仍设 $f\geq 0$. 理由同前. →

仍取某闭区间 $I_0 \supseteq D_x$. →





Date:
Place:

Reminders

定理(加强版换元公式) 设 D_t, D_x 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Jordan 可测闭区域, $\varphi: D_t \to D_x$ 是 C^1 的双射. 记 $\psi: D_t \to \mathbb{R}$ 为 $t \mapsto |\det \varphi'(t)|$. 若 $f \in R(D_x)$, 则 $f\circ\varphi\cdot\psi \in R(D_t)$, 且有

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{D_t} f(\varphi(t))\cdot\psi(t)\,dt$$

证明: ψ 连续, D_t 紧 $\Rightarrow$ ψ 有界 $\Rightarrow$ $f\circ\varphi\cdot\psi$ 有界.

设 $E = \{t\in D_t \mid \psi(t)=0\}$. 若 $t \in E$, 则 $f\circ\varphi\cdot\psi$ 在 t 处一定连续. 若 $f\circ\varphi\cdot\psi$ 在 t 处不连续, 则 φ 在 t 附近是微分同胚, 且 $\varphi(t) \in D(f)$. 于是 $D(f\circ\varphi\cdot\psi)$ 零测. 由 Lebesgue 判据, $f\circ\varphi\cdot\psi \in R(D_t)$.

任取 $\varepsilon > 0$. 因为 $\varphi(E)$ 零测. 于是存在 $I_1, \cdots, I_N$ 使 $\varphi(E) \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_N$, 且 $\sum_1^N \mu(I_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2M_f}$. 其中 $M_f = \sup_{x\in D_x} f(x)$. 将 I_α 的边界延长得 I_0 的网格分划 P_0. $P_0 = P_1\cup P_2\cup P_3$. 并记 $D_x' = \bigcup_{I\in P_2} I$. 于是有

$$\left|\int_{D_x} f(x)\,dx - \int_{D_x'} f(x)\,dx\right| = \sum_{I\in P_1}\int_I f\,dx \leq M_f \frac{\varepsilon}{2M_f} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对于任何介于 D_x' 和 D_x 之间的 Jordan 可测集 F_x. 因为 $f\geq 0$. 同样有 $\left|\int_{D_x} - \int_{F_x}\right| < \varepsilon$.

设 $D_t' = \varphi^{-1}(D_x')$. 取 $\delta_1 = d(D_t', E) > 0$. 由 ψ 的连续性及E的紧性可知 $\exists \delta > 0$ 使得当 $d(t, E) < \delta$ 时. 有 $\psi(t) < \frac{\varepsilon}{2M_f\,\mu(D_t)}$. 若 $\delta > \delta_1$, 总可取 $\delta = \delta_1$, 所以不妨设 $\delta \leq \delta_1$.

记 $E_\delta=\{t\in D_t \mid d(t,E)<\delta\}$. 则有

$$\left|\int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt-\int_{D_t\setminus E_\delta} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_{E_\delta} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt\right| < M_f\cdot \mu(D_t)\cdot\frac{\varepsilon}{2M_f\cdot\mu(D_t)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 δ 的取法知 $D_t'\subseteq D_t\setminus E_\delta$. 于是

若取 $F_x=\varphi(D_t\setminus E_\delta)$. 则有 $D_x'\subseteq F_x\subseteq D_x$

在 $D_t\setminus E_\delta$ 上 $\psi\geq\varepsilon$. 于是 $\varphi: D_t\setminus E_\delta\to F_x$ 是微分同胚. 所以

$$\int_{F_x} f(x)\,dx=\int_{D_t\setminus E_\delta} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt.\quad 所以$$

$$\left|\int_{D_x} f(x)\,dx-\int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt\right|$$

$$\leq\left|\int_{D_x} f(x)\,dx-\int_{F_x} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt-\int_{D_t\setminus E_\delta} f(\varphi(t))\psi(t)\,dt\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$ 所以换元公式成立. □

用类似方法可以证明如下的另一种加强版的换元公式. (具体证明见 Zorich 11.5.7. Thm 2). 因为与前一定理证法很像. 所以这里就省略了.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

定理（另一种加强版的换元公式）设 D_x, D_t 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Jordan 可测闭区域. $S_t \subseteq D_t$. $S_x \subseteq D_x$ 是两个 Lebesgue 零测集. $\varphi: D_t \setminus S_t \to D_x \setminus S_x$ 是 C^1 的微分同胚. 且 $\psi = |\det\varphi'|$ 有界. 若 $f \in R(D_x)$, 则 $f\circ\varphi \cdot \psi \in R(D_t \setminus S_t)$, 且有

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t \setminus S_t} f(\varphi(t))\psi(t)dt.$$

若 φ 可延拓到 D_t 上, 且 ψ 在 D_t 上有界, 则上式又可写为

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t} f(\varphi(t))\psi(t)dt.$$

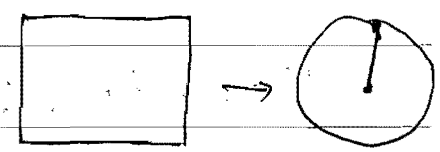
例: $D_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R^2\}$

$D_t = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

$\varphi: (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$　φ 不是单射（$\varphi(r,0) = \varphi(r,2\pi)$, $\varphi(0,\theta) = 0$）

$\psi = r$（存在一点 $(0,0)$ 使 $\psi = 0$）

取 $S_t = \partial D_t$. $S_x = \varphi(S_t)$



则它们满足上述定理条件. 于是

若 $f \in R(D_x)$, 则有

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

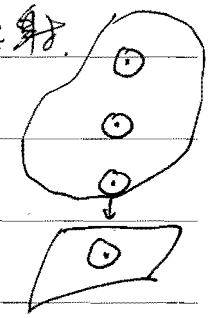
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr.$$

补:广义积分.

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的 Jordan 可测集. 若 $E_k \subseteq E$ 满足: E_k 可测, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$, 则称 $\{E_k\}$ 是 E 的一个穷竭列.

设 $f: E \to \mathbb{R}$. 若 $f \in R(E_k)$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,dx$ 存在, 则称 f 关于 $\{E_k\}$ 的广义积分存在. 若 f 对 E 的任何穷竭列的广义积分都存在且相等, 则称 f 在 E 上广义 Riemann 可积, 并记 $\int_E f(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,dx$.

换元公式还可以有其它变种. 例如不要求 φ 是单射, 但 ψ 必须处处 >0. 此时的 φ 叫覆盖映射. 相应的换元公式应修改为



$$\int_{D_x} f(x)\, n_x\, dx = \int_{D_t} f(\varphi(t))\,\psi(t)\,dt.$$

其中 $n_x = \#\{\varphi^{-1}(x)\}$. (要假设重数是有限的)

§7.5 一些应用.

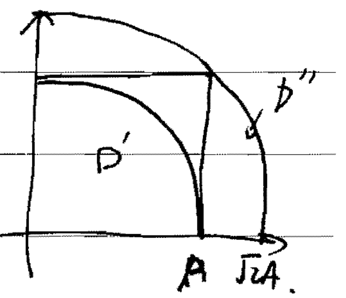
例1. $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A e^{-x^2}dx$.

$$I^2 = \int_0^A e^{-x^2}dx \cdot \int_0^A e^{-y^2}dy = \int_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy.$$

$D = [0,A]\times[0,A]$

$D' \subseteq D \subseteq D''$. $D' = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le A,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$

$D'' = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{2}A,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$.



$$\int_{D'} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^A e^{-r^2} r\,dr\right)d\theta = \frac{\pi}{4}(1-e^{-A^2})$$

$$\int_{D''} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2A^2})$$

Date:
Place:
Reminders

定理：若 $f\ge 0$. 则只要对一个$\{E_k\}$广义R可积. 则f在E上R可积

定理：若E可测. $f\in R(E)$. 则f在E上广义R可积

对广义积分.同样有换元法.分部积分等技术.以后到广义积分的专门章节时会再详细介绍.

Date:
Place:
Reminders

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}(1-e^{-A^2})\le\left(\int_0^A e^{-x^2}dx\right)^2\le\frac{\pi}{4}(1-e^{-2A^2}).$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ □

例2. $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx.$

注意 对$\forall B>0$, $\frac{1}{x}=\frac{e^{-Bx}}{x}+\int_0^B e^{-xt}dt$. 所以

$$I(A)=\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^A\sin x\,dx\left(\frac{e^{-Bx}}{x}+\int_0^B e^{-xt}dt\right)$$

$$=\int_0^B dt\int_0^A \sin x\, e^{-xt}dx+\int_0^A\frac{\sin x}{x}e^{-Bx}dx$$

$$=\int_0^B\left(\frac{1}{1+t^2}-\cos A\frac{e^{-At}}{1+t^2}-\sin A\frac{te^{-At}}{1+t^2}\right)dt+\int_0^A\frac{\sin x}{x}e^{-Bx}dx$$

$$=\arctan B-\cos A\int_0^B\frac{e^{-At}}{1+t^2}dt-\sin A\int_0^B\frac{te^{-At}}{1+t^2}dt+\int_0^A\frac{\sin x}{x}e^{-Bx}dx.$$

令 $A\to\infty$ 得

$$I=\arctan B+\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}e^{-Bx}dx$$ 令$B\to\infty$得

$I=\frac{\pi}{2}$. 于是 $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}e^{-Bx}dx=\frac{\pi}{2}-\arctan B$. □

Date:
Place:
Reminders

例3. $D=[0,1]\times[0,1]$. $I=\int_D \frac{dx\,dy}{1-xy}$.

直接计算得

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\left(\frac{1}{1-xy}\right)=-\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx$$

原函数不是~~初~~初等函数. 利用带积分余项的Taylor公式可知

$$I=\int_0^1\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n+1}+R_n(x)\right)dx \qquad f=-\frac{1}{x}\log(1-x)$$

$$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\int_0^1\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

利用一些初等的技术可以证明最后一项积分满足 $\left|\int\right|<\frac{1}{n!}$ 所以 $I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. 另一方面. 若引入坐标变换 $u=x+y$, $v=y-x$. 则 $J=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$ 所以

$$I=\left(\int_0^1 du\int_{-u}^{u}\frac{dv}{1-\frac{u^2-v^2}{4}}+\int_1^2 du\int_{-(2-u)}^{2-u}\frac{dv}{1-\frac{u^2-v^2}{4}}\right)\Big/2$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{9}+\frac{2\pi^2}{9}\right)\Big/2=\frac{\pi^2}{6}.$$

其他的积分都可通过NL公式算出(原函数是初等函数).

Date:
Place:
Reminders

⑧ 流形~~[illegible]~~及其上的函数.

Plan: ① 流形的体积 (第一类曲线、曲面积分的推广) ✓

单位分解思想 ~~逼割分思想~~ ✓

② 密度概念. 第一类~~[illegible]~~积分. ✓

③ 闭区间上的微积分基本定理 (Gauss. Stokes ⇐ Fubini) ⟶ 有向面积. 定向的概念

④ 带边流形. 诱导定向.

⑤ ~~Stokes公式~~. 微分形式.

⑥. Stokes公式.

⑦ 一些应用

k维体积 (k = dim M). ↗

↑

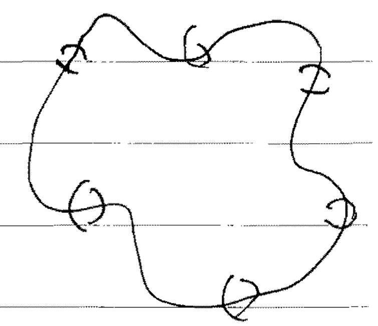
还是改成 k=2 的情况吧.

Date:
Place:
Reminders

§8.1见背面.

§8. 流形上的积分.

§8.1 长度, 面积和体积.



设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个一维流形.

则在M的每点附近可找到一个局部参数化 $\gamma: (a,b) \to M$ 　$\gamma((a,b))$ 中任何两点间曲线的长度可由定积分公式 $\int_{t_1}^{t_2}\|\gamma'(t)\|dt$ 计算. 若 M 被一些 $\gamma_1((a_1,b_1))$, …, $\gamma_N((a_N,b_N))$ 覆盖. 在交界的地方取一些分点 $t_1,\cdots,t_N$.

则 M 的总长度为 $l(M) = l_{t_1t_2}+l_{t_2t_3}+\cdots+l_{t_{N-1}t_N}+l_{t_Nt_1}$.

若M是~~一维~~一般的流形, 仍可取局部参数化 $\varphi: I_\varepsilon^k \to M$.
但这时~~[illegible]~~就没有现成的公式了. 另一方面, 假设已经有了局部体积公式, 如何将这些k维的小片拼成M也是一个新的问题. 本节的目标就是解决这两个问题.
从而给出一般k维流形的体积算法.

首先考虑线性的情况. 若M就是一个 $\mathbb{R}^n$ 中的k维线性子空间. 设 $v_1,\cdots,v_k$ 是M的一组基, 则局部参数化可取为 $\varphi: \mathbb{R}^k \to M$, $(t_1,\cdots,t_k)\mapsto t_1v_1+\cdots+t_kv_k$.
现在, 我们想计算 M上满足 $0\le t_i\le 1$ 的点构成的

Date:
Place:

Reminders

§8.1

~~§8.1 流形及其上的函数~~ 补;

见44页的修正

定义: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ 叫做d维流形, 如果对 $\forall x_0\in M$, 存在 x_0 在 M 中的开邻域 U, 以及微分同胚 $\varphi:\mathbb{R}^d\to U$.

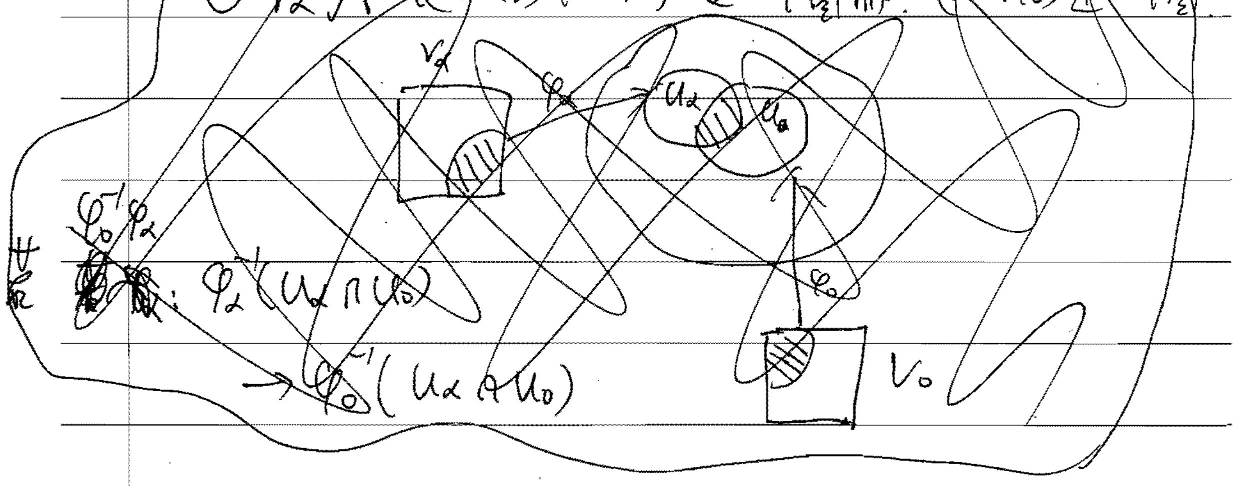
注: ① x_0 在 M 中的开邻域 U 总可写为 $U=M\cap\tilde{U}$, 其中 $\tilde{U}$ 是 x_0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域

② 定义中的 $\mathbb{R}^d$ 可换成任何(微分)同胚于 $\mathbb{R}^d$ 的对象, 如 I_ε^d, B_r^d 等. ~~我们以后将根据需要随意替换~~

同上 → ③ 上述定义与之前的定义是等价的. 因为 $\operatorname{rank}\varphi'=d$, 所以可用秩定理+隐函数将 φ 延拓为 $\mathbb{R}^n\to\tilde{U}$.

④ 每个对 (U,φ) 叫做 M 上的一个坐标卡或图(chart). 若 $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是图构成的集合, 使得 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 构成 M 的开覆盖, 则称 $\mathcal{A}$ 是 M 的一个图册(atlas)

~~⑤ 设 $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是一个图册. (U_β,φ_β) 是一个图~~



Date:
Place:

Reminders

即 $v_1,\dots,v_k$ 张成的平行2k面体

小片的k维体积. 设 $W=V^\perp$, $w_1,\dots,w_l$ $(l=n-k)$ 是 W 的标准正交基. 记

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\{t_1\alpha_1+\dots+t_m\alpha_m \mid 0\le t_i\le 1\}.$$

因为正交性, 可知 $\mu(\Delta(v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_l))=\mu(\Delta(v_1,\dots,v_k))\cdot\mu(w_1,\dots,w_l)$

而 w_i 是标准正交基, 所以 $\mu(w_1,\dots,w_l)=1$. 于是只需求 n 维平行2n面体 $\Delta(v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_l)$ 的体积. 根据 Fubini 定理, $\mu(\Delta(v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_l))=|\det A|$.

其中 $A=(v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_l)$, ($v_i$, w_j 都写为列向量).

于是
$$|\det A|=\sqrt{\det A^2}=\sqrt{\det A^TA}$$
$$=\sqrt{\det\left(\begin{pmatrix}v_1^T\\ \vdots\\ v_k^T\\ w_1^T\\ \vdots\\ w_l^T\end{pmatrix}(v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_l)\right)}$$
$$=\sqrt{\det\begin{pmatrix}J^TJ&0\\0&I\end{pmatrix}}\qquad (J=(v_1,\dots,v_k))$$
$$=\sqrt{\det(J^TJ)}$$
所以有
$$\mu(\Delta(v_1,\dots,v_k))=\sqrt{\det\left(\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_k\end{pmatrix}(v_1,\dots,v_k)\right)}$$

更一般地, 我们引入如下定义.

Date:
Place:
Reminders

定理：$M(\psi(K))$ 的定义与参数化的选取无关。

证明：若有 $\psi': I' \to M$，则

$J=\frac{\partial x}{\partial t}$，$J'=\frac{\partial x}{\partial t'}=\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial t'}$. 设 $\varphi: I' \to I$，于是 $\varphi'=A$

$$\int_{K'}\sqrt{\det (J')^TJ'}\,dt'$$

$$=\int_{K'}\sqrt{\det(A^TJ^TJA)}\,dt'=\int_{K'}\sqrt{\det J^TJ}\cdot|\det A|\,dt'$$

$$=\int_{K}\sqrt{\det J^TJ}\,dt. \qquad \square$$

推广：设 $\rho: M\to\mathbb{R}$ 满足 $\rho\geq 0$，则可视其为"密度"，然后定义 $m_\rho(\psi(K))=\int_K \rho(\psi(t))\cdot\sqrt{\det J^TJ}\,dt$，叫做以 ρ 为密度的 $\psi(K)$ 的质量。

定理：$m_\rho(\psi(K))$ 同样不依赖于参数化的选取。

略

⑤ 若 $A=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)|\alpha\in A\}$，$B=\{(V_\beta,\psi_\beta)|\beta\in B\}$ 是两个同胚的图册，$A\cup B$ 也是图册。若 (U_0,φ_0) 是一个图，则 $A\cup\{(U_0,\varphi_0)\}$ 也是图册。M上所有的图构成的图册叫M的微分结构（此外也许不会引入这个，因为我们的微分结构都是从 $\mathbb{R}^n$ 诱导的，无相容性问题。）

Date:
Place:
Reminders

定义：设流形 M ($\subset\mathbb{R}^n$) 有一个整体参数化：$\psi: I\to M$，其中 I 是 $\mathbb{R}^k$ $(k<n)$ 中的区间。（$\operatorname{rank}\psi'=k, \forall t\in I$）

设 $K\subseteq I$ 是一个 Jordan可测集，定义

$$\mu(\psi(K))=\int_K\sqrt{\det J^TJ}\,dt.$$ 其中 J 是 ψ' 的矩阵。

注：① 在更高级的课程中，我们将定义 $\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的 δ 维（例）Hausdorff 测度为

$$\mu_\delta(E)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l_k^\delta \,\middle|\, l_1,l_2,\cdots \text{是一些}C_1,C_2,\cdots\text{给体的边长，满足 } E\subseteq C_1\cup C_2\cup\cdots\right\}$$

利用证明Sard定理时用的技术，可以证明以上两个定义是等价的，但是过程比较繁琐，因为我们暂时~~对于流形~~不想涉及太多测度论，所以这里就不证了，把第一种积分公式当做定义即可。

② 当 $k=1$ 时，$J=\left(\frac{\partial x^1}{\partial t},\cdots,\frac{\partial x^n}{\partial t}\right)$，于是 $J^TJ=|\psi'|^2$。

所以上述定义与一维时我们用折线逼近的结果一致。

③ 当 $k=n$ 时，J 为方阵，$\sqrt{\det J^TJ}=|\det J|$，上述定义与重积分部分计算区域体积的公式一致。

④ 高维时不能用多边形逼近的方法，见书上 Schwarz 的例子 (Page 90)

Date:
Place:
Reminders

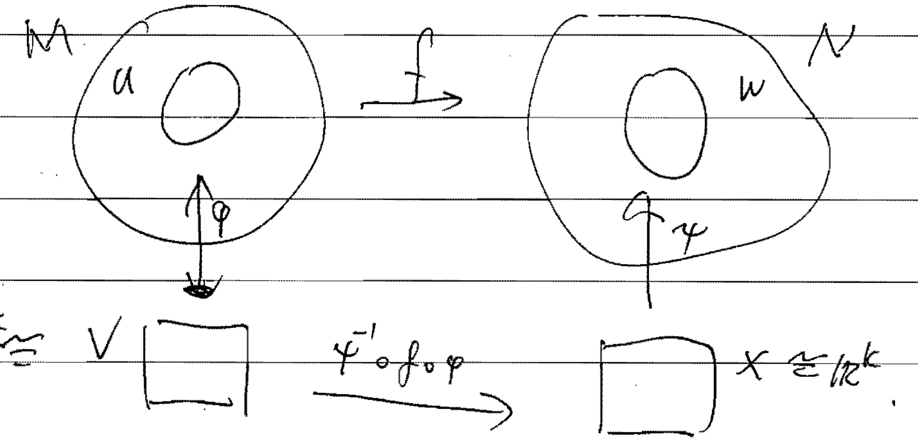
~~定义: 设 M 是流形. $f: M\to\mathbb{R}^n$ 叫~~

定义 ① 设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是 M 的一个图册. 若所有 $\varphi_\alpha: V_\alpha\to U_\alpha$ 都是 C^k 的 ($k=1,2,\dots\infty$) 则称 M 是 C^k 的.

② ~~k之值的维数了. (或者维数按成 d?)~~

设 M 是 k 维 C^k 流形. $f: M\to\mathbb{R}^m$ 叫 C^k 的 如果对任一图 $\varphi: V\to U\subseteq M$. $f\circ\varphi: V\to\mathbb{R}^m$ 是 C^k 的.

③ 设 $M\subseteq\mathbb{R}^n$ 是 C^k 流形. $N\subseteq\mathbb{R}^n$ 是另一个 C^k 流形. $f: M\to N$ 叫 C^k 的 如果对 $\forall x_0\in M$. 记 $y_0=f(x_0)$ 存在 x_0 附近的图 $\varphi: V\to U$. 以及 y_0 附近的图 $\psi: X\to W$, 使 $\psi^{-1}\circ f\circ\varphi: V\to X$ 是 C^k 的.



④ 若存在 $f: M\to N$. $g: N\to M$ 都是 C^k 的. 且 $f\circ g=id_N$. $g\circ f=id_M$. 则称 M, N 微分同胚.

⑤ 当 $k=2$ 时. 设 M 由 $x_i(u,v)$ $i=1,\dots,n$ 给出.

则 $J=\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right)$ $J^TJ=\begin{pmatrix}\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} & \frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\\ \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} & \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$.

则 $\sqrt{\det J^TJ}=\sqrt{EG-F^2}$. 于是

$\mu(\psi(K))=\int_K\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$.

⑥ 当 $k=n-1$ 时. 若 M 由 $x_n=f(x_1,\dots,x_{n-1})$ 给出.

则 $J=\begin{pmatrix}I_{n-1}\\(\nabla f)^T\end{pmatrix}$. $J^TJ=I_{n-1}+(\nabla f)(\nabla f)^T$. 于是

$\sqrt{\det J^TJ}=\sqrt{\det(I_{n-1}+(\nabla f)(\nabla f)^T)}=\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}$. 所以

$\mu(\psi(K))=\int_K\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\,dx_1\cdots dx_{n-1}$.

当 $k=n-1$ 时. 设 M 的定义方程为 $\varphi(x)=0$. 则 $\nabla\varphi$ 处处非零. 于是对任一 $x_0\in M$. 存在某个 i, 使 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_0)\neq 0$. 于是由隐函数定理. 在 x_0 附近 x_i 可表示为 $x_i=g(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)$. 于是 x_0 附近 M 的 n-1 维测度总可按上述公式计算. 将 M 适当分割. 则 M 的测度总可算出 (M 复杂时. 分割也会很复杂). 更高级的办法是单位分解. 但单位分解无法具体计算.

Date:
Place: (续4页)

Reminders

定义：$M \subseteq \mathbb{R}^n$ 叫 d 维流形，如果对 $\forall x_0 \in M$，存在 x_0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域 $\tilde{U}$ 以及映射 $\varphi: \mathbb{R}^d \to \tilde{U}$ 使得

② φ 本身是 immersion，即 $\operatorname{rank} \varphi' = d$

① $\operatorname{Im} \varphi = M \cap \tilde{U} =: U$，且 $\varphi: \mathbb{R}^d \to U$ 是同胚

之前的定义说 $\varphi: \mathbb{R}^d \to U$ 是微分同胚，但此时本身是流形，这里说的是流形到流形的微分同胚，循环定义了，以前将只考虑 $\varphi: \mathbb{R}^d \to U$（忽略 $\operatorname{Im}\varphi$ 之外的点）。

命题：两定义是等价的

证明：旧定义显然符合新定义，下证若 M 满足新定义的条件，则它也满足旧定义。设 $\varphi: \mathbb{R}^d \to \tilde{U}$ 由 $x_i = \varphi_i(t_1 \cdots t_d)$ 给出，因为 $\operatorname{rank}\varphi'$ 满，不妨设 $\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)_{\substack{i=1\cdots d\\ j=1\cdots d}} \neq 0$，于是可反解出 $t_i = f_i(x_1 \cdots x_d)$，现在定义 $\Phi: \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$，

$$(x_1 \cdots x_n) \mapsto \big(f_1(x_1,\cdots,x_d),\cdots,f_d(x_1,\cdots,x_d),\ x_{d+1}-f_{d+1}(x_1\cdots x_d),\ \cdots\ x_n - f_n(x_1 \cdots x_d)\big)$$

则 Φ 正好将 U 映为 $(t_1,\cdots,t_d,0\cdots 0)$，于是 M 按旧定义也是流形。

Date:
Place:

Reminders

⑦ n 维球面 $S^n = \{(x_0,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$

显然 $$\mu(S^n) = 2\int_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \le 1} \frac{dx_1\cdots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$= 2\int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \le 1} dx_1 \cdots dx_{n-1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}} \frac{dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2-x_n^2}}$$

$$= 2\pi \int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \le 1} dx_1 \cdots dx_{n-1} = 2\pi \cdot \mu(B^{n-1})$$

其中 $B^{n-1} = \{(x_1,\cdots x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \le 1\}$，$\mu(B^{n-1})$ 我们以前已经用 Fubini 定理算出，于是不难算出 $\mu(S^n)$。

另一方面，若用球坐标系，则

~~$\mu(S^n) = \int \sqrt{\det J^T J}\, d\theta_1 \cdots d\theta_n$ 其中 J 是 $\frac{\partial x}{\partial \theta}$~~

$$\mu(B^{n+1}) = \int_0^1 r^n dr \int \sqrt{\det J^T J}\, d\theta_1 \cdots d\theta_n$$，于是

$$\mu(B^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \mu(S^n)$$

由 $\mu(B^0) = 1$，$\mu(S^0) = 2$，

$$\mu(B^{n+1}) = \frac{1}{n+1}\mu(S^n), \quad \mu(S^{n+1}) = 2\pi\, \mu(B^n)$$

也可递推地求出所有 $\mu(B^n)$，$\mu(S^n)$。

定义：M 叫带边流形，如果对于 $x_0\in M$，存在 $x_0\in M$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域 $\tilde{U}$，以及 $\varphi: I\to\tilde{U}$ 满足流形定义的①②。其中 I 或者是 $\mathbb{R}^d$，或者是 $\mathbb{H}^d$。

其中 $\mathbb{H}^k=\{x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d \mid x_1\geq 0\}$

（$\mathbb{H}$ 代表 Half）。若 $\varphi^{-1}(x_0)\in\mathring{I}$，则 x_0 叫 M 的内点。否则叫边界点。M 的边界点集合记为 ∂M。

（注意带边流形的边界与它做为 $\mathbb{R}^n$ 子集的边界不是一回事）

以后谈论流形时将默认流形可以带边。带边流形是积分理论需求，因为即使像闭区间这样的集合都不是流形而只是带边流形。

定理：若 M 是 d 维带边流形，则 ∂M 是 $d-1$ 维流形。

证明：按定义验证即可。 □

⑧ 环面（T的）参数方程为 $x=(R+r\cos\theta)\cos\varphi$

$y=(R+r\cos\theta)\sin\varphi$，$z=r\sin\theta$。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=(-r\sin\theta\cos\varphi,\ -r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}=(-(R+r\cos\theta)\sin\varphi,\ (R+r\cos\theta)\cos\varphi,\ 0)$$

$$E=\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}=r^2,\quad F=\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}=0,\quad G=\frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}=(R+r\cos\theta)^2.$$

$$\sqrt{EG-F^2}=r(R+r\cos\theta)\Rightarrow \mu(T)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\, r(R+r\cos\theta)$$

$$=4\pi^2 rR=\boxed{(2\pi r)}\boxed{(2\pi R)}.$$

若求环面内部（$T_{内}$）的体积，将 r 换成 ρ，$0\leq\rho\leq r$。则有

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\rho(R+\rho\cos\theta)，于是$$

$$\mu(T_{内})=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r}\rho(R+\rho\cos\theta)\,d\rho$$

$$=4\pi^2R\cdot\frac{r^2}{2}=(2\pi R)(\pi r^2).$$

它们都是所谓 Pappus-Guldinus 定理的特例。

Date:
Place:

Reminders

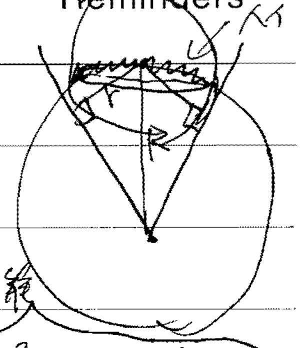
$K_1=2$. $K_2=6$. $K_3=12$. $K_4=24$

$40\le K_5\le 44$. $72\le K_6\le 78$. $126\le K_7\le 134$

$K_8=240$. $K_{24}=196560$.

Date:
Place:

Reminders



⑨ 设 S^2 是半径R的球，有一个毛球公仔

S^2. 半径为 r 的小球 ~~在上截取~~

~~一个小圆盘 求它的面积~~ 与 S^2 球相切的圆锥

$M=\{(R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)\}$. (截取 S^2 上一个小圆盘 M)

$0\le\varphi\le 2\pi$. $\theta_0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. 其中 $\theta_0=$ ~~arcsin~~ $\arccos\frac{r}{R}$

$\frac{\partial}{\partial\theta}$: $(-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$. $E=R^2$. $F=0$

$\frac{\partial}{\partial\varphi}$: $(-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi, 0)$ $G=R^2\cos^2\theta$.

$\mu(M)=2\pi R^2\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta=$ ~~...~~ $2\pi R^2\left(1-\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\right)$.

若取 $R=1$. $r=\frac{1}{2}$. 则 $\mu(M)=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi(2-\sqrt{3})$.

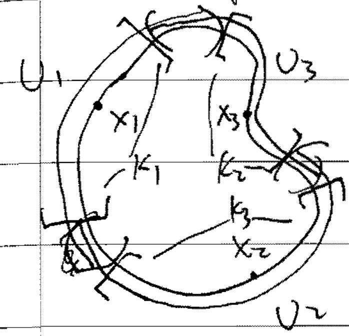
$14\le\frac{4\pi}{\pi(2-\sqrt{3})}=8+4\sqrt{3}<15$. $\Rightarrow$ 一个球最多与14个等大的球相切且它们互不重叠.

(牛顿猜想最多只能12个. Gregory猜想可以放13个. 这个数字叫三维 kissing number. 也叫 Newton—Gregory 问题. 正确答案应该是12. 最早由Schütte和 van der Waerden 于1953年解决. 四维时 kissing number 是24. 2008年由 Musin 解决).

在一维可以通过一些点将M分为几段，然后分别计算 →
但在高维，必须用一些 $k-1$ 维的墙去分割，这会使问题变得非常复杂。对于具体例子(如 S^n)，这样的分割是方便的，但对于一般理论/一些 论，这样的分割很难说清楚。所以我们不得不发展其它办法。

Date:
Place:
Reminders

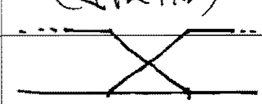
接下来我们考虑局部拼整体的问题。



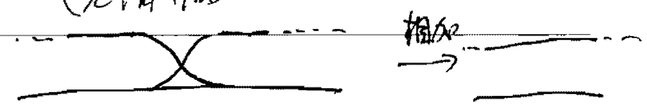
比如左边的流形 M，取 $x_1\in M$，则 x_1 的开邻域 U_1 上存在局部参数化 $\varphi_1: V_1\to U_1$，其中 V_1 是 $\mathbb{R}^k$（或 $\mathbb{R}^k$ 中的开集）。然后 x_2, x_3 附近也有 U_2, U_3 以及 $\varphi_2: V_2\to U_2$，$\varphi_3: V_3\to U_3$。

在 U_1 中存在一个紧集 K_1，使得其中的点仅被 U_1 覆盖。同样，在 U_2，U_3 中存在 K_2, K_3。我们可以认为 K_i 中的部分是纯 U_i 的贡献，而 $U_i\cap U_j$ 中的点则是成分 U_i 和成分 U_j 的某种混合。

(连续版)



(光滑版)



于是可以在每个 U_i 上引入一个密度函数 ρ_i，使得 ρ_i 在 K_i 上恒为1，在 U_i 外恒为零，而在交界部分 $U_i\cap U_j$ $0\le\rho_i\le 1$。它们还要满足 ~~[illegible]~~ 在 $U_i\cap U_j$ 上有 $\rho_i+\rho_j=1$。如果有更多 U 相交，如 $U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_k}$ 非空，且它与其它 U_i 都不交，则有 $\rho_{i_1}+\cdots+\rho_{i_k}=1$。这些要求可统一地写为 $\sum\rho_i=1$。有了这些密度之后，可以分别计算每个成分 U_i 的贡献。因为 ρ_i 在 U_i 外为零，所以这个贡献只在 U_i 的参数化上进行就行了。最后再把所有 U_i 的贡献加起来，就得到 M 的总体积。这就是所谓的单位分解技术(partition of unity)。

这个例叫鼓包函数 (bump function). →

先引入定义较好.

定义①: 设 M 是一个流形. M 上的一个单位分解是指一组函数 $\{\rho_i \mid i\in I\}$ 满足

i) 对任意 $x\in M$. 存在 x 在 M 中的开邻域 V, 使得 $\{i\in I \mid \rho_i$ 在 V 上不恒为零$\}$ 是有限集.

ii) 对 $\forall x\in M$, $\forall i\in I$. $\rho_i(x)\geq 0$. 且 $\sum_{i\in I}\rho_i(x)=1$

② 设 $\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 是 M 的一个开覆盖. $\{\rho_i \mid i\in I\}$ 是一个单位分解. 称 $\{\rho_i \mid i\in I\}$ 是从属于 $\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 的, 如果对 $\forall i\in I$. $\exists \alpha\in A$ 使得

$$\operatorname{supp}\rho_i = \overline{\{x\in M \mid \rho_i(x)\neq 0\}} \subseteq U_\alpha.$$

③ 若②中的 $I=A$. 则称 $\{\rho_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 是以相同指标集从属于 $\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 的单位分解.

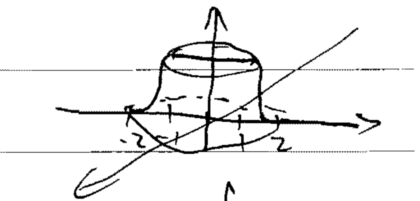
(I 一般总假设是有限或可数的)

我们首先在 $\mathbb{R}^d$ 中准备一些工具.

引理: 存在 C^∞ 函数 $\rho: \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 满足

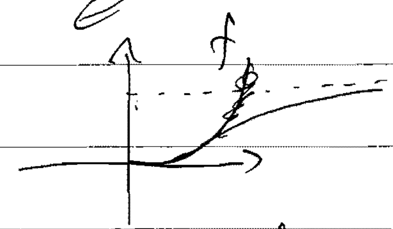
② φ 在 $\overline{B}(0,1)$ 上恒为1. 在 $\overline{B}(0,2)$ 外恒为零.

① 对 $\forall x\in\mathbb{R}^d$ $0\leq \varphi(x)\leq 1$.

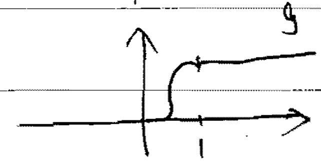


证明: 只需证 $d=1$ 的情况. 一般的 $\rho_d(x_1\cdots x_n)=\rho_1(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$.

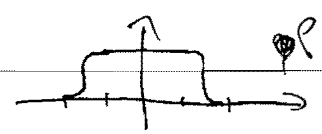
首先考虑 $f(t)=\begin{cases} e^{-1/t} & t>0 \\ 0 & t\leq 0.\end{cases}$



接下来取 $g(t)=\dfrac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$.



最后 $\rho(t)=g(t+2)g(2-t)$.



□

定理: 设 M 是一个紧致 d 维 C^k 带边流形. 则存在 M 上的有限图册 $\mathcal{A}=\{(U_i,\varphi_i) \mid i=1\dots n\}$ 以及以相同指标集从属于 $\mathcal{A}$ 的单位分解 $P=\{\rho_i \mid i=1\dots n\}$.

证明: 对 $\forall x_0\in M$. 取 x_0 附近的坐标卡 $\varphi: I\to U$. 其中 $I=\mathbb{R}^d$ 或 $\mathbb{H}^d$. 定义 $h_{x_0}: U\to\mathbb{R}$. $x\mapsto \rho(\varphi^{-1}(x))$ 其中 ρ 是引理中构造的 C^∞ 函数. 则 $h_{x_0}\in C^k(U)$. 且在 $\varphi(\overline{B}(0,1))$ 上恒

类似方法可证明. 对M的任意开覆盖 存在从属 →
属于它的单位分解.

另一种做法: →

$\rho_1 = h_1$. $\rho_{j+1} = (1-h_1)\cdots(1-h_j)h_{j+1}$ $1\le j\le m-1$

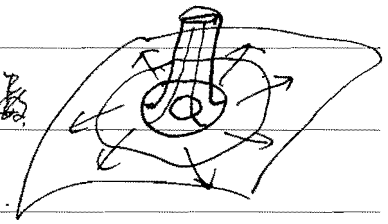
于是 $\sum_{1\le i\le j}\rho_i = 1-\prod_{1\le i\le j}(1-h_i)$ $1\le j\le m$. 特别地

$\sum_{i=1}^{m}\rho_i = 1-\prod_{i=1}^{m}(1-h_i)=1$. 因为 对$\forall p\in M$. 至少有一个$h_i(p)=1$

此方法可避免分母为零的情况.

此条件不需要. 因为 $\varphi^{-1}(\mathrm{supp}(\rho_i))$的边界总是 S^{d-1} 所以自动Lebesgue零测.

为1. 在 $\varphi(\bar{B}(0,2))$ 外恒为零.



于是 h_{x_0} 可零延拓为整个M上的C^k函数

接下来取 $U_{x_0}=\varphi(B(0,3))$. $V_{x_0}=\varphi(B(0,1))$.

则它们是M上的开集且有 $\mathrm{supp}(h_{x_0})\subseteq U_{x_0}$. $h_{x_0}|_{V_{x_0}}\equiv 1$.

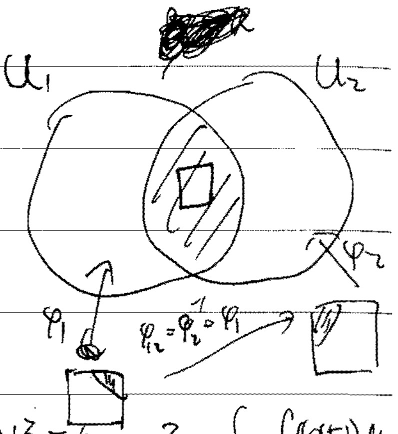
令x_0跑遍M中的点. 则得开覆盖 $\{V_x|x\in M\}$. 取它的子覆盖
$\{V_1,\dots,V_m\}$. 定义 $\rho_i = h_i/(\sum_{i=1}^{m} h_i)$. 则 $\{(U_i,\varphi_i)|i=1\dots m\}$
和 $\{\rho_i|i=1\dots m\}$ 即是所求 □.

注: 当M非紧时. 单位分解亦存在. 但图册可能是无穷的
且指标集可能不同. 我们在数学分析中只考虑紧流形
上的积分. 所以不考虑这种推广.

若 $A=\{(U_i,\varphi_i)|i=1\dots m\}$. $P=\{\rho_i|i=1\dots m\}$ 满足定理
条件. 则简记之为 $A=\{(U_i,\varphi_i,\rho_i)|i=1\dots m\}$. 称为M的一个
图册分解.

定义: 设 M是$\mathbb{R}^n$中的紧致d维C^k带边流形. $A=\{(U_i,\varphi_i,\rho_i)\}$
是一个图册分解 $K_i=\varphi_i^{-1}(\mathrm{supp}(\rho_i))$ 都是Jordan可测的
则 对于每个$i=1\dots m$. 可定义

右边的定义表明我们"可以"按这种方式定义一个 → 与坐标系选取无关的(下面的定理)曲面积分. 下面将说明 事实上我们"只能"这样做.



先看局部的情况. 设 (U_1,φ_1), (U_2,φ_2) 是两个坐标卡. $K\subseteq U_1\cap U_2$. 对于 U_1 上的任一函数 f_1, 我们可以定义

$I_1=\int_{\varphi_1^{-1}(K)} f_1(\varphi_1(t))\,dt$, 对 U_2 上的 f_2, 同样可定义 $I_2=\int_{\varphi_2^{-1}(K)} f_2(\varphi_2(t))\,dt$.

若要说任某种与坐标选取无关的积分. f_1,f_2 应配合好, 使 $I_1=I_2$. 考虑坐标变换 $\varphi_{12}:\varphi_1^{-1}(U_1\cap U_2)\to\varphi_2^{-1}(U_1\cap U_2)$. $=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$ ~~由换元公式应有~~ 它将 $\varphi_1^{-1}(K)$ 映为 $\varphi_2^{-1}(K)$. 由换元公式应有

$$I_2=\int_{\varphi_2^{-1}(K)} f_2(\varphi_2(t))\,dt=\int_{\varphi_1^{-1}(K)} f_2(\varphi_2(\varphi_{12}(s)))\left|\det\varphi_{12}'(s)\right|ds$$

$$=\int_{\varphi_1^{-1}(K)} f_2(\varphi_1(s))\cdot\left|\det\varphi_{12}'(s)\right|ds$$

因为 K 是任取的. 所以若取 $K=B_r(x_0)$. 然后令 $r\to0$, 可知

$f_2(\varphi_1(s))\cdot\left|\det\varphi_{12}'(s)\right|=f_1(\varphi_1(s))$. 这可称为相容条件.

$$m_{\rho_i}(\mathrm{supp}(\rho_i))=\int_{K_i}\rho_i(\varphi_i(t))\sqrt{\det(\varphi_i'(t))^T(\varphi_i'(t))}\,dt.$$

于是 M 的 d 维体积可定义为

$$\mu(M)=\sum_{i=1}^n m_{\rho_i}(\mathrm{supp}(\rho_i)).$$

更一般地. 若 $f:M\to\mathbb{R}$ 是一函数. 若 $f\circ\varphi_i$ 在每个 K_i 上 Riemann 可积. 则可定义

$$\int_M f\,d\sigma=\sum_{i=1}^m\int_{K_i} f(\varphi_i(t))\cdot\rho_i(\varphi_i(t))\sqrt{\det(\varphi_i'(t))^T(\varphi_i'(t))}\,dt.$$

称为 f 在 M 上的第一型曲面积分.

定理: $\int_M f\,d\sigma$ 与图册分解 A 的选取无关.

证明: 设 $A=\{(U_i,\varphi_i,\rho_i)\}_{i=1\cdots m}$ 与 $\{(V_j,\psi_j,\theta_j)\}_{j=1\cdots l}$ 是两个图册分解. 定义 $W_{ij}=U_i\cap V_j$, $\eta_{ij}=\varphi_i|_{\varphi_i^{-1}(W_{ij})}$, $\theta_{ij}=\rho_i\cdot\theta_j$, 则 $\{(W_{ij},\eta_{ij},\theta_{ij})\}$ 构成一个新的图册分解. 接下来都不难将 $\sum_{i=1}^m\int_{K_i}$ 与 $\sum_{j=1}^l\int_{K_j}$ 分解为 $\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^l\int_{K_{ij}}$. □

单位分解几乎不可能用于计算. 所以在真正计算的时候, 只能采取将 M 分为几块的方式进行. 见下文.

Date:
Place:

Reminders

这部分最好移到单位分解前面. 因为比较直观. →
因为直观的想法无法完成 所以只好寻找不直观的办法. 即单位分解

(接上页) 现在,设 $\{(U_i,\varphi_i,\rho_i)\}$ 是一个图册分解
$f_i: U_i\to\mathbb{R}$ 是一组函数 满足在 $U_i\cap U_j$ 上 总会有

~~$f_i(\varphi_i(s))=f_j(\varphi_j(s))\,|\det\varphi_{ij}'|$~~ $(\varphi_{ij}=\varphi_j^{-1}\circ\varphi_i)$

$f_i(p)=f_j(p)\cdot|\det\varphi_{ij}'(\varphi_i^{-1}(p))|$.

则可定义 $\int_M f\,d\sigma=\sum_{i=1}^{m}\int_{K_i} f_i(\varphi_i(t))\,\rho_i(\varphi_i(t))\,dt$.

函数组 $\{f_i\}$ 叫 M上的一个密度.

Whitehead 1940

~~微分拓扑中有一个结论是 C^1 流形一定存在三角剖分. 利用 → 这个剖分的 d-1 维骨架可构造集合S. 然后利用 d 维面可得 M_i. 与剖分还可以要用单纯复形的重心重分 单纯逼近. 与单位分解法一致 可对单位分解的 K 做三角剖分 然后由三角剖分的 K_i 做单位分解 (也许……) 总之需要代数拓扑和微分拓扑里的一些东西.~~

~~Not Necessary~~

的确不容易.
Zorich 说容易,是因为他
允许无穷多个 M_i.

Date:
Place:

Reminders

定义: 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 d 维紧致的 C^k 带边流形.

① $S\subseteq M$ 称为 M上的 Lebesgue 零测集, 如果对任意坐标卡 $\varphi: I\to U$. $\varphi^{-1}(U\cap S)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的 Lebesgue 零测集 (利用 C^1 映射保零测性可证 此定义不依赖于 φ 的选取).

② 若存在零测集 S 以及有限图册 $\{(U_i,\varphi_i)\,|\,i=1,\dots,m\}$ 使得 $M\setminus S=\bigcup_{i=1}^{m} M_i$. 其中 M_i 是(M上)互不相交的开集.

③ $K_i:=\overline{M_i}\subset U_i$.

则称 $\{(U_i,\varphi_i,K_i)\}$ 构成 M 的一个图册剖分.

③ 对于 $f: M\to\mathbb{R}$. 定义

$$\int_M f\,d\sigma=\sum_{i=1}^{m}\int_{K_i} f(\varphi_i(t))\sqrt{\det(\varphi_i'(t))^T(\varphi_i'(t))}\,dt.$$

可以证明, 紧流形上一定存在有限的图册剖分. 且上述定义不依赖于所用的剖分且与单位分解方法定义的一致. 但是我们无法证明这些结果

定理: M上一定存在有限的图册剖分.

证明: 对 $\forall x_0\in M$. 取局部坐标卡 $\varphi: I\to U$. 记 $C_{x_0}=\varphi(\|x\|_\infty\le 1)$. $S_{x_0}=\partial C_{x_0}$. 则 C_x 是 M上的紧集. S_{x_0} 是零测集. 记 $V_{x_0}=\mathring{C}_{x_0}$. 则 $\{V_x\,|\,x\in M\}$ 构成 M上的

Date:
Place:
Reminders

S_i 可能很复杂，如 ~~……~~
$S_1=\{x=0\}$，$S_2=x\sin\frac{1}{x}$ 使得 $M\setminus S$ 之合有无穷多个连通分支（一定是可数的（Lindelöf性））。要解决这个问题，需将 C_x 适当缩小，使其边界具有某种"凸性"。这需要 Riemann 几何中测地凸邻域的概念。

需要单位分解的一些技术性结果，不想讲了。 →

（接上页）之前的曲面积分定义相当于选取了一种特别的密度：

$$f_i(p)=f(p)\cdot\sqrt{\det(\varphi_i'(t))^T\cdot(\varphi_i'(t))}\qquad (t=\varphi_i^{-1}(p))$$

其中 f 是 M 上不依赖坐标系的选取的函数。

若 f_i 是另一组密度，设 $\tilde{f}_i(p)=f_i(p)\Big/\sqrt{\det(\varphi_i'(t))^T(\varphi_i'(t))}$
则不难验证，对于 $\forall\, p\in U_i\cap U_j$，$\tilde{f}_i(p)=\tilde{f}_j(p)$，所以 $\tilde{f}_i$ 实际上定义了 M 上一个不依赖坐标选取的函数，记它为 f，则总有 $f_i=f\cdot\sqrt{\det(\varphi_i'(t))^T\cdot\varphi_i'(t)}$.

所以第一型曲面积分是我们在M上唯一能够定义的与坐标选取无关的积分。后面的第二型曲面积分将对可能的坐标变换进行限制，这时密度可换成更好的一类几何结构，即微分形式。

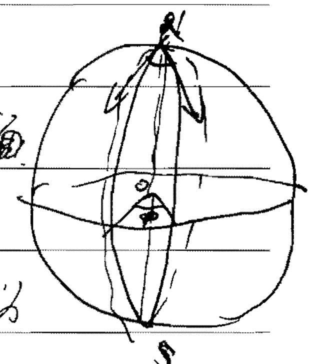
Date:
Place:
Reminders

开覆盖，取有限子覆盖 $V_1,\cdots,V_{m_k}$，记 $S=S_1\cup\cdots\cup S_k$，则 $M\setminus S$ 分成一些 $M_1,\cdots,M_n$ 的不交并，每个 M_i 都落在某个 U_i 中。 □
Wrong!

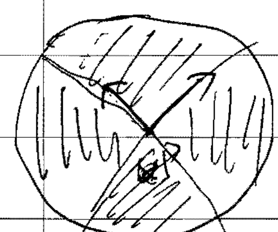
定理：$\int_M f\,d\sigma$ 不依赖于图册剖分的选取。
证明：对于两个 S_1, S_2，取 $S=S_1\cup S_2$ 即可。 □
Wrong! 理由同上。

定理：用图册分解和图册剖分定义的 $\int_M f\,d\sigma$ 是一致的。
证明：有点麻烦，略。 □

例①：设 M 为中心在点 O 半径为 R 的球面。



设 $p\in M$，$v_1, v_2\in T_pM$。



则过 O 与 v_1 存在一个平面将 M 分为两个半球，过 O 与 v_2 存在另一个平面将 M 进一步分为四片。以 OP 为 z 轴建立直角坐标系，则不难算出其中一片的面积与球面面积的比为 $\varphi/2\pi$，其中 φ 是这两个平面两边所夹的角。总面积是 $4\pi R^2$，于是 $S=2\varphi R^2$.

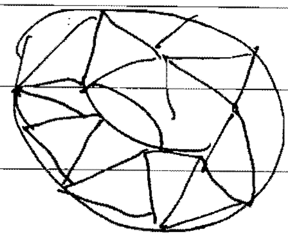
Date:
Place:

Reminders

若P是环面的一个剖分，

则 $V-E+F=0$.

这个数叫P的Euler示性数，在之前Morse理论的复习中也提到过



可以想像P的边是不透明的，面是透明的，O是光源，M是球幕，大圆就是影子.

Date:
Place:

Reminders

② 设M上有个球面三角形S

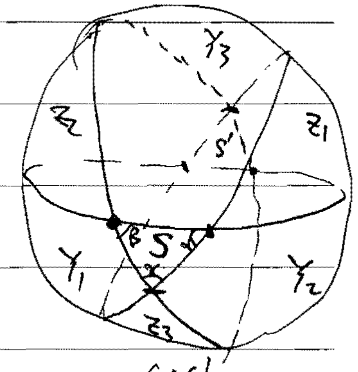
S的边将M分为八片，由对称性

易知 $S=S'$，$y_1=z_1$，$y_2=z_2$，$y_3=z_3$.

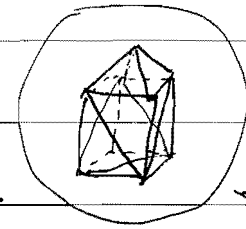
由①知 $S+y_1=2\alpha R^2$，$S+y_2=2\beta R^2$

$S+y_3=2\gamma R^2$. 另一方面 $y_1+y_2+y_3+z_1+z_2+z_3+S+S'=4\pi R^2$.

从这些关系中可解出 $S=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$.



③ 设P是一个凸多面体，有V个顶点，E条边，F个面，则 $V-E+F=2$.



证明：若有某个面不是三角形，则添加一些边使其成为三角形的并。每加一条边，面数加1，顶点数不变，所以若加边前(后)公式成立，则加边后(前)公式也成立。于是假设P的每个面都是三角形。此时有 $3F=2E$.

任取P内一点O，做充分大的球面M，过O与P的每条边做平面，它们交M于一些大圆，这些大圆将球面分为若干部分，每一部分都是球面三角形，它们面积的和为

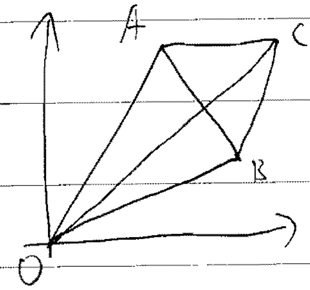
$$4\pi R^2=\sum_{i=1}^{F}(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i-\pi)R^2=\left(\sum_{i=1}^{V}2\pi-\pi F\right)R^2.$$

$\Rightarrow 2V-F=4$，即 $V-E+F=2$. □

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

§8.2 ~~有向面积~~，反称张量与微分形式.



考虑之前的一个结果：三角形ABC的面积：

$$S=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}x_A & y_A\\ x_B & y_B\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_B & y_B\\ x_C & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_C & y_C\\ x_A & y_A\end{vmatrix}\right).$$

设ABC按逆时针排列。当O在△ABC内时，上述3个行列式都大于零。当O在ABC外时（如图）第一个行列式为负，其绝对值为△OAB的面积，令两个则为△OBC和△OCA的面积。于是 $S_{ABC}=-S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA}$. 如果我们规定

$$\vec{S}_{XYZ}=\begin{cases}S_{XYZ} & \text{若}X,Y,Z\text{逆时针排列}\\ -S_{XYZ} & \text{若}X,Y,Z\text{顺时针排列}.\end{cases}$$

则有 $\vec{S}_{ABC}=\vec{S}_{OAB}+\vec{S}_{OBC}+\vec{S}_{OCA}$，此时无论O在三角形的还是外，公式都具有统一的形式。

更一般地，对于$\mathbb{R}^n$中的n个向量 $v_1,\cdots,v_n$，我们可定义

$S(v_1,\cdots,v_n)=\det(v_1,\cdots,v_n)$，它表示$v_1\cdots v_n$所张成的平行2n面体的有向体积(n维)。这个函数具有以下性质：

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$S: (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$.

i) $S(\cdots, v_i' + v_i'', \cdots) = S(\cdots, v_i', \cdots) + S(\cdots, v_i'', \cdots)$ } 线性性

i)' $S(\cdots, \lambda v_i, \cdots) = \lambda S(\cdots, v_i, \cdots)$.

ii) $S(\cdots, v, \cdots, v, \cdots) = 0$. } 反称性

ii)' $S(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -S(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots)$.

iii) $S(e_1, \cdots, e_n) = 1$. } 归一化

反之，映射 S 也由上述性质唯一决定.

我们今后将考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维流形上的有向 k 体积元. 所以，类比上例，给出如下定义.

定义: ① 设 V 是 $\mathbb{R}$-线性空间，一个映射 $\alpha: V^p \to \mathbb{R}$ 称为多重线性的 (p 重)，如果 i) $\alpha(\cdots, v_1+v_2, \cdots) = \alpha(\cdots, v_1, \cdots) + \alpha(\cdots, v_2, \cdots)$.

ii) $\alpha(\cdots, \lambda v, \cdots) = \lambda\alpha(\cdots, v, \cdots)$.

② 设 $\alpha: V^p \to \mathbb{R}$ 是一个多重线性映射. 它叫做反称的，如果它满足 $\alpha(\cdots, v, \cdots, v, \cdots) = 0$ (或 $\alpha(\cdots, v_1, \cdots, v_2, \cdots) + \alpha(\cdots, v_2, \cdots, v_1, \cdots) = 0$)

③ 显然，V 上的反称 p 重线性映射构成一个线性空间，记为 $\Lambda^p(V)$. 并记 $\Lambda(V) = \bigoplus_{p} \Lambda^p(V)$.

56

Date:
Place:
Reminders

$A^*(V)$ 上除了线性空间结构之外，还有一些有趣的运算.

设 $\alpha\in A^p(V)$, $\beta\in A^q(V)$. 我们定义 $\alpha\wedge\beta\in A^{p+q}(V)$ 如下

$$\alpha\wedge\beta(v_1,\cdots,v_p,v_{p+1},\cdots,v_{p+q})$$

$$=\frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}(-1)^{|\sigma|}\alpha(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(p)})\beta(v_{\sigma(p+1)},\cdots,v_{\sigma(p+q)})$$

$$=\sum_{\sigma\in S_{p,q}}(-1)^{|\sigma|}\alpha(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(p)})\beta(v_{\sigma(p+1)},\cdots,v_{\sigma(p+q)}).$$

其中 S_{p+q} 表示 $\{1,\cdots,p+q\}$ 的全部置换. 而

$$S_{p,q}=\left\{\sigma\in S_{p+q}\ \middle|\ \begin{array}{l}\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p),\\ \sigma(p+1)<\sigma(p+2)<\cdots<\sigma(p+q)\end{array}\right\}.$$

定理: 外积运算 $\wedge: A^*(V)\times A^*(V)\to A^*(V)$ 满足

i) $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.

ii) $(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma$.

iii) $\alpha\wedge\beta=(-1)^{|\alpha|\cdot|\beta|}\beta\wedge\alpha$. 其中 $|\alpha|,|\beta|$ 表示 α,β 的重数.

此节参考 Spivak 的小册子.

Date:
Place:

Reminders

设 V 是 $\mathbb{R}$ 线性空间 (如 $V=\mathbb{R}^n$). 函数 $T: \overbrace{V\times\cdots\times V}^{k个}\to\mathbb{R}$

叫 k 重线性的, 如果

i) $T(v_1,\cdots,v_i'+v_i'',\cdots,v_k)=T(v_1,\cdots,v_i',\cdots,v_k)+T(v_1,\cdots,v_i'',\cdots,v_k)$.

ii) $T(v_1,\cdots,\lambda v_i,\cdots,v_k)=\lambda T(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_k)$.

k 重线性映射全体记为 $T^k(V)$. 其元素称为 k-阶张量.

易知 $T^k(V)$ 是 $\mathbb{R}$ 线性空间. 对于 $T\in T^k(V)$, $S\in T^l(V)$.

定义 $T\otimes S\in T^{k+l}(V)$ 如下

$$(T\otimes S)(v_1,\cdots,v_{k+l})=T(v_1,\cdots,v_k)\,S(v_{k+1},\cdots,v_{k+l}).$$

则有
$$(T_1+T_2)\otimes S=T_1\otimes S+T_2\otimes S.$$
$$S\otimes(T_1+T_2)=S\otimes T_1+S\otimes T_2.$$
$$(\lambda T)\otimes S=\lambda(T\otimes S).$$
$$(T\otimes S)\otimes U=T\otimes(S\otimes U).$$ (于是可记 $T\otimes S\otimes U$).

但一般没有 $T\otimes S=S\otimes T$.

注意 $T^1(V)=V^*$. 于是有如下定理.

定理: 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的基. $f_1,\cdots,f_n$ 是 V^* 的对偶基. 则 $\{f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_k}\mid 1\le i_1,\cdots,i_k\le n\}$ 构成 $T^k(V)$ 的基. 特别地. $\dim_{\mathbb{R}}T^k(V)=n^k$. 证明(略). □

Date:
Place:
Reminders

若有 $f: V \to W$. 则有 $f^*: T^k(W) \to T^k(V) \to$

且有 $f^*(T \otimes S) = f^*(T) \otimes f^*(S)$.

另一种定义

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \cdots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})\, \eta(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)})$$

其中 $S_{k,l} = \left\{ \sigma \in S_{k+l} \;\middle|\; \begin{matrix} \sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \cdots < \sigma(k+l) \end{matrix} \right\}$.

Date:
Place:
Reminders

若 $\omega \in T^k(V)$ 满足对 $\forall \sigma \in S_k$,

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_1, \cdots, v_k).$$

则称 ω 是交错的或反对称的. 交错 k 张量的全体记为 $A^k(V)$

显然 $A^k(V)$ 是 $T^k(V)$ 的子空间.

定义 $A: T^k(V) \to A^k(V)$. $T \mapsto A(T)$

$$(A(T))(v_1, \cdots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, T(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}).$$

则有 i) A 是定义好的. 即 $A(T) \in A^k(V)$.

ii) 若 $\omega \in A^k(V)$. 则 $A(\omega) = \omega$.

iii) $A^2 = A$.

对于 $\omega \in A^k(V)$. $\eta \in A^l(V)$. 定义

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} A(\omega \otimes \eta).$$ 则有

$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$.

$\eta \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \eta \wedge \omega_1 + \eta \wedge \omega_2$.

$(\lambda \omega) \wedge \eta = \lambda (\omega \wedge \eta)$.

$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\, \eta \wedge \omega$.

$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$. 下证结合性.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

定理. i) 若 $S \in \ker(A)$, 则 $S \otimes T$ 和 $T \otimes S \in \ker(A)$.

ii)

$$A(A(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = A(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = A(\omega \otimes A(\eta \otimes \theta)).$$

iii)

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!} A(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

证明: i) 只需证 $S \otimes T$ 的情况, $T \otimes S$ 是类似的. 设 $S \in T^k(V)$, $T \in T^l(V)$. 则

$$(k+l)!\,A(S \otimes T)(v_1, \cdots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)})$$

对于任一组 互不相同的 $1 \le j_1, \cdots, j_l \le n$. 定义 $G_{j_1, \cdots, j_l} = \{\sigma \in S_{k+l} \mid \sigma(k+1) = j_1, \cdots, \sigma(k+l) = j_l\}$

$$\text{则} = \sum_{\substack{j_1 \cdots j_l \\ \text{互不相同}}} \left(\sum_{\sigma \in G_{j_1 \cdots j_l}} \mathrm{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) \right) T(v_{j_1}, \cdots, v_{j_l})$$

~~设 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ 满足 $\{i_1 \cdots i_k\} \cup \{j_1 \cdots j_l\} = \{1 \cdots k+l\}$.~~

~~取 $\sigma_0 \in G_{j_1 \cdots j_l}$ 满足 $\sigma_0(1) = i_1, \cdots, \sigma_0(k) = i_k$. 于是~~

~~$\sum_{\sigma \in G_{j_1 \cdots j_l}} \mathrm{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})$~~

~~$= \sum_{\sigma' \in G_{j_1 \cdots j_l} \sigma_0^{-1}} \mathrm{sgn}(\sigma') \mathrm{sgn}(\sigma_0) S(v_{\sigma'(i_1)}, \cdots, v_{\sigma'(i_k)})$. 其中~~

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

设 $\{j_1 \cdots j_l\}$ 的补集为 $i_1 \cdots i_k$，且 $i_1 < \cdots < i_k$，则对 $\forall \sigma \in G_{j_1 \cdots j_l}$，$\sigma(1), \cdots, \sigma(k)$ 分别是 $i_1 \cdots i_k$ 的 置换 σ'，而 $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')\operatorname{sgn}(\sigma_0)$，其中 $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & l \\ i_1 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_l \end{pmatrix}$，于是

$$\sum_{\sigma \in G_{j_1 \cdots j_l}} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})$$

$$= \sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma')\operatorname{sgn}(\sigma_0) S(v_{i_{\sigma'(1)}}, \cdots v_{i_{\sigma'(k)}})$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma_0) \cdot 0 = 0.$$ 所以 $S \otimes T = 0$.

ii) $A(A(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) = A(\eta \otimes \theta) - A(\eta \otimes \theta) = 0$.

所以 $A(\omega \otimes (A(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta)) = 0$.

即 $A(\omega \otimes A(\eta \otimes \theta)) = A(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$. 另一个同理.

iii) 由 ii) 显然. $\square$

由结合性，从此可记 $\omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ 为 $\omega \wedge \eta \wedge \theta$.

定理：设 $e_1 \cdots e_n$ 是 V 的基，$f_1 \cdots f_n$ 是 V^* 的对偶基，则 $\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\}$ 是 $A^k(V)$ 的基.

Date:
Place:

Reminders

证明：设 $\omega \in A^k(V) \subseteq T^k(V)$，于是

$$\omega = \sum_{i_1 \cdots i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}.$$ 于是

$$\omega = A(\omega) = \sum_{i_1 \cdots i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} \frac{1}{k!} f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}$$

所以 $f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}$ 张成 $A^k(V)$. 线性无关性的证法同前. □

推论：$\dim_{\mathbb{R}} A^k(V) = \binom{n}{k}$. 特别地，当 $k>n$ 时 $A^k(V)=0$.

~~记号：$\Lambda^k(V) = A^k(V^*)$. 设 $e_1 \cdots e_n$ 是 V 的基，$f_1 \cdots f_n$ 是对偶基. 因为 $V = V^{**}$，$e_1 \cdots e_n$ 也是 $f_1 \cdots f_n$ 的对偶基，于是 $\Lambda^k(V)$ 的基可选为 $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$ 这里 是由 Cauchy-Binet 公式 定义的东西~~

当 $k=n$ 时 $\dim_{\mathbb{R}} A^n(V)=1$. 事实上，$A^n(V)$ 的 的任一元素可写为 $\omega = c \cdot \det$ 其中 $c = \omega(e_1, \cdots, e_n)$. 每选定一个 ω，就可以认为选定了一种度量 V 中的 n 维有向体积的"方法". c 可认为是某种密度. (即使 $c<0$ 也没关系，可认为此时度量的是电荷，于是有正有负)

Date:
Place:
Reminders

一般地，每选定一个 $\omega \in A^k(V)$ 都可以认为是选定了一种度量高维体积的方法。例如

① $k=1$. $\omega = \omega_1 f_1 + \cdots + \omega_n f_n$.

$\omega(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 \omega_1 + \cdots + x_n \omega_n$. （$\omega_i$ 可视为某种加权参数）

$n=3$

② $k=2$. $\omega = \omega_{12} f_1 \wedge f_2 + \omega_{23} f_2 \wedge f_3 + \omega_{31} f_3 \wedge f_1$.

$V_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. $V_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$. 则

$\omega(V_1, V_2) = \omega_{12}\, f_1 \wedge f_2 (V_1, V_2) + \omega_{23}\, f_2 \wedge f_3 (V_1, V_2) + \omega_{31}\, f_3 \wedge f_1 (V_1, V_2)$

$= \omega_{12}\big(f_1(V_1) f_2(V_2) - f_1(V_2) f_2(V_1)\big) + \omega_{23}\big(f_2(V_1) f_3(V_2) - f_2(V_2) f_3(V_1)\big)$

$+ \omega_{31}\big(f_3(V_1) f_1(V_2) - f_3(V_2) f_1(V_1)\big)$

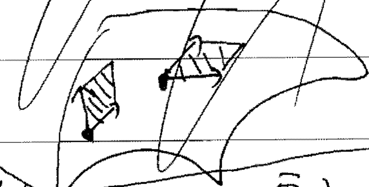
$= \omega_{12}(x_1 y_2 - y_1 x_2) + \omega_{23}(x_2 y_3 - y_2 x_3) + \omega_{31}(x_3 y_1 - y_3 x_1)$.

我们已经知道 $V_1 \wedge V_2 = (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, e_1 \wedge e_2 + (x_2 y_3 - y_2 x_3)\, e_2 \wedge e_3 + (x_3 y_1 - y_3 x_1)\, e_3 \wedge e_1$.

三个系数分别表示平行四边形向三个坐标平面投影的有向面积。所以一个 $A^k(V)$ 中的元素总可视为这些有向面积的加权平均（或线性组合）。

注意 $(V^*)^* = V$. $e_1\cdots e_n$ 也可视为 $f_1\cdots f_n$ 的对偶基. 若记 $\Lambda^k(V) = A^k(V^*)$. 则 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k} \mid 1\le i_1<\cdots<i_k\le n\}$ 构成 $\Lambda^k(V)$ 的基. 不难证明 $\Lambda^k(V)\cong (A^k(V))^*$. 且 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\}$ 和 $\{f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}\}$ 互为对偶基.

~~下面回到流形上. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 (比如) C^1 或 C^∞ 维流形, 则在每一点 $x_0\in M$ 处有一个切空间 $T_{x_0}M$. $T_{x_0}M$ 的一组基有可以给出 … 的体积元, 为了度量这个体积, 我们需要考虑 $T_{x_0}M$ 的对偶空间是什么.~~



下面考虑微分 (微分实际上是对 V^* 的另一种刻画)

设 $x_0\in\mathbb{R}^n$. D 是 x_0 的开邻域, $f\in C^1(D)$. 则有 对 $\forall x\in D$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|).$$

类比一元微分学时的作法. 定义

$$M_{x_0} = \{f\in C^1(D) \mid f(x_0)=0\}.\quad N_{x_0} = \{f\in C^1(D) \mid \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\|x-x_0\|}=0\}.$$

则 $f(x)-f(x_0)\in M_{x_0}$. $(x-x_0)^i\in M_{x_0}$. $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\in N_{x_0}$.

若定义 $\Omega_{x_0} = M_{x_0}/N_{x_0}$. $(df)_x = f(x)-f(x_0)$. 则有

$$df = f'(x_0)\,d(x-x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx^i.$$

这里其实应考虑 germ: $C'_{x_0} = C'(D)/\sim$. 其中 →

$f\sim g \Leftrightarrow$ 存在 x_0 在 D 中的更小的开邻域 U 使 $f|_U = g|_U$.

Date:
Place:
Reminders

dx_i 与 x_0 无关. 所以可省去脚标 x_0.

Date:
Place:
Reminders

这就是多元函数的微分的定义.

现在设 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. 对 $\forall v \in V$. 定义

$(df)_{x_0}(v) = \langle \mathrm{grad} f(x_0), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i$

则 $(df)_{x_0} \in V^*$. 特别地.

$(dx_i)_{x_0}(v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} v_j = v_i$. 所以 $\{(dx_i)_{x_0} \mid i=1\dots n\}$ 正好

构成 $e_1 \cdots e_n$ 的对偶基. 一般地. 则有

$(df)_{x_0}(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (dx_i)_{x_0}(v)$. 于是

$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$ 这是对微分的另一种刻画. 注意 dx^i 与 x_0 无关. 而 df 则随 x_0 变化.

定义: $V=\mathbb{R}^n$ 上的 k阶微分形式 ω 是指在 $D \subseteq V$ 的每一点 x_0 处, 指定了一个 $A^k(V)$ 的的元素 $\omega(x_0)$ (即 $\omega: D \to A^k(V)$). 全体记为 $\Omega^k(V)$.

我们可取 $f_i = dx_i$. 于是对于 $\omega \in \Omega^k(V)$. 总有

$\omega(x) = \sum_{i_1 \cdots i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k}(x) \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. 其中 $i_1 < \cdots < i_k$.

例如 $\omega = df$ 就是一个微分形式. $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, dx^i$.

特别地. 我们规定 $A^0(V) = \mathbb{R}$. 于是 $\Omega^0(V)$ 即 V 上的函数空间.

Ω^k 具有显然的线性空间结构. 对于 $\omega \in \Omega^k$, $\eta \in \Omega^l$.

Date:
Place:

Reminders

因为字母k已做阶数. 字母d 下面另有他用. 所以 →

(以下只考虑 C^∞ 的情况. 其它 C^k 情况是类似的, 但不常用.

再在 v_0 上取值

先把 ω 在 $v_1\cdots v_k$ 上取值得 C^∞ 函数. 然后 d之, 最后对 →

$v_0\cdots v_k$ 做反对称化.

Date:
Place:

Reminders

$\omega\wedge\eta\in\Omega^{k+l}$. 所以微分形式也有外积.

若对任意的 $v_1\cdots v_k\in V$. $\omega(v_1,\dots,v_k)\in C^\infty$. 则称 ω 是 C^∞ 的.

以下总假设 Ω^k 里的元素是 C^∞ 的. (即都限制在 C^∞ 子空间上)

定义: 对于 $\omega\in\Omega^k$. 定义 $d\omega\in\Omega^{k+1}$

$$d\omega(v_0,\dots,v_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle \mathrm{grad}\,\omega(v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_k), v_i\rangle.$$

引理: $d\omega$ 的确是反对称的

证明: 只需证 若 $v_j=v_i$. 则 $d\omega(v_0,\dots v_i,\dots,v_j,\dots v_k)=0$.

$$d\omega(v_0,\dots,v_i,\dots,\underset{j\text{-th}}{v_i},\dots v_k)=(-1)^i\langle \mathrm{grad}\,\omega(v_0,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_{j-1},v_i,v_{j+1}\dots v_k), v_i\rangle$$

$$+(-1)^j\langle \mathrm{grad}\,\omega(v_0,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\dots v_{j-1}v_{j+1}\cdots v_k), v_i\rangle$$

$$=(-1)^i\langle \mathrm{grad}\,\omega(v_0\cdots v_{i-1}v_{i+1}\cdots v_{j-1}\,v_i\,v_{j+1}\cdots v_k)+(-1)^{j+i+j-1-(i+1)+1}\omega(v_0,\cdots v_{i-1},v_{i+1}\cdots v_{j-1}\,v_i\,v_{j+1}\cdots v_k), v_i\rangle$$

$=0$. □

推论: ① 若 $\omega=\omega_1dx_1+\dots+\omega_ndx_n$. 则 $\qquad v_0=a_ie_i$

$d\omega(v_0,v_1)=\langle \mathrm{grad}\,\omega(v_1),v_0\rangle-\langle \mathrm{grad}\,\omega(v_0),v_1\rangle$ $\qquad v_1=b_ie_i$

Date:
Place:
Reminders

例 $d(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$ →

$$=(Q_x-P_y)\,dx\wedge dy+(R_y-Q_z)\,dy\wedge dz+(P_z-R_x)\,dz\wedge dx.$$

Date:
Place:
Reminders

$$=\langle \operatorname{grad}(a_i\omega_i),\ \overset{b_je_j}{\cancel{b_i}}\rangle+\langle \operatorname{grad}(b_j\omega_j),\ a_i e_i\rangle$$

$$=-a_i\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}b_j+b_j\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}a_i=\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}-\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right)a_ib_j$$

所以 $d\omega=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}-\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right)dx_i\wedge dx_j$

$$=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}-\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right)dx_i\wedge dx_j.$$

② 若 $f\in C^\infty$. $\omega\in\Omega^k$. 则 $d(f\omega)=df\wedge\omega+f\,d\omega$.

证明: $d(f\omega)(v_0\cdots v_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle \operatorname{grad} f\omega(v_0\cdots\hat{v_i}\cdots v_k),\ v_i\rangle$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left[\langle \operatorname{grad} f\cdot\omega(v_0\cdots\hat{v_i}\cdots v_k).\ v_i\rangle+f\langle \operatorname{grad}\omega(v_0\cdots\hat{v_i}\cdots v_k).\ v_i\rangle\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\,df(x_i)\cdot\omega(\hat{v_i})+f\,d\omega(v_0\cdots v_k)=(df\wedge\omega+f\,d\omega)(v_0\cdots v_k)$$

□.

③ $d(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})=0$.

证明: $d(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})(v_0\cdots v_{k+1})=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle \operatorname{grad}(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})(\hat{v_i}),\ v_i\rangle$

注意 $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ 与 x 无关. 所以 $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}(\hat{v_i})$ 是常数. 于是 $\operatorname{grad}(\cdot)=0$

□.

④ 设 $\omega=\omega_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$. 则有

Date:
Place:

Reminders

$P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$

$d(\cancel{P\,dx\wedge dy + Q\,dy\wedge dz + R\,dz\wedge dx}) \longrightarrow$

$= (P_x + Q_y + R_z)\,dx\wedge dy\wedge dz.$

Date:
Place:

Reminders

$d\omega = (d\omega_{i_1\cdots i_k})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$

$= \left(\frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$

⑤ $\omega = \omega_1\,dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n + \cdots + \omega_n\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}.$

$d\omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$

$+ (-1)^{n-1}\frac{\partial \omega_n}{\partial x_n}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}\wedge dx_n$

$= \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\partial \omega_n}{\partial x_n}\right)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$

⑥ $d(dx_i\wedge\omega) = -dx_i\wedge d\omega.$

$d(dx_i\wedge\omega) = d(dx_i\wedge\omega_{j_1\cdots j_k}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k})$

$= d\omega_{j_1\cdots j_k}\wedge dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k} = -dx_i\wedge d\omega.$ D.

⑦ $d(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge\omega) = (-1)^k dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge d\omega.$

⑧ $d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta.$ $(\omega\in\Omega^k)$

证明: $d(\omega\wedge\eta) = d(\omega_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge\eta)$

$= d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge\eta + \omega_{i_1\cdots i_k}d(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge\eta)$

$= d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta$ D.

Date:
Place:
Reminders

设 $\Omega^* = \Omega^0 \oplus \Omega^1 \oplus \Omega^2 \oplus \cdots \oplus \Omega^n$. →

则 $d: \Omega^* \to \Omega^*$ 是 Ω^* 上的线性变换. $d^2=0$ 说明 $\mathrm{Im}\, d \subseteq \ker d$.

定义：若 $\omega \in \ker d$，则称 ω 是闭形式（微分）；若 $\omega \in \mathrm{Im}\, d$，则称 ω 是恰当形式.（于是恰当形式总是闭的

问题：闭形式是否一定恰当？

例①: $D=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1(D)$.

则 $d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dx\wedge dy$

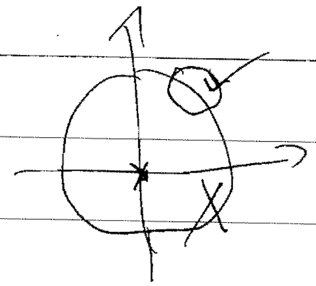
$$= \left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dx\wedge dy = 0.$$

但是不存在 $f\in C^\infty(D)$，使 $\omega = df$. 因为若 $\omega = df$，则

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ 它的解一定是

$f = \arctan\frac{y}{x} + \theta_0$.

但这个函数在D上是不连续的.



商空间 $\ker d/\mathrm{Im}\, d$ 反映了D中"洞"的信息，是一个重要的拓扑不变量.

我们在讲完流形上的微分形式后还要进一步讨论它.

Date:
Place:
Reminders

⑨ $d(d\omega)=0$

$d(d\omega) = d(d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})$

$= dd(\omega_{i_1\cdots i_k})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} - d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge d(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})$

$= d\left(\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$.

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_k}\right) dx_k\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} = 0$. □

下面考虑微分形式的拉回，或称坐标变换. 设 $D_t\subseteq\mathbb{R}^m$. $D_x\subseteq\mathbb{R}^n$.

$\varphi: D_t\to D_x$ 是一个可微映射（不妨设 φ 是 C^∞ 的）

诱导 $\varphi': D_t\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. 定义

$\varphi^*: \Omega^k(D_x)\to\Omega^k(D_t)$. 设 $\omega\in\Omega^k(D_x)$. $t_0\in D_t$

$v_1\cdots v_k\in\mathbb{R}^m$

$\varphi^*(\omega)(t_0)(v_1\cdots v_k) := \omega(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(v_1),\cdots,\varphi'(t_0)(v_k))$

$(=(\varphi'(t_0))^*(\omega(\varphi(t_0)))(v_1\cdots v_k))$

性质：① 若 $k=0$，则 $\varphi^*: \Omega^0(D_x)=C^\infty(D_x)\to\Omega^0(D_t)=C^\infty(D_t)$ 即函数的拉回.

② 设 $e_1\cdots e_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的基. $u_1\cdots u_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的基. 于是

$\varphi'(t_0)(e_j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}u_i$. 于是

Date:
Place:
Reminders

②

$\varphi^*(dx_i) = d(x_i(t)) = d(\varphi^* x_i)$ →

拉回性质补：

若 $\varphi: D_t \to D_x$，$\psi: D_s \to D_t$ 都是可微的，则有映射

~~$\varphi^*: \Omega(D_x) \to \Omega(D_t)$. $\psi^*: \Omega(D_t) \to \Omega(D_s)$. 由定义可以复合~~

函数求导法则知 $(\varphi\circ\psi)^* = \psi^*\circ\varphi^*$.

证明：$(\varphi\circ\psi)^*(\omega)(s_0)(V_1,\cdots,V_k) = \omega(\varphi\circ\psi(s_0))((\varphi\circ\psi)'(s_0)(V_1),\cdots,(\varphi\circ\psi)'(s_0)(V_k))$

$= \omega(\varphi(\psi(s_0)))(\varphi'(\psi(s_0))\psi'(s_0)(V_1),\cdots,\varphi'(\psi(s_0))\psi'(s_0)(V_k))$

$= \psi^*(\varphi^*(\omega))(s_0)(V_1,\cdots,V_k)$ □.

Date:
Place:
Reminders

$\varphi^*(dx_i)(t_0)(V_j e_j) = (dx_i)(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(V_j e_j))$

$= (dx_i)(V_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} u_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} V_j$. 所以

$\varphi^*(dx_i) = \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j$. 它与 $d(x_i(t)) = \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j$ 恰好

是一致的. 所以拉回运算的确可视为函数变换或代入（或换元

③ 设 $\omega\in\Omega^k(D_x)$，$\eta\in\Omega^l(D_x)$. 则 $\varphi^*(\omega\wedge\eta) = \varphi^*(\omega)\wedge\varphi^*(\eta)$.

证明：$\varphi^*(\omega\wedge\eta)(t_0) = (\varphi'(t_0))^*(\omega\wedge\eta)(\varphi(t_0))$

$= (\varphi'(t_0))^*\omega(\varphi(t_0)) \wedge (\varphi'(t_0))^*\eta(\varphi(t_0))$

$= \varphi^*(\omega)(t_0)\wedge\varphi^*(\eta)(t_0)$ □.

④ 对于 $f\in C^\infty(D_x)$. $\varphi^*(df) = d(\varphi^* f)$

证明：$\varphi^*(df)(t_0) = \varphi^*(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t_0)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_0) dt_j$

$= \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial t_j} dt_j = d(f\circ\varphi)(t_0) = d(\varphi^* f)(t_0)$ □.

⑤ 对于任意的 $\omega\in\Omega^k(D_x)$. $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$.

$\varphi^* d\omega = \varphi^*(d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})$

$= d(\varphi^*\omega_{i_1\cdots i_k})\wedge d(\varphi^*(x_{i_1}))\wedge\cdots\wedge d(\varphi^*(x_{i_k}))$

$$= d(\varphi^* w_{i_1\cdots i_k}) \wedge d(\varphi^*(x_{i_1})) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^*(x_{i_k})) = d(\varphi^* w) \quad \square.$$

⑥ 若 $\varphi: D_t \to D_x$ 是微分同胚, 则

$$\varphi^*(f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = f(\varphi(t)) \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_{j_1}} dt_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial x_n}{\partial t_{j_n}} dt_{j_n} \right)$$

$$= f(\varphi(t)) \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{\partial x_1}{\partial t_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial t_{\sigma(n)}} \right) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$$

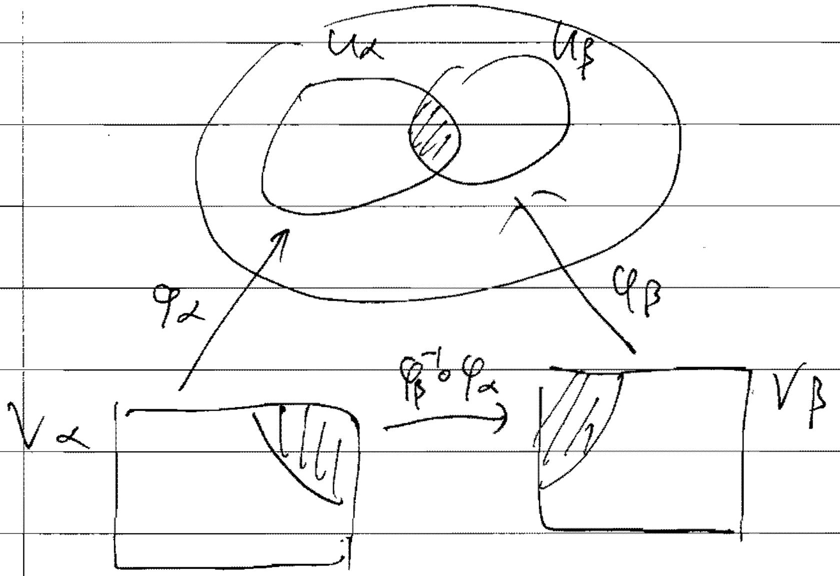
$$= f(\varphi(t)) \det(\varphi'(t))\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$$

这正是换元公式中的被积函数. 但 det 上没有绝对值

§8.3 流形上的微分形式

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维带边流形. 为简单起见, 我们总假设 M 是 C^∞ 的. M 上的光滑函数 f 定义为 $f: M \to \mathbb{R}$, 使得在任何坐标卡 $\varphi_\alpha: V_\alpha \to U_\alpha$ 上, $f \circ \varphi_\alpha: V_\alpha \to \mathbb{R}$ 都是光滑的. 这同时也给出 M 上的(光滑)零形式的定义. 更一般地, 不难想像可将 M 上的 k 阶微分形式定义为 $\omega: M \to A^k(\mathbb{R}^n)$. 但是事实证明这不是一种好的定义. 比如 $M = \mathbb{R}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^d$ 中的k形式应该是 $\binom{d}{k}$ 维的. 但若按错误的一个定义, 则成了 $\binom{n}{k}$ 维. 维数都对不上了.



按此定义, M上的微分形式依赖于它在 $\mathbb{R}^n$ 的嵌入方式. 这显然是不好的. 下面我们将给出一种不依赖于嵌入方式的定义.

首先还是回顾一下函数的定义. 设 $f: M\to\mathbb{R}$ 是一个函数. $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是一个图册. 其中 $\varphi_\alpha: V_\alpha\to U_\alpha$. V_α 是 $\mathbb{R}^d$ 或 $\mathbb{H}^d$. 定义 $f_\alpha = f\circ\varphi_\alpha: V_\alpha\to\mathbb{R}$. 则在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上有

$f(x) = f_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x)) = f_\beta(\varphi_\beta^{-1}(x))$. 设 $\varphi_\alpha^{-1}(x)=t$. 则

$f_\alpha(t) = f_\beta(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha(t))$. 其中 $\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$ 叫从 U_α 到 U_β 的
(粘合条件) 转移函数.

每给定一个 f, 就得到一组满足上述粘合条件的 f_α. 反之, 若有一组 $f_\alpha: V_\alpha\to\mathbb{R}$. 满足对 $t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 有 $f_\alpha(t)=f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(t))$. 对于 $x\in M$, 若 $x\in U_\alpha$ 定义 $f(x)=f_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x))$. 则可知此定义不依赖于 U_α 的选取. 于是 $\{f_\alpha\}$ 反过来也决定了 f. 所以 M上的0阶形式可用每个 V_α 上的0阶形式通过粘合条件定义出来.

一般地, 若有一组 $\omega_\alpha\in\Omega^k(V_\alpha)$ 满足

$\omega_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^*(\omega_\beta)$. 我们就说 $\{\omega_\alpha\}$ 定义了M上的一个粘合微分形式. 它的几何意义可按如下方式理解:

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$(t_1,\dots,t_d)\mapsto x_i(t)$. $i=1,\dots,n$.

设 $x_0\in M$. $\varphi: V\to U$ 是 x_0 附近的局部坐标系.

于是 $T_{x_0}M$ 有基 $e_i=\frac{\partial\vec{x}}{\partial t_i}(t_0)$ $(i=1,\dots,d)$. 对于 $T_{x_0}M$ 中的任一向量 v. $v=\sum_{i=1}^{d}v_i e_i$. 若有 k 个 v: $v_1,\dots,v_k$. 则可定义 $\omega(t_0)(v_1,\dots,v_k)$. 其中 $\omega\in\Omega^k(V)$.

若 $x_0\in U_\alpha\cap U_\beta$. 记 $t_1\cdots t_d$ 是 U_α 中的坐标. $s_1\cdots s_d$ 是 U_β 中的坐标. $e_i=\frac{\partial\vec{x}}{\partial t_i}(t_0)$. $t_0=\varphi_\alpha^{-1}(x_0)$.

$f_i=\frac{\partial\vec{x}}{\partial s_i}(s_0)$. $s_0=\varphi_\beta^{-1}(x_0)$. ~~设 $\omega_\alpha\in\Omega^k(V_\alpha)$, $\omega_\beta\in\Omega^k(V_\beta)$~~

$(i=1,\dots,k)$

对于 $v_i\in T_{x_0}M$. $v_i=\sum_{j=1}^{d}v_{ij}e_j=\sum_{j=1}^{d}u_{ij}f_j$.

~~$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d}v_i\frac{\partial\vec{x}}{\partial t_i}(x_0)=\sum_{i=1}^{d}v_i\frac{\partial s_j}{\partial t_i}\frac{\partial\vec{x}}{\partial s_j}$~~

~~$=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}u_i\frac{\partial t_j}{\partial s_i}\frac{\partial\vec{x}}{\partial t_j}\Rightarrow v_i$~~

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{d}v_{ij}\frac{\partial\vec{x}}{\partial t_j}(x_0)=\sum_{j=1}^{d}\sum_{l=1}^{d}v_{ij}\frac{\partial s_l}{\partial t_j}\frac{\partial\vec{x}}{\partial s_l}$$

$$\Rightarrow u_{il}=v_{ij}\frac{\partial s_l}{\partial t_j}.$$ ~~于是有~~

~~$\varphi_{\alpha\beta}^*(\omega_\beta)(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))(v_1,\dots,v_k)$~~

$=\omega_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))(v_1\cdots v_k)$

在 U_α 上, 可定义 $\omega_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))(v_1,\dots,v_k)$. 其中 v_i 按 e_i 展开.

在 U_β 上 可定义 $\omega_\beta(\varphi_\beta^{-1}(x_0))(v_1,\dots,v_k)$ 其中 v_i 按 f_i 展开

$=\omega_\beta(\varphi_\beta^{-1}(x_0))(u_1\cdots u_k)$.

Date:
Place:
Reminders

补：若 ω 与 $\{\eta\}$ 满足粘合条件 $\longrightarrow$

则 $\{\omega_\alpha \wedge \eta_\alpha\}$ 也满足，可定义

$(\omega\wedge\eta)_\alpha = \omega_\alpha \wedge \eta_\alpha$.

Date:
Place:
Reminders

下面说明，若 ω_α 与 ω_β 满足 $\omega_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^* \omega_\beta$，则上述两个数值相等：

$$\omega_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))(v_1,\cdots,v_k)$$
$$= \varphi_{\alpha\beta}^*(\omega_\beta)(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))(v_1,\cdots,v_k)$$
$$= \omega_\beta(\varphi_{\alpha\beta}\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_0))(\varphi_{\alpha\beta}'(v_1),\cdots,\varphi_{\alpha\beta}'(v_k))$$
$$= \omega_\beta(\varphi_\beta^{-1}(x_0))(u_1,\cdots,u_k).$$

所以，给定的一组满足 $\omega_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta$ 的 $\{\omega_\alpha\}$ 后，可在每个 $x_0\in M$ 的切空间上定义一个 k 阶反对称张量：

$\omega(X_1,\cdots X_k) := \omega_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))(v_1,\cdots,v_k)$.

这个定义不依赖于坐标卡 $\varphi_\alpha: V_\alpha\to U_\alpha$ 的选取，因此定义了 M 上的一个整体的几何对象。

M 上的 k 阶微分形式全体记为 $\Omega^k(M)$，特别地 $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

定理：设 $\omega=\{\omega_\alpha\}$ 是 M 上的 k 阶微分形式，则 $\{d\omega_\alpha\}$ 也满足粘合条件，于是定义了一个 M 上的 $k+1$ 阶微分形式，记为 $d\omega$.

证明：$\varphi_{\alpha\beta}^*(d\omega_\beta) = d(\varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta) = d\omega_\alpha$. □

Date:
Place:
Reminders

d的一切性质对流形上的微分形式也成立.

定理：设M是流形 $\{\varphi_\alpha:\tilde{U}_\alpha\to U_\alpha\}$ 是M上的图册.

N是另一个流形 $\{\psi_\beta:\tilde{V}_\beta\to V_\beta\}$ 是N上的图册.

F: M→N 是一个光滑映射. $\overset{\{\omega_\beta\}}{\omega}\in\Omega^k(N)$. 定义 $F^*\omega\in\Omega^k(M)$

如下：① 取 $W_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap F^{-1}(V_\beta)$. $\tilde{W}_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$.

$\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha|_{\tilde{W}_{\alpha\beta}}$. 则 $\varphi_{\alpha\beta}:\tilde{W}_{\alpha\beta}\to W_{\alpha\beta}$ 也是M上的图册.

定义 $(F^*\omega)_{\alpha\beta}=(\psi_\beta^{-1}\circ F\circ\varphi_\alpha)^*\omega_\beta$.

证明：只需验证粘合条件 $(F^*\omega)_{\alpha\beta}=\varphi^*_{\alpha\beta\alpha'\beta'}(F^*\omega)_{\alpha'\beta'}$.

$\cancel{(F^*\omega)_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha^*\circ F^*\circ(\psi_\beta^{-1})^*(\omega_\beta)}$ $\quad (F^*\omega)_{\alpha\beta}=(\psi_\beta^{-1}\circ F\circ\varphi_\alpha)^*\omega_\beta$

$\cancel{(F^*\omega)_{\alpha'\beta'}=\varphi_{\alpha'}^*\circ F^*\circ(\psi_{\beta'}^{-1})^*(\omega_{\beta'})}$ $\quad (F^*\omega)_{\alpha'\beta'}=(\psi_{\beta'}^{-1}\circ F\circ\varphi_{\alpha'})^*\omega_{\beta'}$.

~~由~~ 由 ω_β 的粘合条件：$(\psi_{\beta'}^{-1}\circ\psi_\beta)^*\omega_{\beta'}=\omega_\beta$. 于是

$$(F^*\omega)_{\alpha\beta}=(\psi_\beta^{-1}\circ F\circ\varphi_\alpha)^*(\psi_{\beta'}^{-1}\circ\psi_\beta)^*\omega_{\beta'}=(\psi_{\beta'}^{-1}\circ F\circ\varphi_\alpha)^*\omega_{\beta'}$$

$$=(\psi_{\beta'}^{-1}\circ F\circ\varphi_{\alpha'}\circ\varphi_{\alpha'}^{-1}\circ\varphi_\alpha)^*\omega_{\beta'}$$

$$=(\varphi_{\alpha'}^{-1}\circ\varphi_\alpha)^*(F^*\omega)_{\alpha'\beta'}.$$ 由 $\varphi_{\alpha\beta}$ 的定义知

$\varphi_{\alpha'}^{-1}\circ\varphi_\alpha=\varphi_{\alpha'\beta'}^{-1}\circ\varphi_{\alpha\beta}$. 所以粘合条件满足. □

事实上: $i^*: \Omega^k(D) \to \Omega^k(M)$ 是满射.

于是 $\Omega^k(M) \cong \Omega^k(D)/\ker(i^*)$

证明: 根据M的定义. 在M的每一点可选局部坐标系 $(t_1,\cdots,t_d,t_{d+1},\cdots,t_n)$ 其中 $t_1,\cdots,t_d$ 是M上坐标. $t_{d+1},\cdots,t_n$ 可表示法方向坐标. 于是M上的k形式 $\omega=\omega_{i_1\cdots i_k}dt_{k_1}\cdots dt_{k_d}$ 可直接看成D上的k形式. 它被i拉回后仍是它自己. 所以 i^* 是满射. □

记 $\omega_\alpha = f(t)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d$. 则

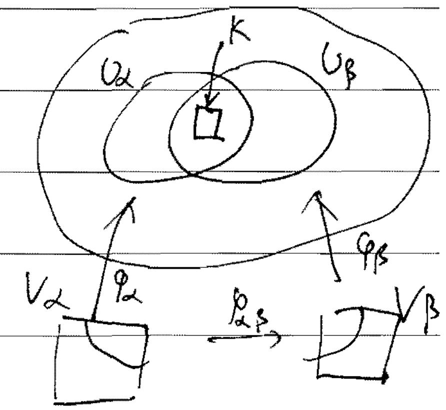
$$\int_K\omega = \int_{\varphi_\alpha^{-1}(K)} f(t)\,dt_1\cdots dt_d.$$

拉回映射 $F^*: \Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$ 的一切性质对流形上的形式也成立.

例①: 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个区域 $M\subseteq D$ 是一个d维流形. 于是 $i: M\to D$ $x\mapsto x$ 是一个光滑映射. 设 $\omega\in\Omega^k(D)$, 则 $i^*\omega\in\Omega^k(M)$. $i^*\omega$ 其实就是ω在M上的限制.

~~② 类似地. 设M是带边流形. $i:\partial M\to M$, $x\mapsto x$. 则M上的k形式ω可限制在∂M上得$i^*\omega$.~~

§8.4 微分形式的积分.



设M是一个d维流形. $\varphi_\alpha: V_\alpha\to U_\alpha$ 和 $\varphi_\beta: V_\beta\to U_\beta$ 是两个坐标卡. $K\subseteq U_\alpha\cap U_\beta$ 是一个紧集. 使得 $\varphi_\alpha^{-1}(K)$ 是 V_α 中的Jordan可测集.(于是 $\varphi_\beta^{-1}(K)$ 也是 V_β 中的Jordan可测集). 设 $\omega=\{\omega_\alpha\}$ 是M上的d形式, 于是可定义

$$\cancel{\int_K\omega = \int_{\varphi_\alpha^{-1}(K)}\omega_\alpha}$$

这个定义有一点问题: 它或多或少地依赖坐标卡的选取!

记 $I_\alpha = \int_{\varphi_\alpha^{-1}(K)} \omega_\alpha$. $I_\beta = \int_{\varphi_\beta^{-1}(K)} \omega_\beta$. 注意 $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha$.

于是 $\varphi_{\alpha\beta}(\varphi_\alpha^{-1}(K)) = \varphi_\beta^{-1}(K)$. 而 $\omega_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^*(\omega_\beta)$.

~~由换元式~~ $\cancel{\int_{\varphi_\alpha^{-1}(K)} \omega_\alpha =}$

记 $\omega_\alpha = f(t)\, dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d$

$\omega_\beta = g(s)\, ds_1\wedge\cdots\wedge ds_d$.

~~则~~ $\cancel{\int_{\varphi_\alpha^{-1}(K)} f(t)\,dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d = \int_{\varphi_\beta^{-1}(K)} f}$

由换元公式,有

$$I_\beta = \int_{\varphi_\beta^{-1}(K)} g(s)\,ds_1\cdots ds_d = \int_{\varphi_\alpha^{-1}(K)} g(\varphi_{\alpha\beta}(t))\,|\det\varphi'_{\alpha\beta}|\,dt_1\cdots dt_d.$$

由 d形式的拉回公式. $f(t) = g(\varphi_{\alpha\beta}(t))\det\varphi'_{\alpha\beta}(t)$. 于是

$$I_\alpha = \int_{\varphi_\alpha^{-1}(K)} g(\varphi_{\alpha\beta}(t))\det\varphi'_{\alpha\beta}(t)\,dt_1\cdots dt_d$$

所以 $I_\alpha = I_\beta$ 当且仅当 $\det\varphi'_{\alpha\beta} > 0$. ($\varphi'_{\alpha\beta}$ 处处非零)

要想在流形上定义微分形式的积分. 需要一种特殊的图册 $\{\varphi_\alpha: V_\alpha\to U_\alpha\}$ (使得对 $\forall\alpha,\beta$. $\det\varphi'_{\alpha\beta}$ 在 $\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上恒大于零.

定义①: 若一个图册 $A=\{\varphi_\alpha: V_\alpha\to U_\alpha\}$ 满足对 $\forall t\in\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 有 $\det\varphi'_{\alpha\beta}(t) > 0$. 则称 A 是定向的.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

② 若M上存在一个定向图册，则称M是可定向的。

引理：设M可定向，A、B是两个定向图册。若A∪B仍是定向的，则称A、B等价，则M上的定向图册可分为两个等价类。

证明：首先证明这的确是等价关系，只有传递性需要证明。

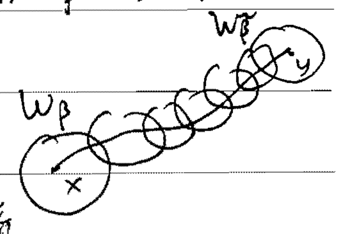
设 $A=\{\varphi_\alpha: V_\alpha\to U_\alpha\}$，$B=\{\psi_\beta: W_\beta\to X_\beta\}$，$C=\{\theta_\gamma: Z_\gamma\to Y_\gamma\}$.

AB等价意味着任何 $\det(\psi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha)'>0$.

BC等价意味着任何 $\det(\theta_\gamma^{-1}\psi_\beta)'>0$. 于是由复合函数求导法则及行列式性质有 $\det(\theta_\gamma^{-1}\varphi_\alpha)'=\det(\theta_\gamma^{-1}\psi_\beta)'\cdot\det(\psi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)'>0$.

~~现在任取一个定向图册A，对于另一个图册B，设ψ: W→X ∈ B，若A∪{ψ}仍定向，则称ψ与A相容。~~

用类似方法可证明，若某个ψ_β与某个φ_α定向相容，则ψ_β与整个A定向相容；若另有$\psi_{\beta'}$与ψ_β的值域相交，则$\psi_{\beta'}$也与A定向相容。对于任意$\psi_{\tilde\beta}\in B$，取$x\in W_\beta$，$y\in W_{\tilde\beta}$，作道路 $x\xrightarrow{\gamma}y$，取一串W覆盖γ，则沿途的每个ψ都与A定向相容。



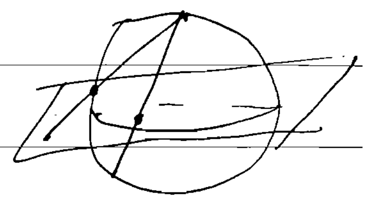
于是B中的每个ψ都与A相容，所以B与A等价。

若ψ_β与φ_α不相容，将B中每个坐标卡的第一个变量变号，则

Date:
Place:
Reminders

球极投影: $M=S^2$. $N=(0,0,1)$. $S=(0,0,-1)$ →

$U_1=M\setminus S$. 则存在



$\varphi_1:\mathbb{R}^2\to U_1$ $(u,v)\mapsto(x,y,z)$

其中 $(u=\frac{x}{1-z}, v=\frac{y}{1-z})$ 或

$$(x,y,z)=\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$$

同理取 $U_2=M\setminus N$. 则有 $\varphi_2:\mathbb{R}^2\to U_2$. $(\tilde u,\tilde v)\mapsto(x,y,z)$

$\tilde u=\frac{x}{1+z}$, $\tilde v=\frac{y}{1+z}$. $(x,y,z)=(\cdots)$

注意 $u^2+v^2=\frac{1+z}{1-z}$, $\tilde u^2+\tilde v^2=\frac{1-z}{1+z}$. 于是可解得

$\tilde u=\frac{u}{u^2+v^2}$, $\tilde v=\frac{v}{u^2+v^2}$. $J=\det\left(\frac{\partial(\tilde u,\tilde v)}{\partial(u,v)}\right)=-\frac{1}{(u^2+v^2)^2}$

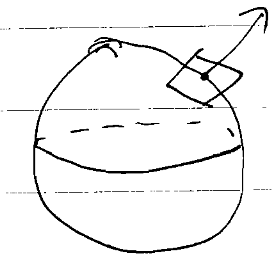
所以 φ_1与φ_2不是定向相容的. 但是若交换 $\tilde u,\tilde v$ 的顺序, 则定向相容. 从而S^2可定向.

Date:
Place:
Reminders

新的仍是定向图册. 且 φ_β与φ_α相容. 所以新的与A等价. 所以等价类只有两个. □

设M连通可定向. 则每个图册等价类叫一个定向. 指定了定向或给定了定向图册的M叫已被定向的.

例: ① $M=\{x^2+y^2+z^2=1\}$.



另一种方法. M上有法向量 $n=(x,y,z)$.

$\|n\|=1$. 对于任一点 $x_0\in M$. 以及x_0附近的坐标卡 $\varphi:(u,v)\mapsto(x,y,z)$. 则有切向量 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial v}$. 若 $(n,\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v})$ 与$\mathbb{R}^3$的e_1,e_2,e_3的转移矩阵行列式非负. 则称φ是与$\mathbb{R}^3$定向相容的. 易知, 若φ_1,φ_2都与$\mathbb{R}^3$定向相容, 那么它们之间也相容. 由此可构造M上的定向图册.

② 更一般地. 若M由$\{f(x)=0\}$给出. 且 ∇f 在M上处处非零. 则M是可定向流形. 其定向图册的构造与上例完全相同. 特别地. 环面是定向的. S^n是定向的.

③ Mobius 带. Klein 瓶不是可定向的. 因为若可定向, 则可选取处处非零的连续法向量. 但它们上面没有这种法向量.

④ 一般地 M可定向 ⟺ M上存在处处线性无关的 $n-d$ 个法向量.

$\dim M=d$. $M\subseteq\mathbb{R}^n$

类似于第一型曲面积分，此处也可用剖分定义 →
但是需要定向剖分的概念，这又需要谈到定向，以后再说。

特别地，若 $\omega = df$，则

$$\int_M \omega = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} \gamma_i'(t)dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

这是NL公式的推广。

Date:
Place:
Reminders

现在可以定义流形上微分形式的积分。

定义：设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 d 维定向、紧致带边流形，ω 是 M 上的 d 形式，$A=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \rho_\alpha)\}$ 是 M 上的定向图册分解，$\omega=\{\omega_i\}$ 相应的分解。定义

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi_i^{-1}(\operatorname{supp} \rho_i)} \rho_i(\varphi_i(t)) \omega_i(t) dt_1 \cdots dt_d.$$

则 $\int_M \omega$ 与 A 的选取无关，称为 ω 在 M 上的积分。

定理：若选取相反定向，则 $\int_M \omega$ 变号。

证明：考虑每个 $\varphi_i^{-1}(\operatorname{supp} \rho_i)$ 上的积分，定向反号导致这个积分变号，于是每一项变号，于是整个和式变号。 □

在很多情况下，我们考虑的实际上是 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的 d 形式 ω 在 M 上的限制的积分，即 $\int_M (i^*\omega)$。这是因为 D 上的形式可整体地给出，便于计算。

例：① $\dim M = 1$，$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) dx_i$

设 M 由 $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 给出，则

$$\int_M \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) dt.$$

Date:
Place:

Reminders

$M = S^2$. $\omega = x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$ →

若取 $(x,y,z) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right)$. 则

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}.\ 于是 \int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\,du\,dv = 4\pi.$$

正是 S^2 的表面积. 也可用球坐标:

$(x,y,z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. 则

$$\left|\cdots\right| = \sin\theta.\ \int_M \omega = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\right)d\varphi = 4\pi.$$

(可以验证上述坐标是定向相容的.

所以 $\sqrt{\det J^T J}$ 有下界 →

Date:
Place:

Reminders

若 M 是 $\mathbb{R}^2$ 中的简单闭曲线. $\omega = (x\,dy - y\,dx)/2$. 则

$\int_M \omega = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt$ 正好给出 M 所围区域的面积. 我们到

Green 公式部分会再回到这个例子.

② $M \subseteq \mathbb{R}^3$. $\dim M = 2$. $\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$.

设 M 由参数化 $\varphi: \underset{\in D\subseteq\mathbb{R}^2}{(u,v)} \mapsto (x,y,z)$ 给出. 则

$$\int_M \omega = \int_D \left[P\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)\wedge\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) + \cdots\right]$$

$$= \int_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv.$$

③ 设 M 可定向. $A = \{\varphi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha\}$ 是一个图册. 定义

$\omega_\alpha = \sqrt{\det J^T J}\,dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d$. 由第一型积分部分的有关计算

可知. $\omega_0 = \{\omega_\alpha\}$ 定义 M 上的一个 d 形式. 于是可定义

$\int_M \omega_0$. 这正是 M 的 d 维体积. 对于 $f \in C^\infty(M)$. 可定义

$\omega = f\omega_0$. 则 $\int_M \omega$ 就是 f 在 M 上的第一型积分.

所以当流形可定向时. 第一型积分可转化为第二型积分.

反之. 注意 M 紧. ω_0 处处 >0. 对任何一个 d

形式 ω. ω/ω_0 都是 M 上的光滑函数. 所以 ω 在 M

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

上面积分总可视为 f 的第一型积分.

④ 回到例子②

$$\int_M \omega = \int_D \left[P(y_u z_v - z_u y_v) + Q(z_u x_v - x_u z_v) + R(x_u y_v - y_u x_v)\right] du\,dv$$

$$= \int_D (P, Q, R) \cdot \underbrace{\left(\frac{(y_u z_v - z_u y_v,\ z_u x_v - x_u z_v,\ x_u y_v - y_u x_v)}{\sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2}} \right)}_{n} \underbrace{\sqrt{\cdots}\,du\,dv}_{d\sigma}$$

$= \int_D (P, Q, R) \cdot \vec{n}\, d\sigma$. $\vec{n}$ 即 (x, y, z) 处 M 的单位外法向量.

这就是用第一型积分计算第二型积分的公式.

§8.5 Green, Gauss and Stokes 公式

引理 (Green 区间版). 设 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^2$ 是一个闭区间, $P, Q \in C^1(I)$

则 $\int_I \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial I} P\,dx + Q\,dy$. 其中 ∂I 的定向由

外法向给出(或逆时针为正)

证明: 设 $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. 由 Fubini 定理

$$\int_I \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\,dy = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(Q(b_1, y) - Q(a_1, y)\right) dy$$

Date:
Place:

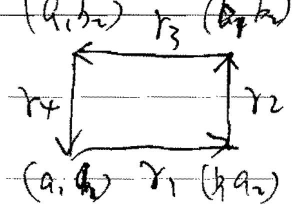
Reminders

区间实际上不是带边流形，而是带角流形，或可称作带分片 → 光滑边界的流形.

Date:
Place:

Reminders

而 $\int_{\partial I} Q\,dy$ 可分为 $\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}+\int_{\gamma_4}\right)Q\,dy$



$\int_{\gamma_1} Q\,dy = \int_{a_1}^{b_1} Q(x,a_2)\,da_2 = 0.$

$\int_{\gamma_2} Q\,dy = \int_{a_2}^{b_2} Q(b_1,y)\,dy.$ $\int_{\gamma_3} Q\,dy = \int_{b_1}^{a_1} Q(x,b_2)\,db_2 = 0.$

$\int_{\gamma_4} Q\,dy = \int_{b_2}^{a_2} Q(a_1,y)\,dy.$ 相加即得 $\int_I \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial I} Q\,dy.$

同理可得 $-\int_I \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial I} P\,dx.$ 再相加即可. □

记 $\omega = P\,dx + Q\,dy$. 则 $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$. 所以

上述定理又可写为 $\int_I d\omega = \int_{\partial I}\omega$.

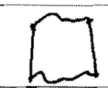
推论: 设 $D_I \subseteq \mathbb{R}^2$ 是区域, 存在微分同胚 $\varphi: I \to D_I$. 则对 D_I 上的

微分1形式 ω. 有 $\int_{D_I} d\omega = \int_{\partial D_I}\omega$.

证明: 由换元公式及拉回映射的定义

$$\int_{D_I} d\omega = \int_I \varphi^* d\omega = \int_I d(\varphi^*\omega) = \int_{\partial I}\varphi^*\omega = \int_{\partial D_I}\omega. \quad □$$

推论: 设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 是区域. 若 D 为以下两种

$D_y = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$. 

$D_x = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ c\le y\le d\}$. 

使得每个D_i都具有上面两个推论的形式.

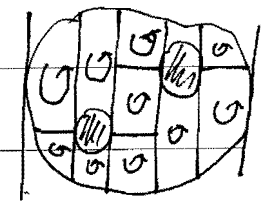
则 Green 公式亦成立. 证明: 同引理. □

引理: 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是区域. 若 D 可分解为

$D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$. 其中 $D_i \cap D_j \subseteq \partial D_i \cap \partial D_j$.

~~使得在每个D_i上 Green 公式成立~~ 则 在D上 Green 公式亦成立.

证明: $\int_D \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial D_i} \omega$



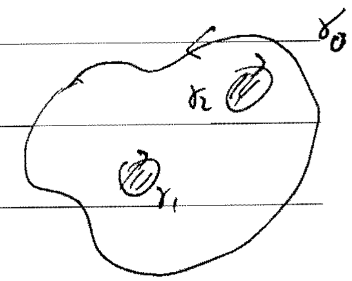
注意在重复的边界上不同的D_i给出相反的定向.

所以 $\int_D \omega = \int_{\partial D} \omega$. □

任意区域是否总能分解为D_x型, D_y型 或 D_z型区域的并了. 在一定的条件下 答案是肯定的. 但证明颇不易. 后面将用单位分解处理这种拼接问题. 所以就不深入讨论了.

例: ① $\int_D dxdy = \int_{\partial D} xdy = -\int_{\partial D} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(xdy - ydx)$.

② 若 $d\omega = 0$. 则 $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = 0$.



注意 $\partial D = \gamma_0 - \gamma_1 - \cdots - \gamma_m$ 于是

$\int_{\gamma} d\omega = \int_{\gamma_1} \omega + \cdots + \int_{\gamma_m} \omega$.

Date:
Place:

Reminders

~~$\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx$~~ →

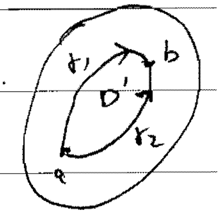
$\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$.

$d\omega = (P_x + Q_y + R_z)\,dx\wedge dy\wedge dz$.

Date:
Place:

Reminders

另一种情况是. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可缩区域. $a.b\in D$. $\gamma_1.\gamma_2$ 是从 a 到 b 的两条道路.



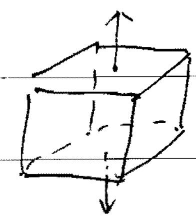
则 $\int_{\gamma_2}\omega - \int_{\gamma_1}\omega = \int_{\partial D'}\omega = \int_{D'} d\omega = 0$.

即积分与路径无关. 因为 D 可缩. $d\omega = 0 \Rightarrow \omega = df$.
所以事实上有 $\int_\gamma \omega = f(b) - f(a)$. 也说明与路径无关.

引理 (Gauss 区间版) 设 $I \subseteq \mathbb{R}^3$ 是一个闭区间.
ω 是 I 上的 2 形式. 则 $\int_I d\omega = \int_{\partial I}\omega$. ($\partial I$ 定向由外法向给出)

证明: $\int_I \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} \left(R(x,y,b_3) - R(x,y,a_3)\right) dx\,dy.$$



区间的 6 个面中. 有 4 个 或者 x 不变. 或者 y 不变.
所以 其上 $dx\wedge dy$ 的积分为零. 另两个
符号正好相反. 所以有 $\int_I R_z\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial I} R\,dx\wedge dy$. 其余同理. □

Gauss 公式的积分区域亦可像 Green 公式一样换成 D_x. D_y. D_z 或 D_z
或它们的并. 此处略.

Date:
Place:
Reminders

例: ① 设在 D 上 Gauss 公式成立. 则

$$\mu(D)=\int_D dxdydz=\iint_{\partial D} x\,dy\wedge dz=\int_{\partial D} y\,dz\wedge dx=\int_{\partial D} z\,dx\wedge dy$$

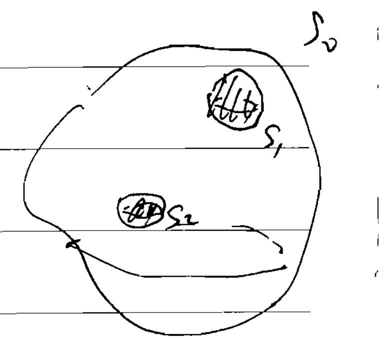
$$=\frac{1}{3}\int_{\partial D}(x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy).$$

若 $D=\{x^2+y^2+z^2\le R^2\}$. 则

$$\mu(D)=\frac{1}{3}\int_{\partial D}(x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy)$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\partial D}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,d\sigma=\frac{1}{3}\int_{\partial D}\frac{x^2+y^2+z^2}{R}\,d\sigma$$

$$=\frac{1}{3}\cdot R\cdot 4\pi R^2=\frac{4\pi}{3}R^3.$$



② 若 $d\omega=0$. 则同样有

$0=\int_{\partial D}\omega$ 若 $\partial D=S_0-S_1-\cdots-S_m$.

则有 $\int_{S_0}\omega=\int_{S_1}\omega+\cdots+\int_{S_m}\omega$.

设 $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$, $\omega=\dfrac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$

则在 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 的地方总有 $d\omega=0$.

Date:
Place:
Reminders

$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$d\omega = (R_y - Q_z)\,dy\wedge dz + (P_z - R_x)\,dz\wedge dx + (Q_x - P_y)\,dx\wedge dy$ →

Date:
Place:
Reminders

在 0 附近取充分小的 $S_\varepsilon = \{ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2\}$ 则

$$\int_S \omega = \int_{S_\varepsilon}\omega = \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{S_\varepsilon}(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$$

$$= \frac{3}{\varepsilon^3}\int_{ax^2+by^2+cz^2\le\varepsilon^2} dx\,dy\,dz = \frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}{\sqrt{abc}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.$$

此例直接用球坐标亦可算出，但很麻烦。类似的例子还有在椭球面上积分 $\frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ 等。此时只需挖一个圆洞即可。

引理 (Stokes 区间版) 设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的二维流形，$\varphi: D\to S$ 是其参数化。若在 D 上 Green 公式成立，则对任意 $\omega\in\Omega^1(S)$，有 $\int_S d\omega = \int_{\partial S}\omega$.

证明：同 Green 公式推论. □

S 也可剖分为使 Stokes 成立的片，然后拼起来，略。

~~例：当 $d\omega=0$ 时，与 Green 公式的例子类似，有~~ $\cancel{\int_{S_1} d\omega = \int_{S_2} d\omega}$

$H^d := \{(y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d \mid y_1 \le 0\}$ →

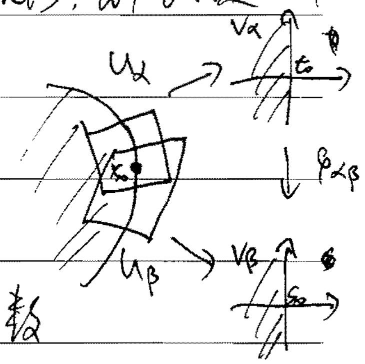
改成 ≤ 0 是为了更好的定义诱导定向.

§8.6 一般Stokes公式

Green公式, Gauss公式和 Stokes公式都可写成

$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ 的形式. 将这个结论推广到一般流形上就得到一般的Stokes公式. 不过, 首先要解决的一个问题是, ∂M上的定向是什么? ∂M可定向吗?

定理: 设 M是$\mathbb{R}^n$中的d维带边定向流形, 则∂M是$d-1$维无边可定向流形.



证明: 设 $x_0 \in \partial M$. U_α, U_β是覆盖x_0的两个图册. 相应的$V_\alpha = V_\beta = H^d$. 坐标分别为$(t_1, \cdots, t_d)$, $(s_1, \cdots, s_d)$. 转移函数为 $\varphi_{\alpha\beta} =: \varphi$. $s_i = \varphi_i(t_1, \cdots, t_d)$. 注意$\varphi$是同胚, 所以$\varphi(\partial V_\alpha) = \partial V_\beta$. 于是当$t_1 = 0$时, 总有$s_1 = 0$, 即 $\varphi_1(0, t_2, \cdots, t_d) = 0$. 因此 $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(0, t_2, \cdots, t_d) = 0$, $(2 \le i \le d)$. 另外, $t_1 < 0$, $s_1 < 0$. 于是总有 $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(0, t_2, \cdots, t_d) > 0$. (因为若 < 0, 则存在 $t_1 < 0$ (充分靠近0), 使 $\varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_d) > 0$. 矛盾) 于是有

$$J_d = \frac{\partial(s_1 \cdots s_d)}{\partial(t_1 \cdots t_d)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \frac{\partial \varphi_d}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial t_d} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial(s_2 \cdots s_d)}{\partial(t_2 \cdots t_d)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} J_{d-1}$$

注：① 若翻转M的定向，则 ∂M 的诱导定向亦翻转.

② 因为 ∂M 可能不连通，所以 ∂M 上除诱导定向和它的反向以外还可能有别的定向.

~~若M有定向~~ M已赋以定向，所以不妨设所有 $J_\alpha>0$. 于是 $J_{\alpha+}>0$. 所以 $(t_2\cdots t_d)$ ~~$(s_1\cdots s_d)$~~ 构成 ∂M 上 x 附近的定向相容坐标系. 于是 ∂M 可定向. □

定义：按上述证明中方法构造的 ∂M 的定向图册所定义的定向叫 ∂M 上由 M 的定向所诱导的定向.

定理：设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 d 维紧致定向带边流形. ∂M 上赋以诱导定向. 设 $\omega\in\Omega^{d-1}(M)$. 则

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega.$$

证明：取 M 的定向图册分解 $\{(U_i,\varphi_i,\rho_i)\mid i=1,\dots,m\}$.

其中 $\varphi_i: I_i\to U_i$. 我们不妨设前 $\tilde m$ 个覆盖 ∂M，且

$$I_i=\begin{cases}\{(t_1\cdots t_d)\mid 0<t_1\le 1,\ 0<t_j<1\ (j=2,\dots,d)\}, & 1\le i\le\tilde m\\ \{(t_1\cdots t_d)\mid 1<t_j<0,\ (j=1,\dots,d)\} & \tilde m+1\le i\le m.\end{cases}$$

则这个定向图册分解的前 $\tilde m$ 个诱导了 ∂M 上的定向图册分解. 设 $\omega_i=\rho_i\cdot\omega$. 若我们能证明对每个 ω_i，

$$\int_{\partial M}\omega_i=\int_M d\omega_i.\quad 则\ \int_{\partial M}\omega=\sum_{i=1}^{\tilde m}\int_{\partial M}\omega_i=\sum_{i=1}^{m}\int_M d\omega_i$$

$$=\int_M d\omega.$$ 所以只需考虑

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$\mathrm{supp}\,\omega \subseteq U_i$ 的情况. 设

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} f_i(t)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_d.$$

则 $d\omega = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial t_i}\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d$

① 若 $1 \le i \le \tilde{m}$. 则

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial I_i} f_1(1, t_2, \ldots, t_d)\, dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_d$$ (因为含 dt_1 的项限制后自动为零)

$$\int_M d\omega = \int_{I_i} \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial t_j}\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_d$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \int_{I_i} \left(\frac{\partial f_j}{\partial t_j} dt_j\right) \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \cdots \wedge dt_d$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \int_{I_{i,j}} \left[f_j(\ldots, 1, \ldots) - f_j(\ldots, 0, \ldots) \right] dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \cdots \wedge dt_d.$$

其中 $I_{i,j} = \{(t_1, \ldots, \hat{t}_j, \ldots, t_d) \in I_i\}$.

注意 $\mathrm{supp}\,\omega \in U_i$. 所以当 $j \neq 1$ 时. $f_j(\ldots, 1, \ldots) = f_j(\ldots, 0, \ldots)$

当 $j=1$ 时. $f_1(\ldots, 0, \ldots) = 0$. 于是

$$\int_M d\omega = \int_{\partial I_i} f_1(1, t_2 \ldots t_d)\, dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_d = \int_{\partial M} \omega.$$

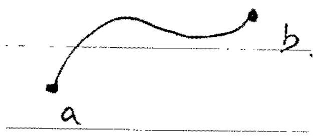
② 若 $\tilde{m}+1 \le i \le n$. 则同样由 $\mathrm{supp}\,\omega \in U_i$ 可知 $\int_M d\omega = 0$. $\int_{\partial M} \omega = 0$. □

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

例. ① $d=1$. $\omega\in\Omega^0(M)$. 不妨记 $\omega=f$. 则

$$\int_M df=\int_{\partial M} f = f(b)-f(a).$$



② $d=2$. $\omega\in\Omega^1(M)$. 此时即 Stokes 公式或 Green 公式

③ $d=3$. $\omega\in\Omega^2(M)$. 此时即 Gauss 公式

④ 一般地. 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个开区域, 满足 ∂D 是一个流形. 将 $\omega\in\Omega^{n-1}(D)$ 写为

$$\omega = f_1\, dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n - f_2\, dx_1\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n+\cdots+(-1)^{n-1} f_n\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$$ 则有

$$d\omega=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$ 于是

$$\int_{\partial D}\omega=\int_D d\omega$$

记 $F=(f_1,\cdots,f_n)$, $\operatorname{div} F=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$. 则有

$$\int_{\partial D} F\cdot d\vec{S}=\int_D \operatorname{div} F.$$

$\operatorname{div} F$ 叫做 F 的散度. 所以此公式也叫散度定理.

⑤ 若 M 是无边的. 则

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega=0.$$

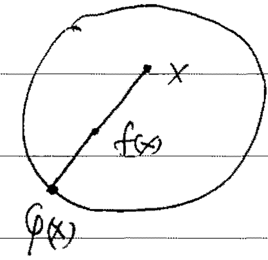
此式的一个推论是, 若紧致定向流形 M 上的 d 形式 ω 满足 $\int_M\omega\neq 0$. 则一定不存在 $\eta\in\Omega^{d-1}(M)$ 使 $\omega=d\eta$. 注意因为 $\Omega^{d+1}(M)=0$. 所以总有 $d\omega=0$. 所以 $[\omega]$ 定义 $H^d(M)$ 中的一个非零类.

利用 Weierstrass 逼近定理可进一步证明 →
连续版的 Brouwer 不动点定理.

Date:
Place:
Reminders

定理 (Brouwer 不动点定理, 光滑版) 设 $B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\le 1\}$.
求证任意光滑函数 $f: B\to B$ 存在不动点.

证明: 假设对 $\forall x\in B$ $f(x)\neq x$.
存在 f, 使得 构造映射



$\varphi: B\to\partial B$, $\varphi(x)=x+t(f(x)-x)$

其中 $t\geq 1$. $\|\varphi(x)\|=1$. 则

$\varphi|_{\partial B}=id_{\partial B}$. 现在取 $\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\dfrac{x_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n}{\|x\|^n}$,

则 $$d\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\Big(\frac{dx_i\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n}{r^n}$$

$$+\Big(-n\frac{1}{r^{n+1}}\cdot\frac{x_i}{r}dx_i\Big)\wedge\big(x_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n\big)\Big)$$

$$=n\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}{r^n}-n\cdot\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n}{r^n}=0.$$ 于是有

$$\int_{\partial B}\omega=\int_{\partial B}\varphi^*\omega=\int_B d(\varphi^*\omega)=\int_B\varphi^*(d\omega)=\int_B\varphi^*(0)=0.$$

另一方面.

Date:
Place:
Reminders

教室：6A305.

Date:
Place:
Reminders

$$\int_{\partial B}\omega=\int_{\partial B}\frac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n}{r^n}$$

$$=\int_{\partial B}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n$$

$$=n\int_B dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=n\,\mu(B)>0.$$ 矛盾!

$=\mu(S^{n-1})$

所以没有不动点的 f 是不存在的. □

~~推论：设 A 是 $n\times n$ 实矩阵 $(=(a_{ij}))$ 满足 $a_{ij}>0$. 则 A 存在一个正特征值.~~

~~证明:~~

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$

数学分析(3)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

函数列. 函数项级数 $\longrightarrow$ Fourier 级数

&

广义积分. 含参积分 $\longrightarrow$ Fourier 变换.

一致收敛性.

$$\hat f(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(\omega)e^{i\omega x}\,dx$$

Date:
Place:

Reminders

~~一般来说, $n=m=1$, 所以为了节省字母, 我们记 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$~~ →

Date:
Place:

Reminders

§9. 函数列与函数项级数.

§9.1 函数列与函数项级数的逐点收敛性.

~~设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个区域. 对每个自然数 n 有一个函数 $f_n: D\to\mathbb{R}$~~

设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个区域或一般的集合. 假设对每个 $n\in\mathbb{N}$, 有一个函数 $f_n: D\to\mathbb{R}^m$. 则 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 构成一个 D 上的函数列.

若记 $\mathcal{F}$ 是从 D 到 $\mathbb{R}^m$ 的函数的全体构成的线性空间. 则一个函数列等价于一个映射 $F:\mathbb{N}\to\mathcal{F}$.

定义: i) 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $D\to\mathbb{R}^m$ 的函数列. 则对任意 $x_0\in D$, 可定义 $\mathbb{R}^m$ 中的点列 $a_n=f_n(x_0)$ $n\in\mathbb{N}$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 收敛. 则称 $\{f_n\}$ 在 x_0 处收敛.

ii) 记 $E=\{x_0\in D \mid \{f_n\}$ 在 x_0 处收敛$\}$. E 叫 $\{f_n\}$ 的收敛集.

iii) 定义函数 $f: E\to\mathbb{R}^m$. $x_0\mapsto\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. 称为 $\{f_n\}$ 的极限函数.

iv) 若 $E=D$. 则称 $\{f_n\}$ 在 D 上逐点收敛到

Date:
Place:
Reminders

v) 设 $\{f_n\}$ 是 $D\to\mathbb{R}^n$ 的函数列. 记

$S_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i(x)$. 则 $\{S_n\}$ 也是 $D\to\mathbb{R}^n$ 上

的函数列. 称为 $\{f_n\}$ 的前 n 项部分和. 若

$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$. 则称函数项级数

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 逐点收敛. 并记 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x)$.

(显然函数列与函数项级数一一对应. 所以以下一般只考虑其中一种).

即 $\varphi: \mathbb{N}^*\to D\cap\mathbb{Q}$ $n\mapsto r_n$ →

是双射.

Date:
Place:
Reminders

f. 并记 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. 或 $f_n\to f$.

例: ① $D=\mathbb{R}$. $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $x\mapsto x^n$. $n\in\mathbb{N}$.

当 $|x_0|<1$ 时. 显然有 $f_n(x_0)\to 0$. 当 $x_0=1$ 时.

$f_n(x_0)\equiv 1$. 当 $x_0=-1$ 时. $f_n(x_0)=(-1)^n$ 无

极限. 而当 $|x_0|>1$ 时. $f_n(x_0)$ 也无极限. 所以

$E=(-1,1]$. $f(x)=\begin{cases}0 & |x|<1\\ 1 & x=1\end{cases}$

注意在此例中. 每个 f_n 都是连续函数. 但 f 不连续.

② $D=[0,1]$. 设 $\{r_1,r_2,\cdots\}$ 是 D 中有理数的一个排列. 定义

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,r_2,\cdots,r_n.\\ 0, & x\neq r_1,r_2,\cdots,r_n.\end{cases}$$

则每个 f_n 都是 D 上的 Riemann 可积函数.

对于 $x_0\in\mathbb{Q}\cap D$. 必有 N 使得 $x_0=r_N$.

于是当 $n>N$ 时 $f_n(x_0)=1$. 所以有 $f_n(x_0)\to 1$.

若 $x_0\notin\mathbb{Q}\cap D$. 则对所有的 n. $f_n(x_0)=0$. 于是

$E=D$. 且 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\cap D\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\cap D\end{cases}$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

即 Dirichlet 函数. 于是 f 不是 D 上的 Riemann 可积函数.

③ $D=\mathbb{R}$. $f_n(x)=\dfrac{\sin n^2x}{n}$, $g_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^2}$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=0$. 另一方面,

$f_n'(x)=n\cos n^2x$, $g_n'(x)=\dfrac{\cos nx}{n}$. 于是

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ 不存在. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n'(x)=0(=0')$.

④ $D=[0,1]$. $f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$ 则有

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. 即 $f(x)=0$. 另一方面,

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 2n^2xe^{-n^2x^2}dx=\left[-e^{-n^2x^2}\right]_0^1$$

$$=1-e^{-n^2}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=1$. 但 $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$

$=\int_0^1 0\,dx=0$.

Date:
Place:

Reminders

函数空间中的收敛问题. →

函数空间上的函数的连续性问题. →

Date:
Place:

Reminders

基本问题: 对于 $F: \mathbb{N} \to \mathcal{F}$.

① 设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{F}$ 的某个子空间.(如 $D \to \mathbb{R}^n$ 的连续函数空间. C^k 函数空间. C^∞ 函数空间, $D \to \mathbb{R}$ 的 Riemann 可积函数空间等), 若 $\mathrm{Im}(F) \subseteq \mathcal{E}$. 即 $f_i \in \mathcal{E}$. 是否有 $f \in \mathcal{E}$?

[redacted]

② 设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{F}$ 的某个子空间(或子集) $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{E}$ 到另一个集合的映射. $f_i \in \mathcal{E}$. 且 $f \in \mathcal{E}$. 是否有 $\varphi(f_i) \to \varphi(f)$? (当 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{R}$ 时. 这就是数列极限. 如 $\varphi = \int_0^1 (\cdot)\,dx$. 当 $\mathcal{G}$ 也是函数空间时, 这仍是函数列的极限. 如 $\varphi = \frac{d}{dx}$)

前面的例 ①②③④ 表明, 上述问题的答案一般来说都是否定的. 除非 F 还满足一些更好的条件. 这就是下面要介绍的一致收敛性.

§ 9.2 一致收敛性.

Date:
Place:
Reminders

一个函数列即一个映射 $F: \mathbb{N} \to \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$.

回忆一下，一个数列即映射 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.

$a_n \to A$ 即：$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon$.

类似地，我们也可定义 $f_n \to f$ 若对 $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n > N$ 有 $|f_n - f| < \varepsilon$. 但问题是，如何在 $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ 中计算两个函数之间的距离. 事实上，我们往往需要适当缩小 $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ 为它的某一子空间，然后才能进行这种定义，而这种缩小和定义的方式也不是唯一的. 这就带来了各种不同的函数空间和收敛的概念

一致收敛性来自一种最容易想到的距离的定义.

定义：对于 $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ 定义

$$d(f, g) := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

（对于比较坏的 D 和 f, g，$d(f, g)$ 完全可以是无穷大. 但这并不影响接下来的讨论）

定义：设 $\{f_n\}$ 是 $D \to \mathbb{R}^m$ 的函数列，$f: D \to \mathbb{R}^m$ 是另一个函数. 若对 $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$，使得对 $\forall n > N$ 有 $d(f_n, f) < \varepsilon$ 则称 f_n 一致地收敛到 f.

Date:
Place:
Reminders

由定义知 $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \to f$. →

$\lim\limits_{i\to\infty} \beta_i = 0 \Rightarrow f_i \rightrightarrows f$ 是定义. 反之. 若对 →
$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N$ s.t. $\forall n > N$ $\forall x \in D$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
则有 $\beta_i < \varepsilon$. 于是 $\lim\limits_{i\to\infty} \beta_i = 0$ □.

此例说明 是否一致收敛要看地 →
依赖于区域D. 这与一致连续的情形
也是类似的.

Date:
Place:
Reminders

记为 $f_n \rightrightarrows f$. 等价地说法是: 对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$
s.t. $\forall n > N$. $x \in D$. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
按这后一种定义, 我们甚至不需要引入 d. 另一种等价的说法是: 设 $\beta_n = d(f_n, f)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$
$\Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$. 这就归结为通常的数列极限了.

不一致收敛的条件: f_n 不一致收敛到 f. 若 $\exists \varepsilon > 0$
s.t. $\forall N \in \mathbb{N}$. $\exists n > N$ $\exists x \in D$ 使 $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

例①: $D = [0, 1]$. $f_n(x) = x^n$. $n \in \mathbb{N}$.
已经知道 $f_n \to f = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

下证 $f_n \not\rightrightarrows f$: 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. 对 $\forall N \in \mathbb{N}$. 取 $n = N+1$.
只要找 $x \in (0, 1)$ 使 $x^{N+1} > \frac{1}{2}$. 即 $x > \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$ 即可.
□.

若 $D = [0, q]$. 其中 $q < 1$. 则可证明 $f_n \rightrightarrows f$.
证明: 对 $\forall \varepsilon > 0$ 取 $N = \left[\frac{\log \varepsilon}{\log q}\right]$. 则对 $\forall n > N$.
$\forall x \in [0, q)$. 有 $x^n \le q^n < \varepsilon$. □.

(级数版)定理：设 $u_n: D\to \mathbb{R}^m$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$ $\forall x\in D$ 有 $|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$

推论：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛，则 $u_n \rightrightarrows 0$.

证明：取 $p=1$ 即可. □

Date:
Place:
Reminders

② $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$. $D=(0,+\infty)$, $D'=[\delta,+\infty)$ $\delta>0$.

显然在 D 或 D' 上 $f_n\to 0=:f$. 注意 $f_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$.

所以 $d(f_n,f)\geq\frac{1}{2}$. 所以 $\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)\neq 0$.

即 f_n 在 D 上不一致收敛到 f. 另一方面，在 D' 上

$|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{1}{nx}<\frac{1}{n\delta}$. 所以

$d(f_n,f)<\frac{1}{n\delta}$. 于是 $\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$. 即 $f_n\rightrightarrows f$. □

定理(Cauchy 准则) 设 $f_n: D\to\mathbb{R}^m$.

则 f_n 一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n_1,n_2>N$.

$d(f_{n_1},f_{n_2})<\varepsilon$.

证明：$\Rightarrow$ $d(f_{n_1},f_{n_2})\leq d(f_{n_1},f)+d(f_{n_2},f)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$\Leftarrow$ 若 $d(f_{n_1},f_{n_2})<\varepsilon$. 则对于 $x_0\in D$. $\{f_n(x_0)\}$ 是基本列的. 即 $\{f_n\}$ 逐点收敛，记其极限为 f. 由条件

对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$. s.t. $\forall n_1,n_2>N$. $\forall x\in D$.

$|f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)|<\varepsilon$. 现在令 $n_2\to\infty$, 得

$|f_{n_1}(x)-f(x)|<\varepsilon$. 所以 $f_n\rightrightarrows f$. □

在级数情形有一个重要的充分条件，即 Weierstrass

M判别法.

命题：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 是 D 上两个级数.
若 $|u_n(x)| \le v_n(x)$ 对 $\forall x \in D$ 及充分大的 n 成立.
且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 D 上一致收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上
绝对、一致收敛.

证明：对充分大的 $n \in \mathbb{N}$ 及 $p \in \mathbb{N}$ 有

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)|$$

$$\le v_{n+1}(x) + \cdots + v_{n+p}(x) = |v_{n+1}(x) + \cdots + v_{n+p}(x)|.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 一致收敛. 所以上式右边可充分小. 于是
$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也一致收敛. 同理 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 也一致收敛. □

推论：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足 $|u_n(x)| < M_n$ $(\forall x \in D)$
对充分大的 n 成立. 且 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$
绝对一致收敛.

证明：因为数项级数可视为常数函数构成的函数项级数. 于是自动一致收敛.
所以由上一命题可知结论成立. □

Date:
Place:
Reminders

例: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$. 因为 $\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p}$.

所以当 $p>1$ 时. 上述级数绝对一致收敛.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$. $\frac{x}{1+n^4x^2} \le \frac{1}{2n^2} \Rightarrow$ 一致收敛.

注: ① 一致收敛的级数未必绝对收敛 (例如 Abel-Dirichlet 判别法中的例子)

② 绝对一致收敛的级数可能 $\sum |u_n|$ 不一致收敛.
(例如 A-D 判别法中的例子).

对于不满足 Weierstrass M 判别法条件的级数一般来说只能通过 Abel-Dirichlet 判别法 证明其一致收敛性.

定义: ① 设 $f_n: D \to R^m$. 若存在 $M: D \to R_+$ 使得对 $\forall x \in D$. $\forall n \in N$. 有 $|f_n(x)| < M(x)$. 则称 $\{f_n\}$ 在 D 上逐点有界.

② 若可取 $M \in R$ 使 $|f_n(x)| < M$. 则称 $\{f_n\}$ 一致有界.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

定理(Abel-Dirichlet) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$

其中 $a_n, b_n: D\to\mathbb{R}$. 若它们满足以下两组条件之一:

(I)(Abel) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛, $\{b_n(x)\}$ 对固定的 $x\in I$ 单调, 且一致有界

(II)(Dirichlet) $\{S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\}$ 一致有界, $b_n(x)$ 对固定的 $x\in I$ 单调, 且 $b_n(x)\rightrightarrows 0$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛.

证明: (I) 设 $|b_n(x)|\le M$. 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$. s.t. $\forall n>N$, $p\in\mathbb{N}$, 有 $|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{3M}$. 由之前的 Abel 引理:

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)|$$

$$\le|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|\cdot\left(|b_{n+p}(x)|+2|b_{n+1}(x)|\right)$$

$$\le\frac{\varepsilon}{3M}(M+2M)=\varepsilon.$$ 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛.

(II) 设 $|S_n(x)|\le M$. 于是

$$|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|\le|S_{n+p}(x)|+|S_n(x)|\le 2M.$$

Date:
Place:
Reminders

难题：设$\{a_n\}$为单调减的非负数列，则
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

证明见徐森林书 例13.1.18. sin换成cos不成立
反例见 例13.1.20.

不绝对收敛. →

绝对逐点收敛. 一致收敛
但不绝对一致收敛. →

Date:
Place:
Reminders

因为 $b_n(x)\rightrightarrows 0$. 所以对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$. s.t. $\forall n>N$
$\forall x\in D$. 有 $|b_n(x)|<\frac{\varepsilon}{7M}$. 于是

$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)|$

$\le 2M(|b_{n+1}(x)|+2|b_{n+p}(x)|)\le \frac{6}{7}\varepsilon<\varepsilon$. □

例：① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 在 $D=[\delta,2\pi-\delta]$ 上

注意 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$. 所以 $a_n(x)$

部分和一致有界 $b_n(x)=\frac{1}{n}$ 显然 $\rightrightarrows 0$. 所以由Dirichlet
可知一致收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 同理.

② $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$. 在 $D=[0,1]$ 上 显然绝对(逐点)
收敛到 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$. 取 $a_n=(-1)^n$.
$b_n=x^n(1-x)$.

则 a_n 部分和有界. $|b_n(x)|\le \frac{(\frac{n}{1+n})^n}{n+1}\to 0$. 所以 $b_n\rightrightarrows 0$.
于是由Dirichlet判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 一致收敛.
(事实上它收敛到 $\frac{1-x}{1+x}$). 但它的绝对值不一致收敛.

Date:
Place:
Reminders

反例：$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ $D=[0,1]$ →

则 $f_n\to f(x)=\frac{1}{x}$. 无界.

亦可写为：对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ 使 $\underbrace{|f(x)-f_{n_0}(x)|<\varepsilon}_{\forall x\in D}$.

若将连续换成一致连续.定理仍成立.
证明逐字照搬即可.(可做考题)

Date:
Place:
Reminders

$\sum_{n=0}^{N}x^n(1-x)=1-x+x-x^2+\cdots+x^N-x^{N+1}=1-x^{N+1}$.
但显然不是一致的(见之前的例 $f_n(x)=x^n$). □

§9.3 一致收敛极限函数的性质

引理：设 $\{f_n\}:D\to\mathbb{R}^m$ 一致收敛到 $f:D\to\mathbb{R}^m$.
若每个 f_n 都是D上的有界函数.求证 f 也有界.
证明：取 $\varepsilon=1$. 则存在 $N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n>N$. $\forall x\in D$
有 $|f(x)-f_n(x)|<1$. 取 $n=N+1$. 设 $|f_n(x)|<M$ 于是有
$|f(x)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)|<1+M$. 所以 f 有界. □.

定理1：设 $\{f_n\}:D\to\mathbb{R}^m$ 一致收敛到 $f:D\to\mathbb{R}^m$.
若 f_n 都是D到 $\mathbb{R}^m$ 的连续函数.则 f 也连续.
证明：任取一点 $x_0\in D$. 我们要证明 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
因为 $f_n\rightrightarrows f$. 所以 对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0$ 使得 $\forall x\in D$.有
$|f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 又因为 $f_{n_0}(x)$ 连续. 所以存在 $\delta>0$,
使得对 $\forall x\in B_\delta(x_0)\cap D$, 有 $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 于是
对于 $\forall x\in B_\delta(x_0)\cap D$. 有
$|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|$
$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. □.

Date:
Place: 定理1′
Reminders

更一般的结论：设 $D\subseteq\mathbb{R}^d$. $f_n: D\to\mathbb{R}^m$. $f_n\rightrightarrows f$. 设 $x_0\in\bar{D}$. 若 $\lim_{x\to x_0} f_n(x)=C_n$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 存在. 则 $\lim_{n\to\infty} C_n=C$ 存在. 且有 $\lim_{x\to x_0} f(x)=C$.

证明：$f_n\rightrightarrows f \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n_1,n_2>N$. $\forall x\in D$. 有 $|f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $x\to x_0$ 得 $|C_{n_1}-C_{n_2}|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. 所以 $\{C_n\}$ 是 Cauchy 列. 于是极限存在. 因为 $\lim_{n\to\infty}C_n=C$. 所以对 $\forall\varepsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n>N_1$. $|C_n-C|<\frac{\varepsilon}{3}$. 因为 $f_n\rightrightarrows f$. 所以存在 $N_2\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n>N_2$. $\forall x\in D$. 有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.
取 $N=\max(N_1,N_2+1)$. 因为 $\lim_{x\to x_0} f_N(x)=C_N$. 所以 $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in \mathring{B}_\delta(x_0)\cap D$, 有 $|f_N(x)-C_N|<\frac{\varepsilon}{3}$. 于是对 $\forall x\in \mathring{B}_\delta(x_0)\cap D$

$$|f(x)-C|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-C_N|+|C_N-C|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以 $\lim_{x\to x_0} f(x)=C$. □

推论：若 f_n 在 x_0 处连续. 则 f 在 x_0 处连续.

Date:
Place:
Reminders

同理可得：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\rightrightarrows S(x)$. 且 $u_n(x)$ 连续. 则 $S(x)$ 连续.

例：① $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, 求证 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续.
（事实上. $f(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$. 它在 $(0,+\infty)$ 上是无界的. 由引理可知. 收敛一定不是一致的. 这也可通过其定义判断看出. 例如. 若一致. 则 $u_n(x)=ne^{-nx}\rightrightarrows 0$. 但 $u_n(\frac{1}{n})=ne^{-1}\not\to 0$. 所以 $d(u_n,0)\not\to 0$. 因此. $u_n\not\rightrightarrows 0$.)
证明：设 $x_0\in(0,+\infty)$. 取 $0<\delta<x_0$. 则 f 在 $(\delta,+\infty)$ 上一致收敛, 所以 f 在 x_0 处连续. □

② $f(x)=\sum_{n\ge 2}\left(\frac{x}{\log n}\right)^n$. 求证 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续.
证明：f 在 $\mathbb{R}$ 上同样不一致收敛. 但对给定的 x_0. 可取 $M>|x_0|$. 则在 $[-M,M]$ 上有 $\left|\left(\frac{x}{\log n}\right)^n\right|\le\left(\frac{M}{\log n}\right)^n$. 而很容易证明 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{M}{\log n}\right)^n$ 是收敛的.（取充分大的 N. 使 $\frac{M}{\log N}<1$. 然后与 $\sum q^n$ 比较）.

Date:
Place:
Reminders

在更高级的分析学中，人们引入"局部一致收敛"这个概念。在例①②中，f 都是局部一致收敛的，这对连续性已经足够了。

$\{f_n\}$ 在 x_0 处局部一致收敛到 f $\Leftrightarrow$ 存在 $\delta>0$，使 f_n 在 $B_\delta(x_0)$ 上一致收敛到 f。

另外还有紧一致收敛的概念，即 f_n 在 D 的任一紧子集上一致收敛。在定理1中将一致收敛换成局部一致收敛或紧一致收敛也都是对的。

在 $D\subseteq\mathbb{R}^d$ 上，局部一致收敛等价于紧一致收敛。

递增改成递减亦成立，加个负号即可。

紧性是必须的。例如 $D=(0,1)$，$f_n(x)=x^n$ 就不是一致的。

Date:
Place:
Reminders

所以 f 在 $[-M,M]$ 上一致收敛，于是 f 在 x_0 处连续。 □

定理(Dini) 设 D 是 $\mathbb{R}^d$ 中的紧集，$f_n\in C(D)$，且对 $\forall x\in D, n\in\mathbb{N}$，$f_n(x)\le f_{n+1}(x)$。若 $\{f_n\}$ 逐点收敛到 f，且 $f\in C(D)$，则 $\{f_n\}$ 一致收敛到 f。

证明：设 $g_n=f-f_n$，则 $g_n\ge 0$，且 $g_{n+1}\le g_n$。对于 $\forall\varepsilon>0$，定义 $E_n=\{x\in D\mid g_n(x)<\varepsilon\}$，则 E_n 是开集（因为 $E_n=g_n^{-1}(-\infty,\varepsilon)$，$g_n$ 连续），且 E_n 构成 D 的开覆盖（因为对 $\forall x\in D$，$\exists n$ 使 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$），因为 D 是紧集，所以存在有限个 $E_{n_1},\cdots,E_{n_k}$ 覆盖 D。注意 g_n 是递减的，所以若 $x\in E_n$，则 $g_{n+1}(x)\le g_n(x)<\varepsilon$，所以 $x\in E_{n+1}$，即 $E_n\subseteq E_{n+1}$。记 $N=\max(n_1,\cdots,n_k)$，则 $D\subseteq E_{n_1}\cup\cdots\cup E_{n_k}=E_N$，于是 $D=E_N$。所以对 $\forall n>N$，$x\in D$，有 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$，即 $f_n\rightrightarrows f$。 □

定理(Dini 级数版) 设 D 紧，$u_n\in C(D)$，$u_n\ge 0$。若 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\in C(D)$，则收敛是一致的。

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

定理2. 设D是Jordan可测集. $f_n \in R(D)$. $f_n \rightrightarrows f$. 则 $f \in R(D)$. 且 $\int_D f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)dx$.

证明: $f_n \in R(D) \Rightarrow f_n$ 有界. 且 $D_n = \{x \in D \mid f_n 在 x 处不连续\}$ 是L零测集. 于是 f 也有界. 若 f 在 x_0 处不连续. 则 x_0 必属于某个 D_n (因为若 f_n 在 x_0 处连续 则由定理2推论 f 在 x_0 处连续). 所以 $D(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. 于是 $D(f)$ 也零测. 所以 $f \in R(D)$.

因为 $f_n \rightrightarrows f$. 所以对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$. s.t. $\forall n > N$ $\forall x \in D$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/\mu(D)$. 于是当 $n > N$ 时

$$\left|\int_D f_n(x)dx - \int_D f(x)dx\right| \le \int_D |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)dx = \int_D f(x)dx$. □

定理2(级数版) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$. 且 $u_n \in R(D)$. 则 $S \in R(D)$. 且 $\int_D S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_D u_n(x)dx$.

定理2中的一致收敛条件实际上太强了. 可以换成[illegible]一致收敛. 再加一致有界. 这方面最强的定理是Arzelà

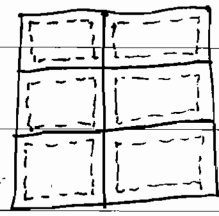
Date:
Place:

Reminders

Arzelà定理的初等证明:

引理1. 设f是D上的非负有界函数. 则对$\forall\varepsilon>0$, 存在$g\in C(D)$满足$0\le g\le f$, 且 $\underline{\int_D} f(x)dx \le \int_D g(x)dx+\varepsilon$.

证明: 由下积分定义, 对$\forall\varepsilon>0$可定义D上的分片常数函数s满足$0\le s\le f$, 且 $\underline{\int_D} f(x)dx\le\int_D s(x)dx+\varepsilon/2$. 接下来, 将$s$的墙加厚, 利用Tietze扩张, 可构造连续函数g满足$0\le g\le s$, 且在每个区间内(虚线部分), $g=s$. 当墙厚度充分小时, 可使 $\int_D s(x)dx\le\int_D g(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}$. 于是有



$$\underline{\int_D} f(x)dx\le\int_D s(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}\le\int_D g(x)dx+\varepsilon. \quad \square$$

引理2. 设f_n是单调递减的有界函数列. 若$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, $\forall x\in D$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{\int_D} f_n(x)dx=0$.

证明: 先任取一个$\varepsilon>0$. 对每个f_n, 取$g_n\in C(D)$, 使得
$$\underline{\int_D} f_n(x)dx\le\int_D g_n(x)dx+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$
再令$h_n=\min(g_1,\cdots,g_n)$. 于是有$0\le h_n\le g_n\le f_n$, $h_n\in C(D)$. 且h_n单调递减地趋于零. 根据Dini定理, $h_n\rightrightarrows 0$. 因此有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_D h_n(x)dx=0$. 下面将证明
$$0\le\underline{\int_D} f_n(x)dx\le\int_D h_n(x)dx+\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^n}\right). \quad (*)$$

Date:
Place:

Reminders

的有界收敛定理

定理(Arzelà) 设D是Jordan可测集. $f_n\in R(D)$, $\{f_n\}$一致有界. $f_n\to f$. 且$f\in R(D)$, 则
$$\lim_{n\to\infty}\int_D|f_n(x)-f(x)|dx=0.$$
特别地, 我们有
$$\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)dx=\cancel{\int_D\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx}=\int_D f(x)dx.$$

它还有以下推广(由W.H. Young给出)(积分控制收敛定理).

定理(Young) 设D是Jordan可测集, $f_n, g_n, h_n\in R(D)$. $f_n\to f$, $g_n\to g$, $h_n\to h$. $f,g,h\in R(D)$. 若$h_n\le f_n\le g_n$且
$$\lim_{n\to\infty}\int_D g_n(x)dx=\int_D g(x)dx,\quad \lim_{n\to\infty}\int_D h_n(x)dx=\int_D h(x)dx.$$
则 $\lim_{n\to\infty}\int_D f_n(x)dx=\int_D f(x)dx$.

它们实际上是等价的. 取$g_n=-h_n=M$, 即可从Young推出Arzelà. 反之, ~~考虑函数~~ 则需Riemann积分的Fatou引理.

~~$0\le f_n-h_n\le g_n-h_n=(g_n-h_n-(g-h))+g-h$. 令$u_n=g_n-h_n-g+h$. 注意$\{g_n-h_n\}$~~

略. 详情见AMM Vol.78 No.9 (1971) pp. 970-979

Date:
Place:
Reminders

首先.对任意的 $1\le i\le n$. 有

$0\le g_n = g_i+(g_n-g_i)\le g_i+\left(\max(g_i,\cdots,g_n)-g_i\right)$

$\le g_i+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\max(g_i,\cdots,g_n)-g_i\right)$. 因为 $h_n=\min(g_1\cdots g_n)$.

所以

$0\le g_n\le h_n+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\max(g_i,\cdots,g_n)-g_i\right)$. 另一方面.

根据 $\max(g_i,\cdots,g_n)\le\max(f_i,\cdots,f_n)=f_i$ (f 递减), 有

$\int_D f_i(x)dx\ge\int_D\left(\max(g_i,\cdots,g_n)-g_i\right)dx+\int_D g_i(x)dx$, 所以

$\int_D\left(\max(g_i,\cdots,g_n)-g_i\right)dx\le\int_D f_i(x)dx-\int_D g_i(x)dx\le\frac{\varepsilon}{2^i}$.

因此, $\int_D g_n(x)dx\le\int_D h_n(x)dx+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2^i}=\int_D h_n(x)dx+\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

最后, $\int_D f_n(x)\le\int_D g_n(x)+\frac{\varepsilon}{2^n}\le\int_D h_n(x)dx+\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

有了这个不等式,再加上 $\lim_{n\to\infty}\int_D h_n(x)dx\to 0$. 就很容易

证明 $\lim_{n\to\infty}\int_D f(x)dx=0$ 了.

Arzela定理的证明: 因为 f_n 一致有界. 通过 ~~减去~~ 减去

下界. 不妨假设 $0\le f_n\le M$. 再取 $f_n\mapsto f_n-f$. 则可

Date: 需要 $\forall x_0, x\in D$. $\overline{x_0x}\in D$.
Place:
Reminders

下面考虑微分问题. 凸 $(n\in\mathbb{N})$

定理3. 设 D 是 $\mathbb{R}^d$ 中的 区域. $f_n: D\to\mathbb{R}$ 满足:

① $f_n\in C^1(D)$. $n\in\mathbb{N}$.

② $f_n': D\to\mathbb{R}^d$ 一致收敛到 $g: D\to\mathbb{R}^d$.

③ 存在一点 $x_0\in D$ 使 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛.

则 f_n 在 D 上一致收敛到某个 $f\in C^1(D)$, 且有 $f'=g$.

证明: 对于 $\forall\varepsilon>0$. 存在 $N_1\in\mathbb{N}$. s.t. $\forall n,m>N_1$ 有

$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

存在 $N_2\in\mathbb{N}$. s.t. $\forall n,m>N_2$. 有 $\forall x\in D$, 有

$|f_n'(x)-f_m'(x)|<\frac{\varepsilon}{2L}$. 其中 $L=\operatorname{diam}(D)=\sup_{x,y\in D}\|x-y\|$.

取 $N=\max(N_1,N_2)$. 当 $n,m>N$ 时.

对任意的 $x\in D$. 有 $f_n(x)=f_n(x_0)+\int_0^1\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\underbrace{(x_0+t(x-x_0))}_{x(t)}\cdot(x-x_0)^i dt$.

$f_m(x)=f_m(x_0)+\int_0^1\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\cdot\underbrace{(x_0+t(x-x_0))}_{x(t)}\cdot(x-x_0)^i dt$.

于是 $|f_n(x)-f_m(x)|\le|f_n(x_0)-f_m(x_0)|+\left|\int_0^1\left(f_n'^{(x(t))}-f_m'^{(x(t))}\right)\cdot(x-x_0)dt\right|$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2L}\cdot\|x-x_0\|\le\varepsilon$. 所以 $f_n\rightrightarrows f$.

因为 $f_n'\rightrightarrows g$. 所以

110

Date:
Place:
Reminders

假设 $f_n \to 0$. 定义 $P_n(x) = \sup_{k\ge 0} f_{n+k}(x)$. (即定义上极限时的辅助数列. 现在逐点定义了). 则有 $0 \le f_n \le P_n$. P_n 单调递减趋于0 ($\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 0$).
因此, 由引理2知 $\lim_{n\to\infty} \int_D P_n(x)\,dx = 0$. 于是

$0 \le \lim_{n\to\infty} \int_D f_n(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int_D P_n(x) dx = 0$. □

幂级数亦可在 $D \subseteq \mathbb{R}^d$ 上定义. 设 $x_0 = (x_0^1, \cdots, x_0^d)$.
$x = (x^1, \cdots, x^d)$. 对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$.
记 $(x-x_0)^\alpha := (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1} \cdots (x^d - x_0^d)^{\alpha_d}$. 则可定义多元幂级数 $\sum_{\alpha \ge (0\cdots 0)} a_\alpha (x-x_0)^\alpha$

$$= \sum_{\alpha_1, \cdots \alpha_d \ge 0} a_{\alpha_1 \cdots \alpha_d} (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1} \cdots (x^d - x_0^d)^{\alpha_d}.$$

我们为简单计. 仅考虑一元的幂级数.

Date:
Place:
Reminders

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n'(x(t)) \cdot (x-x_0) dt = \int_0^1 g(x(t))(x-x_0) dt.$$

所以有 $f(x) = f(x_0) + \int_0^1 g(x(t))(x-x_0)dt$. 再对 x_i 求导即得 $f' = g$. □

另有级数版(略). 注意定理3的条件. 它要求导数列一致收敛. 函数列本身则要求 C^1.

例: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$. 在 $\mathbb{R}$ 上的可微性:
因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ 一致收敛. 所以 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.
因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 一致收敛. 所以 $f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.
注意 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 不一致收敛 所以没有 $f'''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.
若限制在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上. 则可得3阶导数. 但是4阶导数无论如何不能如此求出了.

§9.4 幂级数

形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的(函数项)级数称为幂级数.

Date:
Place:
Reminders

因为 x_0 总可通过平移变换 $\tilde{x} = x - x_0$ 消去. 所以我们不妨假设 $x_0=0$. 于是只需考虑 $\sum_{n\ge0} a_n x^n$.

定理(Abel) 若 $\sum_{n\ge0} a_n x^n$ 在 $x=x_0\,(\neq 0)$ 处收敛, 则它在 $|x|<|x_0|$ 上绝对收敛; 若它在 $x=x_1$ 处发散, 则它在 $|x|>|x_1|$ 上也发散.

证明: $\sum_{n\ge0} a_n x_0^n$ 收敛 $\Rightarrow a_n x_0^n \to 0 \Rightarrow \exists M$ 使得 $|a_n x_0^n| < M$. 于是

$$\sum_{n\ge0}|a_n x^n| = \sum_{n\ge0} |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \underset{|x|<|x_0|}{\le} M\cdot \frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_0}\right|}$$

所以 $\sum_{n\ge0} a_n x^n$ 绝对收敛. 若它在某 $|x|>|x_1|$ 上收敛, 根据前半部分可知它在 $x=x_1$ 处收敛, 矛盾. □

定理(Cauchy–Hadamard 公式) 对于 $S(x)=\sum_{n\ge0} a_n x^n$, 记

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

则:

(1) 当 $R=0$ 时, $S(x)$ 只在 $x=0$ 处收敛.

(2) 当 $R=+\infty$ 时, $S(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛.

(3) 当 $0<R<+\infty$ 时, $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内绝对收敛, 在 $[-R,R]$ 之外发散.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

证明：(1) $R=0$. $x\neq 0 \Rightarrow$

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

由根式判别法知 $S(x)$ 绝对发散. 若 $S(x)$ 在 $x=x_0$ ($\neq 0$) 处收敛. 任取 $0<x_1<|x_0|$, 由 Abel 定理. $S(x)$ 在 $x=x_1$ 处绝对收敛. 矛盾. 所以 $S(x)$ 在任意 $x_0\neq 0$ 处发散.

(2) 同上可得 $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = 0$. 所以处处收敛.

(3) $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{R}$. 仍由根式判别法可知 $S(x)$ 在 $x\in(-R,R)$ 内绝对收敛. 若 $S(x)$ 在 $x_0\notin(-R,R)$ 处收敛. 取一 x_1 满足 $R<x_1<|x_0|$, 则 $S(x)$ 绝对收敛. 另一方面 $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n x_1^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{x_1}{R} > 1$. $S(x)$ 应绝对发散. 矛盾. □

例: ① 设 P 是一个非零有理函数, 且不以任何自然数为奇点. $S(x)=\sum\limits_{n\geq 0} P(n)x^n$.

设 $P(x)=\dfrac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_0}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1}+\cdots+b_0}$. 则

$$\lim_{n\to\infty} |P(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1}+\cdots+a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1}+\cdots+b_0}\right|^{\frac{1}{n}}$$

Date:
Place:
Reminders

即 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛或 →
(内闭 with 紧 written above)
局部一致收敛.

Date:
Place:
Reminders

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_p|^{\frac{1}{n}} \cdot (n^{\frac{1}{n}})^p (1+\cdots)^{\frac{1}{n}}}{|b_q|^{\frac{1}{n}} (n^{\frac{1}{n}})^q (1+\cdots)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

所以这类级数的收敛半径是1.

② $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. 因为 $\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = +\infty$. 所以 $R = +\infty$.

③ $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$. $R = 0$.

定理1 设 $S(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$ 的收敛半径为 R $(R>0)$

则对 $\forall\, r \in (0, R)$. $S(x)$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛.

证明: 在 $[-r, r]$ 上 $|a_n x^n| \le |a_n| r^n$. $\sum_{n=0} |a_n| r^n$ 收敛.

由 Weierstrass 判别法, $S(x)$ 一致收敛. □.

推论: 若 $R > 0$. 则 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上连续且有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n\ge k} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}. \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

证明：连续性由其一致收敛可得. 对于可导性，考虑 $g(x)=\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$，因为

$$\limsup_{n\to\infty}(|na_n|)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = R^{-1}.$$

所以 $g(x)$ 也在 $(-R,R)$ 上内闭一致收敛.

由上节定理3 易知 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 上可导且有 $S'(x)=g(x)$. 对更高阶导数归纳即可. □

推论：$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

例：① $\underbrace{\sum_{n\geq 0} n x^n}_{S(x)}$. 已知 $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

所以 $\sum_{n\geq 0} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. 于是 $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

② $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$

$\Rightarrow \log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$

Date:
Place:
Reminders

$\Rightarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

定理(Abel第二) 若 $S(x)$ 在 $x=R$ 处收敛 则 S 在 $x=R$ 处左连续; 若 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处收敛. 则 S 在 $x=-R$ 处右连续.

证明: $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_n R^n)\left(\frac{x}{R}\right)^n$.

其中 $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ 收敛. $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 单调递减且一致有界.

由Abel判别法可知 $S(x)$ 在 $[0,R]$ 上一致收敛.

因此在 $x=R$ 上连续. 另一边同理.

例: ① $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$. 由Leibniz判别法知其收敛. 于是 $=\log(1+1)=\log 2$.

② $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$.

定理(Tauber) 设 $S(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ 的 $R=1$. 且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = A$ 存在. 若 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$,

a_n 上的条件是必要的. 例如 $S(x)=\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n x^n$ →

将 $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ 换成 $a_n \geq 0$ 亦可. →

证明见下页.

Date:
Place:

Reminders

证明：设 $0<x<1$. 因为 $a_n\ge 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$ 所以

极限 $\lim$

$$A = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \le \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$ 另一方面.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \le \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

所以 $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \le A.$$ □

Date:
Place:

Reminders

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$

证明：记 $P_n = \sup_{k\ge n} |k a_k|$. 因为 $n a_n \to 0$. 所以 P_n 单减地趋 $\to 0$. 对 $\forall N\in\mathbb{N}$. $0\le x<1$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - A = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n - S(x)\right) + (S(x)-A)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + S(x) - A.$$

$$= I_1(x) + I_2(x) + (S(x)-A).$$ 其中

$$|I_1(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{N} |a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

$$\le (1-x)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| < N(1-x)\cdot P_1$$

$$|I_2(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |n a_n| \frac{x^n}{n} \le \frac{P_N}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{P_N}{N}\frac{x^{N+1}}{1-x} \le \frac{P_N}{N(1-x)}.$$

取特别的 $x_N = 1-\sqrt{P_N}/N$. 即 $N(1-x_N)=\sqrt{P_N}$. 则有

$|I_1(x)| \le P_1\cdot\sqrt{P_N}$. $|I_2(x)| \le \sqrt{P_N}$. 于是

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \le (P_1+1)\sqrt{P_N} + |S(x_N)-A|$$

令 $N\to\infty$. 则 $P_N\to 0$. $S(x_N)\to A$. 于是 $\sum_{n=0}^{N} a_n \to A$. □

Date:
Place: ~~中~~ 下面

Reminders

Date:
Place: 下面

Reminders

~~[crossed out]~~ 考虑级数相乘. 因为幂级数内闭绝对一致收敛. 以前讲过, 绝对收敛的级数可做 Cauchy 乘积.

于是 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right) = \sum_{n,m\geq 0} a_n b_m x^{n+m}$.

记 $N=n+m$. 则 $= \sum_{N\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0}^{N} a_n b_{N-n}\right)}_{C_N} x^N$.

定理: 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

若 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = C$. 则 $C = A\cdot B$.

证明: $A\cdot B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right)$

$= \lim_{x\to 1^-} \sum_{N=0}^{\infty} C_N x^N = \sum_{n=0}^{\infty} C_n = C$. □.

最后讨论 Taylor 级数.

定义: 设 f 在 x_0 附近有任意阶导数. 于是可定义

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. 称为 f 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 级数.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

Taylor级数未必收敛，即使收敛也未必等于f.

例：① $f(x)=\frac{1}{1-x}$. $S(x)=1+x+x^2+\cdots$

当 $x=2$ 时 $S(x)$ 发散.

② $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$. $S(x)=0$.

由 Taylor公式，$f(x)=T_n(f.x_0;x)+R_n(x)$.

$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}T_n(f.x_0.x)$. 所以 $S(x)=f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

定理：设 f 在 $B_R(x_0)$ 上有任意阶导数，若存在 $M>0$ 使得对充分大的 n，有 $|f^{(n)}(x)|\le M$ 对 $\forall x\in B_R(x_0)$ 成立，则在 $B_R(x_0)$ 上有 $S(x)=f(x)$.

证明：由 L氏余项的 Taylor公式：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}\to0.\ \square$$

例：e^x. $\cos x$. $\sin x$. $(1+x)^\alpha$. $\ln(1+x)$.

$\arctan x$. $\arcsin x$. $(\arcsin\frac{x}{2})^2$.

Date:
Place:

Reminders

若$A(x)$收敛. $v(A)$即$x=0$作为$A(x)=0$的根的阶 →

$e^{-v(x)}$是一个范数. 所以d是距离 →

Date:
Place:

Reminders

~~[illegible]~~最后我们来讨论形式幂级数.

定义：设$\{a_n\}_{n\geq 0}^{\infty}$是$\mathbb{R}$中的数列. 定义

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

叫做$\{a_n\}_{n\geq 0}^{\infty}$的生成函数.

生成函数按通常的意义未必收敛. 但是我们可以在所有数列构成的空间上定义一种距离. 使任意生成函数都是收敛的.

记$S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. 即所有数列构成的空间. 对于$\{a_n\}\in S$, 我们用它的生成函数来指代它. 即记$A\in S$. 显然$S$是个线性空间. 设$A\in S$. $A\neq 0$. 定义

$$v(A) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}.$$ 称为A的阶.

若$A=0$. 则规定$v(0)=+\infty$.

~~定义~~ 引理

~~定义~~: 对于$A, B\in S$. 定义

$$d(A, B) = e^{-v(A-B)}.$$

则d满足距离三公理.

设 $x=A-C$, $y=C-B$ 则 $A-B=x+y$. 于是只需证 $v(x+y)\geq\min(v(x),v(y))$ 只要看 x-y 的领头项是否抵消即可.

 ① $d(A\cdot B)\geq 0$.

证明: ① $d(A,B)=0 \Leftrightarrow v(A-B)=+\infty \Leftrightarrow A=B$.

② $d(A,B)=d(B,A)$ ~~③ $d(A,B)+d(B,C)$~~

$\cancel{= e^{-v(A-B)}+e^{-v(B-C)} \geq e^{-v(\ldots)}}$ 对于③

事实上, 若 $v(A)\neq v(B)$. 则 $v(A-B)=\min(v(A),v(B))$.
若 $v(A)=v(B)$ 且 $a_{v(A)}\neq b_{v(B)}$. 则 $v(A-B)=v(A)=v(B)$.
若 $v(A)=v(B)$ 且 $a_{v(A)}=b_{v(B)}$. 则 $v(A-B)\geq v(A)=v(B)$.

于是不难证明 $d(A,B)\leq\max(d(A,C),d(C,B))$.
(这种度量的性质比三角不等式更强. 所以叫超度量). □

定理: 对于 $\forall A\in S$. 设 $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$. 则 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$.

证明: 对 $\forall\varepsilon>0$. 我们要找 $N\in\mathbb{N}$ s.t. $n>N$ 时有 $d(A_n,A)<\varepsilon$. 即 $e^{v(A_n-A)}>\frac{1}{\varepsilon}$. 即 $v(A_n-A)>\log\frac{1}{\varepsilon}$.
所以只需取 $N=[\log\frac{1}{\varepsilon}]$. 则当 $n>N$ 时. ($>\log\frac{1}{\varepsilon}$)
$A_n-A=-a_{n+1}x^{n+1}-a_{n+2}x^{n+2}-\cdots \Rightarrow v(A_n-A)\geq n+1$ □.

在 S 上我们还可定义乘法. 即 Cauchy 乘积. 于是 S 构成一个环. 叫 $\mathbb{R}$上的形式幂级数环. 记为 $\mathbb{R}[[x]]$.
($\mathbb{R}$ 当然也可换成其它的更一般的环)

Date:
Place:
Reminders

$$P(n) \sim \frac{\exp\left(\sqrt{\frac{2n}{3}}\,\pi\right)}{4\sqrt{3}\,n}, \quad n\to\infty.$$

注意 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ →

$=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\cdots$

$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{\frac{k(3k+1)}{2}}+x^{\frac{k(3k-1)}{2}}\right)$. 所以

有递推公式：$P(n)=P(n-1)+P(n-2)-P(n-5)-P(n-7)+\cdots$

$$=\sum_k(-1)^{k-1}P(n-g_k).$$

其中 $k=1,-1,2,-2,\cdots$ $g_k=\frac{k(3k-1)}{2}$.

这个递推公式叫Euler的五角形数定理.

Date:
Place:
Reminders

例：设$P(n)$是把n分拆成不大于它的正整数之和的方法的数目. 例如：

$P(1)=1$. $P(2)=2$ (因为 $2=2=1+1$).

$P(3)=3$. 因为 $3=3=2+1=1+1+1$.

$P(4)=5$ 因为 $4=4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$.

$P(5)=7$ 因为 $5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1$

$=2+1+1+1=1+1+1+1+1$, ...

则$P(n)$的生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^n}=:f(x)$$

设 $g(n)$是将n分成不同正整数之和的方法数.

则 $\sum_{n=0}^{\infty}g(n)x^n=\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)=g(x)$

设 $r(n)$是将n分成奇正整数之和的方法数.

则 $\sum_{n=0}^{\infty}r(n)x^n=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}}=h(x)$.

注意 $g(x)=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdots\cdots=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\cdots$

$=h(x)$. 所以 $r(n)=g(n)$.

Date:
Place:
Reminders

需要乘法吗? 似乎直接考虑 $C(D,\mathbb{R}^n)$ 更好.
↓
$C(D)$ 显然也是环. 它事实上是一个所谓 Banach代数 →
$f,g\in C(D)\Rightarrow f+g\in C(D),\ f\cdot g\in C(D),\ \lambda f\in C(D)$
~~$\forall\lambda\in\mathbb{R}$~~

$\|\cdot\|$ 不满足平行四边形法则, 所以不是由内积诱导 →
的. 后面会证明 $C(D)$ 中的单位球面不是紧的. 于是不
同的范数是不等价的.

Date:
Place:
Reminders

§9.5 紧集上的连续函数空间.

设 $D\subseteq\mathbb{R}^d$ 是紧集. $C(D)$ 表示 D 上的连续函数构成的
集合. 显然 $C(D)$ 是一个线性空间. 由连续函数的性质知,
对 $\forall f\in C(D)$, f 都是有界的. 于是可定义: $\|\cdot\|: C(D)\to\mathbb{R}_{\geq0}$
~~满足 ① $\|f\|\geq0$, $\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$.~~ $\|f\|=\sup\limits_{x\in D}|f(x)|$

满足 ① $\|f\|\geq0$. $\|f\|=0\Leftrightarrow f=0$.
② $\|\lambda f\|=|\lambda|\cdot\|f\|$
③ $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$.
所以 $\|\cdot\|$ 成为 $C(D)$ 上的范数.

接下来可定义 $d(\cdot,\cdot): C(D)\times C(D)\to\mathbb{R}_{\geq0}$.
$(f,g)\longmapsto d(f,g)=\|f-g\|$.
不难验证 d 是一个距离. 于是 $C(D)$ 成为一个度量空间.

若 $\{f_n\}\subseteq C(D)$ 是按上述度量的 Cauchy 列. 即对 $\forall\varepsilon>0$
$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n,m>N$ $\sup\limits_{x\in D}|f_n-f_m|<\varepsilon$. 则 $\{f_n\}$ 在
D 上一致收敛. 且其极限也是 D 上的连续函数. 所以
$\{f_n\}$ 在 $C(D)$ 中收敛. 这意味着 $C(D)$ 是完备度量空间.

定义：① $\mathcal{F}\subseteq C(D)$ 是开的，如果对 $\forall f\in\mathcal{F}$，
$\exists\delta>0$ s.t. $B_\delta(f)=\{g\in C(D)\mid d(f,g)<\delta\}\subseteq\mathcal{F}$.

② $\mathcal{F}\subseteq C(D)$ 是闭的 如果 $C(D)\setminus\mathcal{F}$ 是开的.

（等价地，$\mathcal{F}$ 是闭的，如果 $\mathcal{F}$ 中的任意 ~~Cauch~~ Cauchy

③ 此即完备 → 列收敛到 $\mathcal{F}$ 中的点. 即若 $\{f_n\}\subseteq\mathcal{F}$，$f_n\rightrightarrows f$，则 $f\in\mathcal{F}$.

证明：闭⇒完备：假设 $f\notin\mathcal{F}$，则存在 $\delta>0$ 使 $B_\delta(f)\cap\mathcal{F}=\emptyset$.
取 $\varepsilon=\frac{\delta}{2}$，则存在 $f_{n_0}\in\mathcal{F}\cap B_\delta(f)$. 矛盾.

闭⇐完备：设 $f\notin\mathcal{F}$ 且对 $\forall\delta_n=\frac{1}{n}$ $\exists f_n\in B_{\delta_n}(f)\cap\mathcal{F}$.
则 $f_n\to f$. 这与 $\mathcal{F}$ 完备矛盾. ）

④ $\mathcal{F}\subseteq C(D)$ 是紧的，如果任意开覆盖有有限子覆盖

~~（紧⇒闭）~~

⑤ $\mathcal{F}\subseteq C(D)$ 是列紧的，如果任意序列有收敛子序列.

性质：(1) 列紧⇒闭（完备）：设 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列，$f_n\to f$，由列紧知存在
收敛子列 $\{f_{n_k}\}$ 使 $f_{n_k}\to f$，则对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_k$ s.t.
对 $\forall k>n_k$ 有 $d(f_{n_k},f)<\varepsilon/2$ ~~取 ... 则对 $\forall n>N$~~

因 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列，所以 $\exists N_0$ s.t. $\forall n_1, n_2>N_0$ 有 $|f_{n_1}-f_{n_2}|<\frac{\varepsilon}{2}$

取 $N=\max(N_0,n_k)$，则对 $\forall n>N$，取 $k=n_k+1$，有

$|f_n-f|\le|f_n-f_{n_k}|+|f_{n_k}-f|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 所以 $f_n\to f$. □

且 $f\in\mathcal{F}$ 所以 $\{f_n\}$ 是也收敛到 $\mathcal{F}$ 中的点

(2) 列紧⇒有界　假设 $\mathcal{F}$ 无界，即对 $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists f_n\in\mathcal{F}$ s.t. $\|f_n\|\ge n$.
则 $\{f_n\}$ 显然无收敛子列.

若 $\mathcal{F}\subseteq C(D)$ 是有界的，即 $\exists M\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall f\in\mathcal{F}$，有
$\|f\|\le M$. 即对 $\forall x\in D$，$|f(x)|\le M$. 所以若 $\mathcal{F}=\{f_n\}$
这正是一致有界的定义.

~~若 $\mathcal{F}\subseteq C(D)$ 是闭的 即对 $\forall\{f_n\}\subseteq\mathcal{F}$ 若 $f_n\rightrightarrows f$ 则 $f\in\mathcal{F}$~~

我们知道在 $\mathbb{R}^n$ 中有界序列总有收敛子列，但在 $C(D)$ 中这不对.

例：$D=[0,1]$，$f_n(x)=x^n$，显然 $f_n\in C(D)$，$\|f_n\|\le 1$.
若 $f_{n_k}\rightrightarrows f$，则 $f_{n_k}\to f=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & x\neq 1\end{cases}$，$f\notin C(D)$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集总是紧的 但在 $C(D)$ 中这也不对.

例：$D=[0,1]$，$B=B_1(0)=\{f\in C(D)\mid\|f\|\le 1\}$，则 B
显然是有界闭集，但 B 不紧，反例同上（上例说明不列紧，$C(D)$ 中列紧等价于紧）

所以在 $C(D)$ 中我们要重新考虑各种性质和基本定理.

定义：$\mathcal{F}\subseteq C(D)$ 称为完全有界的，如果对 $\forall\varepsilon>0$，
存在有限点集 $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{F}$，使 $\mathcal{F}\subseteq B_\varepsilon(f_1)\cup\cdots\cup B_\varepsilon(f_n)$

Date:
Place:

Reminders

(3) 紧⇒有界：任取 $\varepsilon>0$. 做开覆盖 $\{B_\varepsilon(f)\}_{f\in F}$ 得有限子覆盖 $B_\varepsilon(f_1)\cup\cdots\cup B_\varepsilon(f_n)\supseteq F$. 对于 $\forall x,y\in F$.

$d(x,y)\le d(x,f_1)+d(f_1,f_2)+d(f_2,y)$ (设 $x\in B_\varepsilon(f_1)$, $y\in B_\varepsilon(f_2)$)

$\le 2\varepsilon+\max\limits_{1\le i,j\le n}d(f_i,f_j)$. 所以 F 有界.

(4) 紧⇒闭：设 f_n 是 Cauchy 列. $f_n\in F$. $f_n\to f$. 假 $f\notin F$.

~~构造开集 $B_n(f)$, $n=1,2,\cdots$ 因为 F 有界. 所以必存在 N 使 $F\subseteq B_N$. 于是 B~~

因为 F 有界. 所以必存在 $D>0$ 使 $B_D(f)\supseteq F$. 构造开集 $U_n=B_D(f)-\overline{B}_{D/n}(f)$. 则

$\bigcup U_n=B_D(f)-\bigcap\overline{B}_{D/n}(f)=\mathring{B}_D(f)\supseteq F$. 于是 $\{U_n\}$ 构成 F 的开覆盖. 但 $\{U_n\}$ 的任何有限子集不可能覆盖 F. 因为若 $U_{n_1}\cdots U_{n_k}$ 覆盖 F. 则 $U_{n_1}\cup\cdots\cup U_{n_k}=B_D(f)-\overline{B}_{D/N}(f)$.

$N=\max(n_1\cdots n_k)$. 取 $\varepsilon=D/N$. 存有 $f_{n_0}\in F$ 满足 $d(f_{n_0},f)<\varepsilon$.

于是 $f_{n_0}\notin U_{n_1}\cup\cdots\cup U_{n_k}$. 由此可知 F 不紧. 矛盾. □

紧和列紧都可推出有界闭. 但有界闭却不能推出它们. 这主要是因为有界这个性质在 $C(D)$ 上太弱了. 我们需要一个更强的版本. 即"完全有界".

Date:
Place: 左

由左边可知 紧⇒完全有界⇒有界.

引理：列紧⇒完全有界

证明：假设 F 不是完全有界的. 即 $\exists\varepsilon_0$ 使得对 F 的任一有限子集 $\{f_1,\cdots f_n\}$. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_{\varepsilon_0}(f_i)\not\supseteq F$. 任取 $f_1\in F$. 则存在 $f_2\in F$. 使得 $f_2\in F\setminus B_{\varepsilon_0}(f_1)$. 即 $f_2\in F$. $d(f_1,f_2)\ge\varepsilon_0$ 对于 $\{f_1,f_2\}$. $\exists f_3\in F$. 使 $d(f_3,f_1)\ge\varepsilon_0$. $d(f_3,f_2)\ge\varepsilon_0$ 对 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 可得 $f_4,\cdots$, 于是得 $\{f_n\}$ 满足对 $k\ne l$ 有 $d(f_k,f_l)\ge\varepsilon_0$ 所以 $\{f_n\}$ 的任何子列不是 Cauchy 列. 于是 F 不列紧. □

~~定理：在 $C(D)$ 的子集 F 紧⇔列紧⇔完全有界且闭(或完备)~~

~~证明：已知 紧⇒完全有界闭. 列紧⇒完全有界闭 所以只需证完全有界闭⇒列紧, 完全有界闭⇒紧(或列紧⇒紧).~~

~~引理：紧⇒列紧~~

~~证明：设 $f_n\in F$. 若 $\{f_n\}$ 有限, 显然有收敛子列. 所以可设 $\{f_n\}$ 为无限集. 假设 f_n 无收敛子列.~~

定理：$F\subseteq C(D)$ 则 F 紧⇔F 列紧⇔F 完全有界且闭(或完备).

Date:
Place:
Reminders

引理2: 紧 $\Rightarrow$ 列紧

证明: 设 $F\subseteq C(D)$ 紧 但不列紧. 即存在 $\alpha: \mathbb{N}\to F$, $n\mapsto f_n$ 无收敛子列. 记 $E=\mathrm{Im}(\alpha)$. 则 ① E 必是无穷集 (若 E 有限, 例如 $E=\{g_1,\cdots,g_k\}$, 则必有某个 g_i 被 α 命中无穷多次. 由此可得收敛子列). ② F 中的任何点不能是 E 的聚点. 即对 $\forall g\in E$, 存在 $\varepsilon>0$ 使 $B_\varepsilon(g)\cap E=\{g\}$. 这说明 E 中每个单点集都是 E (按子空间拓扑) 的开集. ③ 设 $\beta:\mathbb{N}\to E$ 是 E 中的 Cauchy 列, 则 $\mathrm{Im}\,\beta$ 必是有限集, (否则可得 α 的收敛子列) 于是有某一 $h\in \mathrm{Im}\,\beta$ 被 β 命中无穷多次. 所以相应的 β 的子列收敛到 h. 于是 β 也收敛到 h. 这说明 E 是闭集. 因为 F 紧, 所以 E 也紧. 最后, 考虑 $E=\bigcup_{g\in E}\{g\}$. 这是紧集 E 的开覆盖, 且任意有限子覆盖不能盖住 E. 矛盾! $\square$

引理3: 完全有界 + 闭 $\Rightarrow$ 列紧.

证明: 设 F 完全有界且闭. $\{f_n\}$ 是 F 中的点列. 要证 f_n 有收敛子列. (因为 F 是闭, 所以收敛子列的极限必在 F 中. 所以只需证明是 Cauchy 列). 取 $\varepsilon=1$. 因为完全有界 存在 $g_1^{(1)},\cdots,g_k^{(1)}$ 使 $F\subseteq B_\varepsilon(g_1^{(1)})\cup\cdots\cup B_\varepsilon(g_k^{(1)})$. 于是必有某个 $B_\varepsilon(g_i^{(1)})$ 中有无穷多个 f_n, 把这些 f_n 对应的子列记为 $\{f_n^{(1)}\}$. 不妨设为 $B_1=B_\varepsilon(g_1)$. 再取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$. 同理可得 $B_2=B_\varepsilon(g_2)$, 其中有无穷多个 $\{f_n^{(1)}\}$. 这个 $\{f_n^{(1)}\}$ 的子列记为 $\{f_n^{(2)}\}$. 如此继续. 对每个 $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$, 存在 $\{f_n^{(k-1)}\}$ 的子列 $\{f_n^{(k)}\}$, 它完全落在某个球 $B_k=B_\varepsilon(g_k)$ 中.

Date:
Place:

Reminders

$\{f_i^{(m)}\}$ 也是 $\{f_i^{(n)}\}$ 的子列. 所以为什么不直接 →
得 $d(g_m, g_n) \le \frac{1}{2^{n-1}}$? 这样的 ~~…~~ 结 $\frac{1}{2^n}$ 都
没必要. 直接取 $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 就行了.

设 $\{U_\alpha\}$ 是 F 的开覆盖. 若存在 $\varepsilon > 0$ 使得对 $\forall f \in F$, $B_\varepsilon(f)$ 包含于某一 U_α. 则称 ε 是 $\{U_\alpha\}$ 的一个 Lebesgue 数.

推论: 列紧 ⇒ 紧 →

证明: 列紧 ⇒ 完全有界
⇒ Lebesgue 数 } ⇒ 紧. □

Date:
Place:

Reminders

现在考虑子列 $\{f_n^{(n)}\}$ 对于 $\forall n, m$. 不妨设 $m \ge n$.

则有 $d(f_m^{(m)}, f_n^{(n)}) \le d(f_m^{(m)}, f_{m-1}^{(m-1)}) + \cdots + d(f_{n+1}^{(n+1)}, f_n^{(n)})$

$\le 2 \cdot \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + 2 \frac{1}{2^n} < 2^{2-n}$.

所以对 $\forall \varepsilon > 0$. 只要取 $N \in \mathbb{N}$ 使得对 $\forall n > N$. $2^{2-n} < \varepsilon$. 则对 $\forall n, m > N$. 有 $d(f_m^{(m)}, f_n^{(n)}) < \varepsilon$. 即 $\{f_n^{(n)}\}$ 是 Cauchy 列. 证毕. □

引理4: 列紧 ⇒ Lebesgue 数.

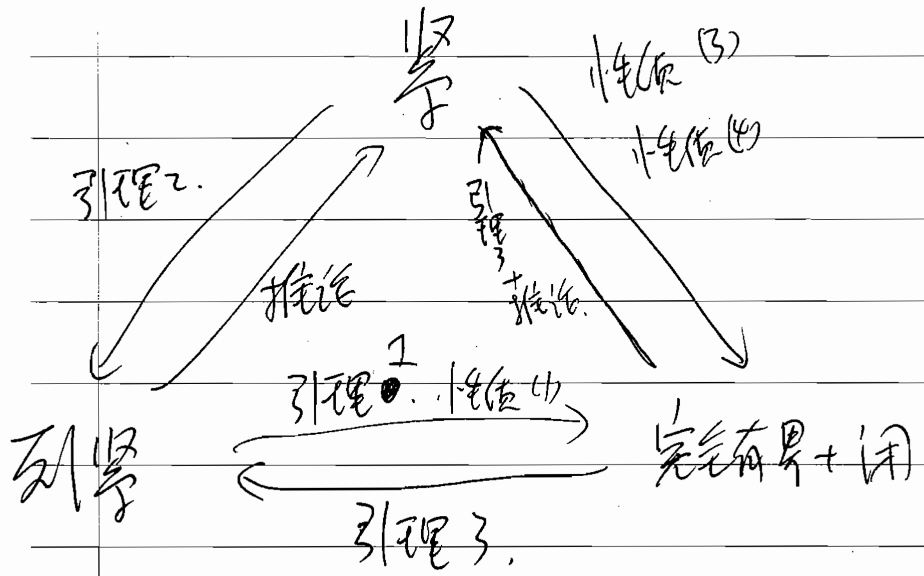
证明: 设 F 列紧. $\{U_\alpha\}$ 是它的开覆盖. 假设对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 f 使 $B_\varepsilon(f)$ 不在任何 U_α 中. 依次取 $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$, 得 $f_1, f_2, f_3, \cdots$
则 $\{f_n\}$ 有收敛子列 $\{f_{n_k}\}$. 设 $f_{n_k} \to f$. $f \in U_0$, 因为 U_0 开. 所以存在 $\delta > 0$, 使 $B_\delta(f) \subseteq U_0$. 因为 $f_{n_k} \to f$. 所以存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得对 $\forall k > K$. $d(f_{n_k}, f) < \frac{\delta}{2}$. 因为 $k > K$. 所以 $B_{\frac{1}{k}}(f_{n_k}) \subseteq B_\delta(f) \subseteq U_0$. 这与 $\{f_i\}$ 的取法矛盾. □

引理5: 完全有界 + Lebesgue 数 ⇒ 紧

证明: 设 F 完全有界. $\{U_\alpha\}$ 是它的开覆盖. 且存在 $\varepsilon > 0$ 使得任一 $B_\varepsilon(f)$ $(f \in F)$ 落在某一 U_α 中. 因为完全有界, 所以存在 $f_1, \cdots, f_n$ 使 $F \subseteq B_\varepsilon(f_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(f_n)$. 于是 $F \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$.
所以紧.

Date:
Place:

Reminders



例：$\mathbb{R}^n$ 中 E相对紧 $\Leftrightarrow$ E有界.

相对紧 $\Leftrightarrow$ 完全有界.

（E相对紧 $\Leftrightarrow$ $\bar{E}$紧 $\Leftrightarrow$ $\bar{E}$完全有界 $\Leftrightarrow$ E完全有界）

见下页证明.

Date: 不妨说为了更好地刻画完全有界性.

Place:

Reminders

在实际的应用中,我们面对的往往不是一个完整的紧集,而仅仅是它的子集,与此对应的概念是相对紧.

定义：设 $E\subseteq B$, 若 $\bar{E}$ 是紧的,则称 E 是相对紧或预紧的.

性质：(1) 设 F 是B的紧子集, 则 E 是 F 的任意子集,

则 E 相对紧

证明：F紧 $\Rightarrow$ F闭 $\Rightarrow$ $\bar{E}\subseteq F$, F紧集的闭子集还是紧的,所以 $\bar{E}$ 紧. □

因此,只要E是某紧集的子集,E就是相对紧的.

(2) $E\subseteq B$ 相对紧 $\Leftrightarrow$ E的任意序列 $\{x_n\}$ 包含收敛于B中的子序列.

~~证明：$\{x_n\}$ 也是 $\bar{E}$ 中的序列, 因为 $\bar{E}$ 紧, 是列紧, 于是~~

$\{x_n\}$ 有收敛于 $\bar{E}$ 的子序列.

$\Leftarrow$：要证 $\bar{E}$ 紧, 只需证 $\bar{E}$ 列紧. 设 $\{x_n\}$ 是 $\bar{E}$ 中的序列

• 若 $\{x_n\}$ 中有无穷多个在E中, 则这个E中的子列有收敛于B中的子序列, 因为 $\bar{E}$ 完备, 所以这个子列的极限必在 $\bar{E}$ 中, 所以 $\{x_n\}$ 有收敛在 $\bar{E}$ 中的子列.

• 若 $\{x_n\}$ 中只有有限个在E中 不妨将这些去掉, 假设

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

每个f_n都在$\bar{E}$中. 设f_n是$\{f_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$的极限, 其中$f_{n,m}\in E$, 考虑$\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$, 它是$E$中的序列. 所以会有收敛在$\bar{E}$中的子列. 不妨设其为$\{f_{n_k,n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

证明: $\Rightarrow$: $\{f_n\}$也是$\bar{E}$中的序列. $\bar{E}$紧 $\Rightarrow$ $\bar{E}$列紧, 于是$\{f_n\}$有收敛子列$\{f_{n_k}\}$. $f_{n_k}\to f$. $f\in\bar{E}\subseteq B$.

$\Leftarrow$: E相对紧 $\Leftrightarrow$ $\bar{E}$紧 $\Leftrightarrow$ $\bar{E}$完全有界 $\Leftrightarrow$ E完全有界

(若E完全有界. 对于$\varepsilon>0$, 存在$f_1,\cdots,f_k\in E$使得

$E\subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f_1)\cup\cdots\cup B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f_k)$. 于是$\bar{E}\subseteq\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f_1)}\cup\cdots\cup\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f_k)}$

于是$\bar{E}\subseteq B_{\varepsilon}(f_1)\cup\cdots\cup B_{\varepsilon}(f_k)$. 所以$\bar{E}$也完全有界)

E完全有界的证明与引理0 (列紧$\Rightarrow$完全有界)完全相同. □

很多分析中的结论都表述为某一函数族中任意序列有收敛于~~某~~空间中的子列. 这也是为什么相对紧如此重要的原因.

$B=C(D,\mathbb{R}^m)$中的相对紧子集有一个非常实用的刻画. 即下面的Arzela-Ascoli定理. 这个定理需要个新的性质, 叫等度连续.

定义：$E \subseteq B = C(D, \mathbb{R}^m)$ 称为等度连续的，如果对 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall f \in E$ $\forall x_1, x_2 \in D$，满足 $d(x_1, x_2) < \delta$，有 $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

对于 $\forall f \in E$，因为 D 紧，所以 f 总是一致连续的，即对 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x_1, x_2 \in D$ 只要 $d(x_1, x_2) < \delta$，就有 $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. 这里的 δ 不仅依赖 ε 还与 f 有关。所以等度连续的核心要求是 E 中的 f 具有相同的 δ，或者说连续的程度是一致的。这是与一致~~连续~~收敛类似的一个概念。

例：设 $\{f_\alpha\}$ 是 $D \to \mathbb{R}^m$ 的可微函数族，其导数族为 $f'_\alpha : D \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$. 若 $\{f'_\alpha\}$ 一致有界，即对 $\forall \alpha$ $\forall x$ $\|f'_\alpha(x)\| \le M$，其中 $\|\cdot\|$ 是 $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ 上的标准范数。则由有限增量定理 $\|f(x_1) - f(x_2)\|_{\mathbb{R}^m} \le M \cdot \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d}$.
所以，对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$，则当 $d(x_1, x_2) < \delta$ 时，有 $d(f_\alpha(x_1), f_\alpha(x_2)) < \varepsilon$. 所以 $\{f_\alpha\}$ 等度连续。

这是等度连续最常用的一个场合。

Zorich 此处误为完全有界. AA定理的必要 → 好处就是将完全有界减弱为有界了

引理: 设 $f_n \in B$. 若 $f_n \rightrightarrows f$. 则 $\{f_n\}$ 完全有界且等度连续.

证明: f 连续, D 紧 ⇒ f 在 D 上一致连续. 即对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_0 > 0$ s.t. 对 $\forall x, y \in D$. $d(x,y) < \delta_0$ $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$

因为 $f_n \rightrightarrows f$. 所以 $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n > N$. $\forall x \in D$. $d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$. 下另对 $n > N$. $\forall x, y \in D$, 有 $d(f_n(x), f_n(y)) \le d(f_n(x), f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), f_n(y)) < \varepsilon$. 所以 $\{f_n\}_{n \ge N}$ 是等度连续的.

对 $f_i\ (i=1 \cdots N)$ 可取 $\delta_i\ (i=1 \cdots N)$ 使得当 $d(x,y) < \delta_i$ 时 $d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$. 最后取 $\delta = \min(\delta_1, \cdots, \delta_N, \delta_0)$. 则对 $\forall f_i\ (i=1,2,\cdots)$. 以及 $\forall x, y \in D$. $d(x,y) < \delta$, 有 $d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$. 所以 $\{f_n\}_{n \ge 1}$ 也是等度连续的.

完全有界性可由 $\{f_n\}$ 列紧推出. □

注: AA定理中的一致有界还可改为逐点有界. 即对 $\forall x \in D$. $\{f(x) \mid f \in E\}$ 是有界集.

证明: 即证 逐点有界 (等度连续 +) ⇒ 一致有界

定理 (Arzelà-Ascoli) 设 $E \subset B = C(D, \mathbb{R}^n)$ 则 E 相对紧 ⇔ E 一致有界且等度连续

证明: ⇒: 相对紧 ⇒ 完全有界 ⇒ 有界.

~~相对紧 ⇒ 等度连续: 设 E 不是等度连续的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对 $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta, y_\delta \in D$ 以及 $f \in E$. 满足 $d(f(x_\delta), f(y_\delta)) \ge \varepsilon_0$. 依次取 $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 则得 $x_n, y_n \in D$ 以及 $f_n \in E$ 满足 $d(f_n(x_n), f_n(y_n)) \ge \varepsilon_0$. $d(x_n, y_n) < \delta_n$. 且因为 D 紧. 所以 x_n 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0$. 因为 $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$. 所以 $y_{n_k} \to x_0$. 下面考虑 $\{f_{n_k}\}$. 若它有收敛子列 $\{f_{n_{k_l}}\}$. $f_{n_{k_l}} \to f$. 则 f 连续. 但~~

相对紧 ⇒ 等度连续. 假设 E 不等度连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对 $\forall \delta > 0$ $\exists x_\delta, y_\delta \in D$ 以及 $f_\delta \in E$. 满足 $d(x_\delta, y_\delta) < \delta$ 且 $d(f_\delta(x_\delta), f_\delta(y_\delta)) \ge \varepsilon_0$. 依次取 $\delta_n = \frac{1}{n}$. $n = 1, 2, \cdots$. 则得 $x_n, y_n \in D$. 以及 $f_n \in E$ 满足 $d(x_n, y_n) < \delta_n$. 且 $d(f_n(x_n), f_n(y_n)) \ge \varepsilon_0$.

~~因为 D 紧, 所以 x_n 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. $x_{n_k} \to x_0$. 因为 $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$. 所以 $y_{n_k} \to x_0$. 下面考虑 $\{f_{n_k}\}$.~~

假如 $\{f_{n_k}\}$ 有收敛子列 $\{f_{n_{k_l}}\}$ 则 $\{f_{n_{k_l}}\}$ 应等度连续 (左边的引理)

~~取 ε_0. 若存在 $\delta > 0$ 使得当 $d(x,y) < \delta$ 时, 有 $d(f_{n_{k_l}}(x), f_{n_{k_l}}(y)) < \varepsilon$.~~

Date:
Place:

Reminders

$\forall f \in \mathcal{F}$

取 $\varepsilon>0$ 选 $\delta>0$ 使 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 对 $\forall f$ $x,y\in D$ $d(x,y)<\delta$
成立 因为 D 紧,所以完全有界 所以存在 $x_1\cdots x_k$ 使
$D\subseteq B_\delta(x_1)\cup\cdots\cup B_\delta(x_k)$. 设 $|f(x_i)|\leq M_i$, $\forall f\in \mathcal{F}$
取 $M=\max(M_1,\cdots,M_k)$. 则
$\|f(x)\|\leq d(f(x),f(x_i))+\|f(x_i)\|$
$<\varepsilon+M$. 对 $\forall f$. $\forall x$ 成立. 所以一致有界. $\square$

f_n 一致有界 $\Rightarrow$ A 有界. →

除前有限项外

$\{g_n\}$ 事实上是每个 $\{f_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $k=1,2,\cdots$ 的子列. →
因为 $\{f_n^{(k)}(x_k)\}$ 收敛, 所以 $\{g_n(x_k)\}$ 也收敛
$\forall k$

Date:
Place:

Reminders

假设对于前面的 ε_0. 对任意 $\delta>0$, 取 $\delta_{n_{k_0}}<\delta$.
则对于 $x_{n_{k_0}}$ 和 $y_{n_{k_0}}$ 有 $d(x_{n_{k_0}},y_{n_{k_0}})<\delta_{n_{k_0}}<\delta$.
而 $d(f_{n_{k_0}}(x_{n_{k_0}}),f_{n_{k_0}}(y_{n_{k_0}}))\geq\varepsilon_0$. 矛盾.

$\Leftarrow$: 当 D 是有限集时. B 即 $\mathbb{R}^{\#D}$, 有界等度连续子集即 $\mathbb{R}^{\#D}$ 中的有界集. 显然是相对紧的. 所以不妨设 D 是无限集.
因为 D 紧,所以完全有界 所以对 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$. 存在
$\{x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}\}$ 使得 $D\subseteq B_{\varepsilon_n}(x_1^{(n)})\cup\cdots\cup B_{\varepsilon_n}(x_{k_n}^{(n)})$.
设 $E=\{x_1^{(1)},\cdots x_{k_1}^{(1)},x_1^{(2)},\cdots,x_{k_2}^{(2)},\cdots\}$. 则 E 是 D 的稠密子集.
将 E 的点重新编号为 $E=\{x_1,x_2,\cdots\}$.
对于 E 中的任意序列 $\{f_n\}$. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的点集 $\{f_n(x_1)\}=A$.
~~则 A 是有界的 (对于 $\varepsilon>0$ 取 $f_{n_1},\cdots,f_{n_k}$ 使 $\{f_n\}\subseteq B_\varepsilon(f_{n_1})\cup\cdots\cup B_\varepsilon(f_{n_k})$ 再取 $y_i=f_{n_i}(x_1)$. 则对 $\forall y\in A$. $y=f_{n_0}(x_1)$. 设 $f_{n_0}\in B_\varepsilon(f_{n_i})$ 于是有 $d(y,y_i)<\varepsilon$. 所以 $A\subseteq B_\varepsilon(y_1)\cup\cdots\cup B_\varepsilon(y_k)$)~~
所以 $\{f_n(x_1)\}$ 有收敛子列 $\{f_{n_k}(x_1)\}$. 我们将它们重新编号为 $\{f_n^{(1)}\}$. 现在考虑 $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$. 则它也有收敛子列
$\{f_{n_k}^{(1)}(x_2)\}$ 将相应的函数列记为 $\{f_n^{(2)}\}$. 依次类推.
最后考虑 $g_n=\{f_n^{(n)}\}$ ~~则 g_n 在 E 的每个点上都收敛~~ 则 g_n 在 E 的每个点都收敛.
下面证 g_n 在 D 上一致收敛.

Date:
Place:
Reminders

推论：$E\subseteq B$ 紧 $\Leftrightarrow$ E 有界闭且等度连续.

Date:
Place:
Reminders

对于 $\varepsilon>0$ 选 $\delta>0$，使得对 $\forall f\in E$，$\forall x,y\in D$，$d(x,y)<\delta$，都有 $d(f(x),f(y))<\varepsilon/3$. 取 n 满足 $\frac{1}{n}<\delta$. 设 $I_n=\{\xi_1,\dots,\xi_k\}\subseteq I$ 满足 $D\subseteq B_\delta(\xi_1)\cup\dots\cup B_\delta(\xi_k)$.

因为 $\{g_n(\xi_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，所以 $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n,m>N$. 有 $d(g_n(\xi_i),g_m(\xi_i))<\varepsilon/3$ $i=1\dots k$.

对于 $\forall x\in D$. $x\in$ 某一 $B_\delta(\xi_i)$. 即 $d(x,\xi_i)<\delta$. 于是 $d(g_n(x),g_n(\xi_i))<\varepsilon/3$ 所以有

$$d(g_n(x),g_m(x))\le d(g_n(x),g_n(\xi_i))+d(g_n(\xi_i),g_m(\xi_i))+d(g_m(\xi_i),g_m(x))<\varepsilon.$$

所以 $\{g_n\}$ 是 B 中的 Cauchy 列 因此 E 相对紧. □

例：设 $f_n\in R[a,b]$ 且 $\{f_n\}$ 一致有界. 设 $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,dt$. 则 $\{F_n\}$ 有一致收敛子列.

证明：设 $|f_n(x)|\le M$ 则 $|F_n(x)|\le(b-a)M$ 所以 $\{F_n\}$ 一致有界. $\{F_n'=f_n\}$ 一致有界 $\Rightarrow\{F_n\}$ 等度连续.
所以 $\{F_n\}$ 有一致收敛的子列. □

Date:
Place:

Reminders

注：我们知道 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的，于是 $\mathbb{Q}^m$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中也是稠密的。类似地，若已知 $A\subseteq C(D)$ 稠，则 $A^m\subseteq C(D,\mathbb{R}^m)$ 也稠。

证明：对于 $\forall f\in C(D,\mathbb{R}^m)$，$f=(f_1,\cdots,f_m)$，$\forall\varepsilon>0$ 则存在 $P_1,\cdots,P_m\in A$，使得 $\|f_i-P_i\|\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$

所以 $\|f-P\|=\sqrt{\|f_1-P_1\|^2+\cdots+\|f_m-P_m\|^2}$

$$<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m}+\cdots+\frac{\varepsilon^2}{m}}=\varepsilon.$$

所以 A^m 在 $C(D,\mathbb{R}^m)$ 中稠密。 □

② 设 A 是 B 的子代数，若 $1\in A$，则称 A 是含幺的，或含常数的。

例 ③ $A=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(x,x^2,x^3,\cdots)$ 是子代数，但不含常数。

④ $A=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\sin\theta,\sin2\theta,\cdots)$ 同上。

Date:
Place:

Reminders

最后，我们来讨论 Stone-Weierstrass 定理。

它关心的是 ~~$B=C(D)$ 中的稠子代数~~ $B=C(D,\mathbb{R}^m)$ 中的稠子集。

由左边的注记，我们只需考虑 $B=C(D)$ 中的稠子集。

$C(D)$ 上除了 Banach 空间结构以外还有一个乘法 $(f,g)\mapsto f\cdot g$，所以它构成一个 Banach 代数（因为 $1\in C(D)$，所以含幺）

① 定义 若 B 的子空间 A 满足：$\forall f,g\in A$，$f\cdot g\in A$，则称 A 为 B 的一个子代数。

例：① $B=C[a,b]$，$A=\{\text{多项式}\}$（定义在 $[a,b]$ 上的）$=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1,x,x^2,\cdots)$，则 A 显然是 B 的子代数。

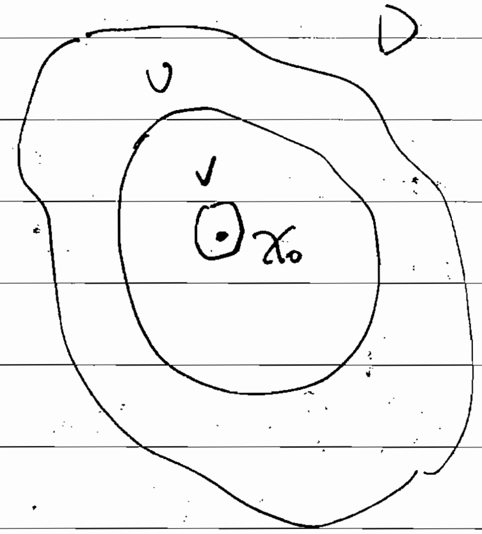
② $B=C(S^1)$，$A=\{P(\theta)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\cos i\theta+b_i\sin i\theta)\mid n\in\mathbb{N},\ a_i,b_i\in\mathbb{R}\}$

则 A 也是 B 的子代数（要用积化和差）。

③ A 称为分离点的，若对 $\forall x,y\in D$，$\exists f\in A$ s.t. $f(x)\ne f(y)$。

例：⑤ $A=\mathbb{R}\subseteq B$ 是含幺子代数，但不分离点。

来自 PAMS Vol 81 No.1 1981 →
Page 89-92.



定理(Stone-Weierstrass) 设 A 是 $B=C(D)$ 的含幺子代数. 若 A 分离点, 则 $\bar{A}=B$.

引理1. 设 $x_0\in D$. U 是 x_0 在 D 中的开邻域 则存在 x_0 的开邻域 V. $V\subseteq U$, 满足 对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $f\in A$ 使得: ① $0\le f(x)\le 1$. $\forall x\in D$

② 当 $x\in V$ 时, $f(x)<\varepsilon$.

③ 当 $x\in D\setminus U$ 时. $f(x)>1-\varepsilon$.

证明: 对于每个 $x\in D$, 由 A 分离点, 存在 $g\in A$ s.t. $g(x)\neq g(x_0)$, 定义 $P_x(y)=\dfrac{(g(y)-g(x_0))^2}{\|g-g(x_0)\|^2}$, 则 $P_x\in A$.

于是 $\|g-g(x_0)\|>0$

$P_x(x_0)=0$. $P_x(x)>0$. $0\le P_x(y)\le 1$, $\forall y\in D$.

现在取 $U_x=\{y\in D\mid P_x(y)>0\}$, 则 U_x 是 D 中的开集.
考虑 $D\setminus U$. 因为 U 开. D 紧. 所以 U^c 是紧集. $\{U_x\mid x\in U^c\}$ 给出 U^c 的开覆盖. 所以存在 $x_1,\cdots,x_m\in U^c$ 使得 $U^c\subseteq U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m}$. 令 $P=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}P_{x_i}$, 则 $P\in A$.
$0\le P\le 1$. $P(x_0)=0$, $P(y)>0$ 对 $\forall y\in U^c$.

注意 U^c 是紧的. 所以 P 在 U^c 上有最小值 δ. 显然 $0<\delta<1$. 现在取 $V=\{y\in D\mid P(y)<\frac{1}{2}\delta\}$. 下面针对这个 V 对 $\forall\varepsilon>0$ 构造 f.

Date:
Place:

Reminders

Bernoulli 不等式：$(1+h)^n \geq 1+nh$.
对 $h \geq -1$. $n=1,2,\cdots$. 成立.

Date:
Place:

Reminders

首先取 k 是大于 $\frac{1}{\delta}$ 的最小正整数. 由 $k<\frac{1}{\delta}+1$
$\delta<1$ 可知 $\frac{1}{\delta}<k<\frac{2}{\delta}$. 即 $1<k\delta<2$. 考虑函数
$q_n(y)=\left(1-p^n(y)\right)^{k^n}$ $n=1,2,\cdots$. 显然 $q_n\in A$.
$0\leq q_n\leq 1$. $q_n(x_0)=1$. 对于 $y\in V$. $kp(y)\leq k\delta/2<1$
所以由 Bernoulli 不等式 有 $q_n(y)\geq 1-(kp(y))^n\geq 1-\left(\frac{k\delta}{2}\right)^n$

所以当 $n\to\infty$ 时. $\overset{\text{在}V\text{上}}{q_n(y)\rightrightarrows 1}$. 对于 $y\in U^c$. $kp(y)\geq k\delta>1$
仍由 Bernoulli 不等式

$$q_n(y)=\frac{1}{k^n p^n(y)}\left(1-p^n(y)\right)^{k^n}k^n p^n(y)$$

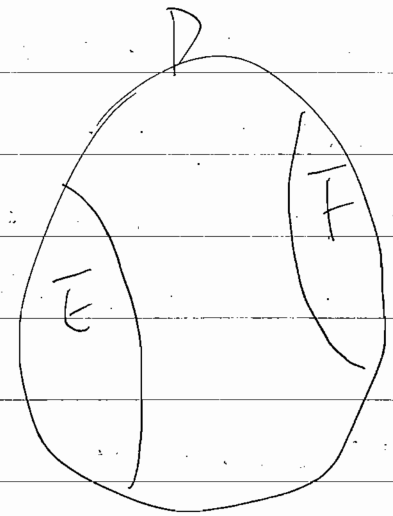
$$\leq\frac{1}{(k\cdot p(y))^n}\left(1-p^n(y)\right)^{k^n}\left(1+k^n p^n(y)\right)$$

$$\leq\frac{1}{(k\cdot p(y))^n}\left(1-p^n(y)\right)^{k^n}\left(1+p^n(y)\right)^{k^n}$$

$$=\frac{1}{(k\cdot p(y))^n}\left(1-p^{2n}(y)\right)^{k^n}\leq\frac{1}{(k\delta)^n}$$

所以当 $n\to\infty$ 时. $\overset{\text{在}U^c\text{上}}{q_n(y)\rightrightarrows 0}$.
因此, 对于 $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,N_1\in\mathbb{N}$. s.t. $\forall\,n>N_1$.
有 $|q_n(y)-1|<\varepsilon$ $\forall\,y\in V$. $\exists\,N_2\in\mathbb{N}$. s.t.
即 $q_n>1-\varepsilon$

Date:
Place:
Reminders



Date:
Place:
Reminders

即 $g_n < \varepsilon$ $\forall y \in U$

$\forall n > N_2$. 有 $|g_n(y)| < \varepsilon$. 最后取

$f = 1 - g_{n_0}$ $n_0 = \max(N_1, N_2) + 1$ 即可. □.

引理2 设 E, F 是 D 中不交的闭集, 则对 $\forall \varepsilon$

$0 < \varepsilon < 1$, 存在 $f \in A$ 使得

① $0 \le f(x) \le 1$ $\forall x \in D$

② 当 $x \in E$ 时, $f(x) < \varepsilon$.

③ 当 $x \in F$ 时, $f(x) > 1 - \varepsilon$.

证明: 取 $U = D \setminus F$. 对于每个 $x \in E$, 按引理1选 V_x 则

由 E 的紧性, 存在有限多个 $x_1, \cdots, x_m$, 使 $E \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$.

于是对 $\varepsilon > 0$ 有 $f_1, \cdots, f_m$ 满足 ① $0 \le f_i \le 1$, ② 在 V_{x_i} 上 $f_i < \frac{\varepsilon}{m}$, ③ 在 F 上

$f_i > 1 - \frac{\varepsilon}{m}$. 考虑函数 $f = f_1 \cdots f_m$. 则 $0 \le f \le 1$. 且在 E

上 $f < \frac{\varepsilon}{m} \le \varepsilon$. 在 F 上 $f > (1 - \frac{\varepsilon}{m})^m \ge 1 - \varepsilon$ □.

SW 定理的证明: 设 $f \in C(D)$. $\varepsilon > 0$ 我们要找 $g \in A$, 使

$|f(x) - g(x)| < 2\varepsilon$ 对 $\forall x \in D$ 成立. 不妨设 $f \ge 0$ (否则用

$f + \|f\|$ 替換 f), $\varepsilon < \frac{1}{3}$ (否则可取新 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ 代替之).

选取一个整数 n, 使 $(n-1)\varepsilon > \|f\|$. 对于 $j = 0, 1, 2, \cdots, n$

定义集合 $E_j = \{y \in D \mid f(y) \le (j - \frac{1}{3})\varepsilon\}$

$F_j = \{y \in D \mid f(y) \ge (j + \frac{1}{3})\varepsilon\}$.

Date:
Place:
Reminders

D中的

显然 E_j 与 F_j 都是闭集. 且 $E_j \cap F_j = \phi$. 特别地. 有

$\phi = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n = D$

$\phi = F_n \subseteq F_{n-1} \subseteq F_{n-2} \subseteq \cdots \subseteq F_1$ 根据引理2. 对于上述 E_j, F_j.

存在 $f_j \in A$ 满足 $0 \le f_j \le 1$. 在 E_j 上 $f_j < \frac{\varepsilon}{n}$. 在 F_j 上 $f_j > 1-\frac{\varepsilon}{n}$.

考虑函数 $g = \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{n} f_j$. 则 $g \in A$. 对 $\forall y \in D$. 则

必存在某个 j, 使 $y \in E_j \setminus E_{j-1}$. 于是 $(j-\frac{4}{3})\varepsilon < f(y) \le (j-\frac{1}{3})\varepsilon$.

因为 $E_j \subseteq E_i$ (对于 $i \ge j$). 所以有 $f_i(y) < \frac{\varepsilon}{n}$ (对于 $i \ge j$).

注意 $j-\frac{4}{3} > j-2+\frac{1}{3}$ 所以对于 $i \le j-2$. 有 $y \in F_i$. 所以

$f_i(y) > 1-\frac{\varepsilon}{n}$ (对于 $i \le j-2$). 所以

$$g(y) = \varepsilon \sum_{i=0}^{j-1} f_i(y) + \varepsilon \sum_{i=j}^{n} f_i(y)$$

$$\le \varepsilon \cdot j + \varepsilon \cdot (n-j+1) \cdot \frac{\varepsilon}{n} \le j\varepsilon + \varepsilon^2 < (j+\frac{1}{3})\varepsilon.$$

另一方面, 当 $j \ge 2$ 时.

$$g(y) > \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{j-2} f_i(y) > \varepsilon \cdot (j-1)(1-\frac{\varepsilon}{n}) = (j-1)\varepsilon - \frac{j-1}{n}\varepsilon^2$$

$$> (j-1)\varepsilon - \varepsilon^2 > (j-\frac{4}{3})\varepsilon.$$

当 $j \ge 1$ 时同样有 $g(y) > (j-\frac{4}{3})\varepsilon$. 因此,

$$|f(y)-g(y)| \le (j+\frac{1}{3})\varepsilon - (j-\frac{4}{3})\varepsilon < 2\varepsilon.$$ □

Date:
Place:
Reminders

推论：① 对于 $\forall f\in C[a,b]$，对于 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ $[a,b]$ 上的多项式 p，使得 $\|f-p\|<\varepsilon$.

② 对于 $\forall f\in C(S^1)$ $\forall\varepsilon>0$.

$=\{\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数$\}$

存在 $a_0+(a_1\cos\theta+b_1\sin\theta)+\cdots+(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$

使 $\|f-p\|<\varepsilon$.

连续版

定理(Brouwer不动点) 设 $B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\le 1\}$ $f: B\to B$ 连续. 则 存在 $x_0\in B$, 使 $f(x_0)=x_0$.

证明：假设对 $\forall x\in B$ $f(x)\neq x$. 定义 $g(x)=\|f(x)-x\|$. 则 g 是 B 上的连续函数. 且 $g>0$. 于是 由 B 紧 知 g 在 B 上有最小值 δ. 现在取 $\varepsilon=\frac{1}{3}\delta$. 由 Weierstrass 逼近定理, 存在多项式映射 $p: B\to\mathbb{R}^n$ 满足对 $\forall x\in B$, 有 $\|f(x)-p(x)\|<\varepsilon$. 于是 $\|p(x)\|\le\|f(x)-p(x)\|+\|f(x)\|<1+\varepsilon$.

定义 $Q(x)=\frac{1}{1+\varepsilon}p(x)$. 则 Q 为 B 到 B 的多项式映射. 由 C^1 版的 Brouwer 不动点定理(见Stokes公式部分)可知存在 $x_0\in B$, 使 $Q(x_0)=x_0$. 于是

$$g(x_0)=\|f(x_0)-x_0\|\le\|f(x_0)-p(x_0)\|+\|p(x_0)-Q(x_0)\|$$

$$<\varepsilon+\left\|p(x_0)\cdot\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\|\le 2\varepsilon=\frac{2}{3}\delta<\delta.$$

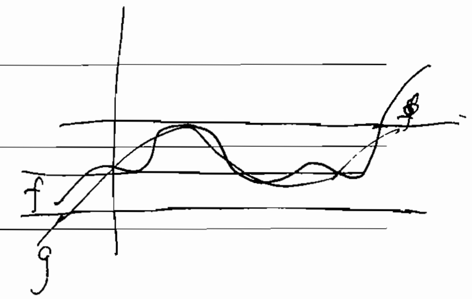
这与 δ 是 g 的最小值矛盾. □

换句话说，$i: E \to D$ 诱导的拉回(或称限制)映射 →
$i^*: C(D) \to C(E)$ 是满射.

$f_k - \tilde{f}_k = f_{k-1} - \tilde{f}_{k-1} - \tilde{f}_k = \cdots = f - (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \cdots + \tilde{f}_k)$. →

定理(紧集上的 Tietze 扩张) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^d$ 紧. $E \subseteq D$ 闭, $f \in C(E)$. 则存在 $g \in C(D)$, 使 $f = g|_E$. 且 $\|f\|_E = \|g\|_D$.

证明: D 紧 E 闭 $\Rightarrow$ E 紧. 记 $B = C(E)$. $A = C(D)|_E \subseteq B$. A 显然是子代数 含幺. 且分离点. $\forall x, y \in E$. 定义 $g(z) = d(z, x)$. 则 $g(x) = 0$. $g(y) = d(y, x) \neq 0$. 于是 A 在 B 中稠密. 对 $\forall f \in B$.
取 $\varepsilon = \frac{1}{2}\|f\|_E$. 则存在 $g \in A$. 使 $\|f - g\|_E \le \frac{1}{2}\|f\|_E$.
再取 $\tilde{f} = \max(\min(g, \|f\|_E), -\|f\|_E)$.
则有 $\|f - \tilde{f}\|_E \le \frac{1}{2}\|f\|_E$, 且 $\|\tilde{f}\|_D \le \|f\|_E$.



现在取 $f_1 = f$. 按上述方法得 $\tilde{f}_1$.
再取 $f_2 = f_1 - \tilde{f}_1$. 则得 $\tilde{f}_2$. ~~如此继续~~
~~则有 f_k~~ 再取 $f_3 = f_2 - \tilde{f}_2$, 得 $\tilde{f}_3$, 如此继续 则有

$$\|f_k - \tilde{f}_k\|_E \le \frac{1}{2}\|f_k\|_E = \frac{1}{2}\|f_{k-1} - \tilde{f}_{k-1}\| \le \cdots \le \frac{1}{2^k}\|f\|_E. \quad ①$$
$$\|\tilde{f}_k\|_D \le \|f_k\|_E \le \frac{1}{2^{k-1}}\|f\|_E. \quad ②$$

② 说明 $g = \sum_{k \ge 1} \tilde{f}_k$ 一致收敛 (Weierstrass 优级数法).
由 $C(D)$ 完备性. 知 $g \in C(D)$. ① 则说明 $g|_E = f$.
最后再取 $\tilde{f} = \max(\min(g, \|f\|_E), -\|f\|_E)$ 即可. □

(书上尚有 处处连续不可导函数 和 Peano 曲线 两例. 因为太丑陋, 不想讲. 略)

我们在数学分析中暂不考虑含参流形上的含参微分形式的 → 积分. 这类积分在当今的课程《奇点理论》中有重要的应用.

§10. 含参积分与广义积分

§10.1 含参积分 可变

含参积分即在积分区域或被积函数中含有参数的积分. 例如

$I(a,b)=\int_a^b f(x)dx$, $J(t)=\int_0^1 f(x,t)dx$,

$K(r)=\int_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy$, $\hat{f}(t)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx$.

更复杂的还可以是流形 M_t 上微分形式 ω_t 的积分 $\int_{M_t}\omega_t$.

~~广义积分根据定义是含参积分的极限~~

之前遇到的各种含参积分中, 参数都可视为固定的常数. 但在本章中, 我们希望它们动起来, 即考虑参数的变动对积分值的影响. 这包括极限行为, 连续性, 可微性, 可积性以及各种极限换序的合法性等问题.

定义: 设 $T\subseteq\mathbb{R}^n$. 若对 $\forall t\in T$, 有一个 $\mathbb{R}^m$ 中的 Jordan 可测集 D_t 以及 D_t 上的 Riemann 可积函数 f_t, 则可定义 T 上的含参积分 $I(t)=\int_{D_t} f_t(x)dx$.

若记 χ_t 是 D_t 的示性函数, 则 $\int_{D_t} f_t(x)dx=\int_{\mathbb{R}^m} f_t(x)\chi_t(x)dx$. 于是 $I(t)=\int_{\mathbb{R}^m} f_t(x)\chi_t(x)dx$. 所以总可认为区域是固定的, 变的只是被积函数. 不过, 在这种改写中, 积分本身要改为

Date:
Place:
Reminders

广义 Riemann 可积 ~~另一种情况是~~ 如果 D_t 是一致有界的，即 $\exists M>0$ s.t. $\forall t\in T$ $D_t \subseteq B_M(0)$，则可将 $\mathbb{R}^m$ 替换成 $\overline{B}_M(0)$，这时的积分就都是通常的 Riemann 积分。

根据以前讲的广义积分的定义，若 $E\subseteq\mathbb{R}^d$ 有一个穷竭 $\{E_n\}$ ($E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots\subseteq E$ s.t. $\bigcup E_n=E$) 由 Jordan 可测集构成的，$f\in E$ 满足每个 $f|_{E_n}\in R(E_n)$，则

$$\int_E f(x)dx := \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)dx$$

f 在 E 上关于 $\{E_n\}$ 的广义 Riemann 积分定义为

由此可见，广义积分其实是一种特殊的含参积分的极限。

若定义中的 f_t 仅在 D_t 上广义 Riemann 可积，则 $I(t)$ 称为一个广义含参积分。我们知道，广义积分具有和数项级数类似的性质，于是不难想象，广义含参积分就应该和函数项级数类似，也有一致收敛，极限换序等概念和问题。我们下面也考虑级数时的顺序，先考虑通常 Riemann 积分版的含参积分，再考虑广义 Riemann 积分版的含参积分，最后再看两类重要的含参积分即 Γ 函数和 B 函数。

Date:
Place:
Reminders

$\mathbb{R}^d$ 中 D_t 的变动往往会导致非常复杂的问题. 所以我们一般只考虑 D_t 与 t 无关的情况. 这时 $I(t)=\int_D f_t(x)\,dx$, 所以可把 $f_t(x)$ 为 $f: D\times T \to \mathbb{R}$, $I(t)=\int_D f(x;t)\,dx$. 这就变成 Fubini 定理中出现过的积分了. D_t 依赖 t 的情况仅会出现在 $d=1$ 时. 我们会考虑形如 $\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x;t)\,dx$ 的积分. 另外, 有些情况可转化为这种一维可变区域, 如 $D_t=B_{r(t)}(x_0)$ 可通过球坐标变换以及累次积分化为 $[0,r(t)]$ 上的含参积分.

定理1: 设 $T\subseteq\mathbb{R}^n$ 是紧集, $D\subseteq\mathbb{R}^m$ 是 Jordan 可测闭集. 若 $f\in C(D\times T)$, 则含参积分 $I(t)=\int_D f(x,t)\,dx$ 是 T 上的连续函数.

证明: 任取 $t_0\in T$. 要证明 $\lim_{t\to t_0}\int_D f(x,t)\,dx=\int_D f(x,t_0)\,dx$.

对 $\forall \varepsilon>0$. 因为 $D\times T$ 紧, 所以 f 在 $D\times T$ 上一致连续, 所以存在 $\delta>0$, s.t. 当 $\|(x,t)-(y,s)\|<\delta$ 时, 有 $|f(x,t)-f(y,s)|<\frac{\varepsilon}{\mu(D)}$. 于是当 $\|t-t_0\|<\delta$ 时, $\|(x,t)-(x,t_0)\|=\|t-t_0\|<\delta$. 于是

$$\left|\int_D f(x,t)\,dx-\int_D f(x,t_0)\,dx\right|\le\int_D |f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon.$$

所以 $I(t)$ 连续. $\square$

Date:
Place:

Reminders

~~⑤不难发. 实际上这正是含参广义积分的一致收敛性中的问题.~~

Date:
Place:

Reminders

注: ① $I(t)$ 在 T 上一致连续（连续函数性质，或直接改动上述证明中的几个字）.

③ 若 T 不紧，f 在 $D\times T$ 上一致连续，定理仍成立.（由证明过程可知 T 的紧性只为保证一致连续）

② 若 T 改为开集，定理仍成立.（对每个 $t_0\in T$，选 t_0 的紧邻域 $\subset T$ 即可.

④ 若 T 不紧，f 一致连续，还可考虑 $t_0\in \overline{T}\setminus T$ 的情况.

定理2 设 $T\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个闭区域（即区域的闭包），$D\subseteq\mathbb{R}^m$ 是一个 Jordan 可测集，$f\in C(D\times T)$，且满足 $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ $(i=1,\cdots,n)\in C(D\times T)$，则对 $i=1,\cdots,n$ 有

$$\frac{\partial}{\partial t_i}I(t)=\int_D \frac{\partial f}{\partial t_i}(x;t)\,dx$$

证明: 考虑 $\frac{I(t_0+he_i)-I(t_0)}{h}=\int_D \frac{f(x;t_0+he_i)-f(x;t_0)}{h}\,dx$.

由中值定理，存在 $0<\theta_h<1$，满足 $=\int_D \frac{\partial f}{\partial t_i}(x;t_0+\theta_h\cdot he_i)\,dx$.

因为 $\frac{\partial f}{\partial t_i}\in C(D\times T)$，所以 $\int_D \frac{\partial f}{\partial t_i}(x;t)\,dx$ 关于 t 连续.

于是当 $h\to 0$ 时，$\frac{I(t_0+he_i)-I(t_0)}{h}\longrightarrow\int_D\frac{\partial f}{\partial t_0}(x;t_0)\,dx$.

$\Box$

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

注：① f 对 x 的依赖可放宽为 Riemann 可积.

② T 可改为开集，理由与之前一样.

③ T 不紧时可将 $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ 改为一致连续，见前注③④.

~~推论：设 $T\subseteq\mathbb{R}^n$ 是闭区域，对于 $t\in T$，$D_t=[\alpha(t),\beta(t)]\subseteq\mathbb{R}$. $f_t\in R(D_t)$.~~

推论：设 $T\subseteq\mathbb{R}^n$ 是闭区域，$D=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$.
$\alpha,\beta\in C^1(T,D)$，$f\in C(D\times T)$，且 $\frac{\partial f}{\partial t_i}\in C(D\times T)$，
~~则~~、记 $I(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x;t)\,dx$，则有

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t_i}=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t_i}(x;t)\,dx+f(\beta(t);t)\frac{\partial\beta(t)}{\partial t_i}-f(\alpha(t);t)\frac{\partial\alpha}{\partial t_i}. \qquad (*)$$

证明：设 $J(\alpha,\beta,t)=\int_\alpha^\beta f(x;t)\,dx$，则由链式法则可知上式成立. □

$(*)$ 称为 Leibniz 公式.

定理3. 设 $T\subseteq\mathbb{R}^n$ Jordan 可测，$D\subseteq\mathbb{R}^m$ Jordan 可测，$f\in C(D\times T)$，$I(t)=\int_D f(x;t)\,dx$. 则

$$\int_T I(t)\,dt=\int_{D\times T}f(x,t)\,dx\,dt=\int_D\left(\int_T f(x;t)\,dt\right)dx.$$

证明：此即连续情形的 Fubini 定理. □

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

例:① 设 $J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta$.

则 $J_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\theta-x\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$.

$J_n''(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-\cos(n\theta-x\sin\theta)\sin^2\theta\right)d\theta$. 于是

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(-x^2\cos(n\theta-x\sin\theta)\sin^2\theta+x\sin(n\theta-x\sin\theta)\sin\theta$$

$$+(x^2-n^2)\cos(n\theta-x\sin\theta)\Big)d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big[-(n+x\cos\theta)\sin(n\theta-x\sin\theta)\Big]_0^{\pi}=0.$$

用类似方法还可证明 J_n 的很多递推等.

② $I(r)=\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)\,d\theta$.

求导得 $I'(r)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos\theta+2r}{1-2r\cos\theta+r^2}\,d\theta$ 当 $|r|<1$ 时,可算出 $I'(r)=0$.

于是 $I(r)=I(0)=0$. 另一方面,当 $|r|>1$ 时,设 $\rho=\frac{1}{r}$,则有

$$I(r)=\int_0^{\pi}\log\left(1-\frac{2\cos\theta}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\right)d\theta=\int_0^{\pi}\log(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)\,d\theta-\int_0^{\pi}\log\rho^2\,d\theta$$

$$=2\pi\log|r|.$$

Date:
Place:
Reminders

⑤ $f(t)=\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$, $g(t)=\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx$.

则 $f'(t)=2\int_0^t e^{-x^2}dx\cdot e^{-t^2}=2t\int_0^1 e^{-t^2(1+x^2)}dx$

$g'(t)=-2t\int_0^1 e^{-t^2(1+x^2)}dx$. 所以 $f(t)+g(t)=C$.

取 $t=0$ 得 $C=\frac{\pi}{4}$. 取 $t\to\infty$ 得 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

⑥ $I(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin^2\theta+x^2\cos^2\theta)\,d\theta$ $I(1)=0$.

$I'(x)=\frac{\pi}{1+x}$ $\Rightarrow$ $I(x)=I(1)+\int_1^x\frac{\pi}{1+x}dx$

$=\pi\cdot\log\frac{1+x}{2}$

若取 $x=0$ 则得 Euler 积分.

Date:
Place:
Reminders

所以有 $I(r)=\begin{cases}0 & |r|\le 1\\ 2\pi\log|r| & |r|>1\end{cases}$.

③ 设 u 是区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的调和函数, 即 $u\in C^2(D)$

s.t. $u_{xx}+u_{yy}=0$. 则对 $\forall(x_0,y_0)\in D$, 以及充分小的 $r>0$.

有 $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)\,d\theta$.

证明: 设 $I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)\,d\theta$, 则

$dI(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_x\cos\theta+u_y\sin\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(x_0,y_0)}-u_x\,dy+u_y\,dx$

$=\frac{1}{2\pi r}\int_{B_r(x_0,y_0)}(-u_{xx}-u_{yy})\,dx\wedge dy=0$. 所以 $I(r)=I(0)$. □

⑦ $I=\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$.

设 $I(\alpha)=\int_0^1\frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}dx$. 于是 $I(0)=0$.

$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}dx=-\frac{\log(1+\alpha)}{1+\alpha^2}+\frac{\log 2}{2}\frac{1}{1+\alpha^2}+\frac{\pi}{4}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$

由 N-L 公式.

$I(\alpha)=-\int_0^\alpha\frac{\log(1+\beta)}{1+\beta^2}d\beta+\frac{\log 2}{2}\arctan\alpha+\frac{\pi}{8}\log(1+\alpha^2)$.

取 $\alpha=1$ 得 $I=-I+\frac{\pi}{4}\log 2$. 于是 $I=\frac{\pi}{8}\log 2$.

Date:
Place:
Reminders

④ 对D中的任意紧集K，存在$N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall i>N$，有$K\subseteq K_i$. →

这与之前重积分部分讲的定义略有不同. →
之前的定义来自Zorich，不是一个好的定义

Date:
Place:
Reminders

§10.2 [redacted]广义积分

首先我们证明$\mathbb{R}^n$中区域的一个性质.

引理1：设$D\subseteq\mathbb{R}^n$是一个区域，则存在D中的一列[redacted]紧集$\{K_i\}$
满足：① K_i是闭区域~~...~~，Jordan可测.
② $K_i\subseteq K_{i+1}$. ③ $D=\bigcup\limits_{i} K_i$

证明：D中端点坐标全为有理数的开区间的全体是可数的.
记它们为$U_1, U_2, \cdots$ 则$\{U_i\}$构成D的开覆盖.
记$V_j=\bigcup\limits_{i=1}^{j} U_i$. 取$K_1=\overline{V_1}$，因为$K_1$紧，所以存在有限个
U_i覆盖K_1，于是存在一个最小的j_1，使$K_1\subseteq V_{j_1}$. 再取$K_2=\overline{V}_{j_1+1}$
则又有最小的j_2使$K_2\subseteq V_{j_2}$，如此继续，则不难看出这些
K_i满足引理的条件 □

~~定义 设$D\subseteq\mathbb{R}^n$是一个区域 若 D中的一列紧集$\{K_i\}$满足~~

① 定义：$D\subseteq\mathbb{R}^n$是一个区域. D中满足如上引理条件的紧集序列
$\{K_i\}$叫D的一个穷竭.

② D上的函数f叫是Riemann可积的，如果对D的任意紧Jordan
可测集K，$\int_K f(x)dx$存在.

③ 设f是Riemann可积，若对D的任意穷竭$\{K_i\}$，数列
$\{I_i=\int_{K_i} f(x)dx\}$都有极限$\lim\limits_{i\to\infty} I_i$，则称$f$在$D$上广义Riemann可积.

Date:
Place:
Reminders

注意. 此引理不能保证只要有一个穷竭使 $\lim\limits_{i\to\infty}\int_{K_i} f(x)dx \to$ 收敛即可. 一定要任意穷竭. 除非 $f(x)\geq 0$ 这在

Date:
Place:
Reminders

引理2. 若 f 在 D 上广义 R 可积, 则对任意两个穷竭 $\{K_i\}$, $\{L_i\}$, 有 $\lim\limits_{i\to\infty}\int_{K_i} f(x)dx=\lim\limits_{i\to\infty}\int_{L_i} f(x)dx$

于是广义 Riemann 积分 $\int_D f(x)dx$ 可定义为 $\lim\limits_{i\to\infty}\int_{K_i} f(x)dx$. 其中 $\{K_i\}$ 是 D 的任一穷竭.

证明: 设 $I=\lim\limits_{i\to\infty}\int_{K_i} f(x)dx$. $J=\lim\limits_{i\to\infty}\int_{L_i} f(x)dx$.

根据穷竭的定义, 因为 K_1 紧, 所以存在 L_{i_1} 使 $K_1\subseteq L_{i_1}$. 因为 L_{i_1} 紧, 又存在 K_{j_2} 使 $L_{i_1}\subseteq K_{j_2}$. 如此继续, 则得一个新的紧集序列 $K_1\subseteq L_{i_1}\subseteq K_{j_2}\subseteq L_{i_2}\subseteq K_{j_{i_2}}\subseteq\cdots$ 它显然是一个穷竭. 于是 $\{\int_{K_1} f(x)dx, \int_{L_{i_1}} f(x)dx, \int_{K_{j_2}} f(x)dx, \cdots\}$ 应有极限, 记为 A. 根据数列性质. $A=\lim\limits_{k\to\infty}\int_{L_{i_k}} f(x)dx=\lim\limits_{k\to\infty}\int_{K_{i_k}} f(x)dx$.

于是 $A=I=J$. $\square$

引理3. 设 f 在 D 上非负. 则 $f\in R(D)\Leftrightarrow$ 存在 D 的穷竭 $\{K_i\}$, 使 $\{I_i=\int_{K_i} f(x)dx\}$ 有界.

证明: 因为 $I_{i+1}=\int_{K_i} f(x)dx+\int_{K_{i+1}\setminus K_i} f(x)dx\geq I_i$. 所以 $\{I_i\}$ 单调有界. 于是 $\lim I_i$ 存在. 对于任一 D 的穷竭 $\{L_i\}$. 设 $J_i=\int_{L_i} f(x)dx$. 设 $L_i\subseteq K_j$. 则 $J_i\leq I_j\leq M$. 所以 $\{J_i\}$ 也有界. 于是 $f\in R(D)$. $\square$

在一维时为什么有条件收敛的广义积分？

因为一维时的极限 $\lim_{A\to\infty}\int_a^A$ 类似 $\sum_{i=1}^{\infty}$，是按顺序求和的。而利用穷竭定义的广义积分，因为穷竭的任意性，相当于可以重排级数中的项。我们知道，若级数条件收敛，则重排后可以得到任意的极限。因此，若一个级数无论怎么重排后都不变，则必然绝对收敛。

另一种解释是，可将 $\int f(x)dx$ 表达为 $\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{\infty}$。在一维时 $\mathbb{R}$ 上有序，所以按从小到大的顺序加就行了。但在高维 $\mathbb{R}^n$ 上没有天然的序，按什么顺序应该都是可以的，这就导致了重排不变性。

Date:
Place:
Reminders

利用穷竭定义的广义积分在一维时比利用 $\lim_{A\to\infty}\int_a^A$ 等方法定义的广义积分要求的条件强。下一定理表明，利用穷竭定义的广义积分自动是绝对可积的。

定理：设 f 在区域 D 上局部 Riemann 可积，则 $f\in R(D) \iff |f|\in R(D)$。

证明：记 $f_\pm = \frac{1}{2}(|f|\pm f)$，则 $|f| = f_+ + f_-$，$f = f_+ - f_-$。

因为 $f_\pm \le |f|$，所以由 $|f|$ 可积不难推出 $f_\pm$ 可积，再利用积分的线性性可知 f 可积。此定理关键的部分是证明 f 可积 $\Rightarrow$ $|f|$ 可积。

假设 $|f|$ 不可积，取定任意穷竭 $\{K_i\}$，有 $\int_{K_i}|f(x)|dx \to \infty\ (i\to\infty)$。

现在取 $L_1 = K_1$，则有最小的 i_1，使 $\int_{K_{i_1}}|f(x)|dx > 3\int_{L_1}|f(x)|dx + 2$。

记 $L_2 = K_{i_1}$，再取最小的 i_2，使 $\int_{K_{i_2}}|f(x)|dx > 3\int_{L_2}|f(x)|dx + 4$，…

对于取好的 L_k，取最小的 i_k，使 $\int_{K_{i_k}}|f(x)|dx > 3\int_{L_k}|f(x)|dx + 2k$。

然后令 $L_{k+1} = K_{i_k}$。记 $A_k = \overline{L_{k+1}\setminus L_k}$，则

$$\int_{A_k}|f(x)|dx = \int_{L_{k+1}}|f(x)|dx - \int_{L_k}|f(x)|dx \ge 2\int_{L_k}|f(x)|dx + 2k.$$

注意 $|f| = f_+ + f_-$，于是 $\int_{A_k}|f(x)|dx = \int_{A_k}f_+(x)dx + \int_{A_k}f_-(x)dx$。

不妨设 $\int_{A_k}f_+(x)dx \ge \int_{A_k}f_-(x)dx$，则有 $\int_{A_k}f_+(x)dx \ge \int_{L_k}|f(x)| + k$。

设 $B_k = \{x\in A_k \mid f_+(x) = f(x)\}$，因为 f_+ 在 A 上 R 可积，所以 B_k 的边界是零测集，于是 Jordan 可测。

注意 $\int_{A_k} f_+ dx = \int_{B_k} f_+(x)dx = \int_{B_k} f(x)dx$，于是 $\int_{B_k} f(x)dx \ge \int_{L_k}|f(x)| + k$。

Date:
Place:
Reminders

广义积分判敛法:

f 广义 R 可积 $\Longleftrightarrow$ $|f|$ 广义 R 可积

$\Longleftrightarrow$ 存在 D 的穷竭 $\{K_i\}$ 使 $I_i=\int_{K_i}|f(x)|dx$ 收敛.

注意: 若只存在 $\{K_i\}$, 使 $I_i=\int_{K_i}f(x)dx$ 收敛. 即对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$. s.t. $\forall \underset{j\in\mathbb{N}}{i}>N$. $|I_{i+j}-I_i|=\left|\int_{K_{i+j}\setminus K_i}f(x)dx\right|<\varepsilon$. 不能推出 $\tilde{I}_i=\int_{K_i}|f(x)|dx$ 收敛. 因为 $\tilde{I}_{i+j}-\tilde{I}_i=\int_{K_{i+j}\setminus K_i}|f(x)|dx\geq|I_{i+j}-I_i|$.

不等号是反的. 这也是为什么仅从一个穷竭上 $\int_{K_i}f(x)dx$ 的收敛性不能推出 f 广义 R 可积的原因.

恒正. 所以只要取一个穷竭就可以了.

例② 中的累次积分都存在. 可由 Fresnel 积分算出.

Date:
Place:
Reminders

因此有 $\int_{B_k\cup L_k}f(x)dx\geq k$. 取 $E_k=B_k\cup L_k$. 则 $\{E_k\}$ 构成 D 的穷竭. 且 $\int_{E_k}f(x)dx\to+\infty$. 这与 f 可积矛盾. (若前面 $\int_{A_k}f_+(x)dx\leq\int_{A_k}f_-(x)dx$. 则类似的构造可导致 $\int_{E_k}f(x)dx\to-\infty$). □

例: ① $I=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy$ 收敛.

证明: 因为 $e^{-x^2-y^2}$ 恒正. 所以只要找到一个穷竭 $\{K_i\}$.

取 $K_i=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq i\}$. 则 $I_i=\int_{K_i}e^{-x^2-y^2}=\pi(1-e^{-i^2})$.

于是 $I_i\to\pi$, $i\to\infty$. 所以原广义积分收敛. □

② $I=\int_{\mathbb{R}^2}\sin(x^2+y^2)dxdy$ 不收敛.

证明: 只要找到两个穷竭 $\{K_i\}$. $\{L_i\}$ 使 $I_i=\int_{K_i}f(x)dx$, $J_i=\int_{L_i}f(x)dx$ 收敛到不同的值即可. 取 $K_i=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 2i\pi\}$

$L_i=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq(2i+\frac{1}{2})\pi\}$ 则有 $\int_{K_i}\sin(x^2+y^2)dx=\pi(1-\cos(2i\pi))=0$

$\int_{L_i}\sin(x^2+y^2)dx=\pi(1-\cos(2i\pi+\frac{\pi}{2}))=\pi$. □

③ 在 $\mathbb{R}^n$ 上. 考虑 $I_\alpha=\int_{\|x\|\leq1}\frac{dx}{\|x\|^\alpha}$ 和 $J_\alpha=\int_{\|x\|>1}\frac{dx}{\|x\|^\alpha}$ 的收敛性.

换成极坐标. 则 $I_\alpha=S_n\cdot\int_0^1r^{n-\alpha-1}dx$ $J_\alpha=S_n\cdot\int_1^\infty r^{n-\alpha-1}dx$.

所以当 $\alpha<n$ 时 I_α 收敛. 当 $\alpha>n$ 时 J_α 收敛.

④ $I=\int_{x^2+y^2\leq1}\log\frac{1}{x^2+y^2}dxdy$. 被积函数恒正.

取 $K_i=x^2+y^2\geq\frac{1}{i^2}$. 则 $I_i=\int_{\frac{1}{i^2}\leq x^2+y^2\leq1}\log\frac{1}{x^2+y^2}dxdy$

若 $f\geq 0$ (或仅考虑 $|f|$), 则只要任取一个穷竭 $\{K_n\}$ →

即可. 此时可定义 $I_n(t)=\int_{K_n} f(x,t)\,dx$. 则 $I(t)=\lim_{n\to\infty} I_n(t)$.

即是一个二重极限问题. 各种情形与 $m=1$ 是类似的, 因此就不重复了.

Date:
Place:
Reminders

$$=2\pi\int_{\frac{1}{i}}^{1}\log\frac{1}{r^2}\,r\,dr=\pi\int_{\frac{1}{i^2}}^{1}\log\frac{1}{u}\,du=\pi\Big[u\big(1+\log\frac{1}{u}\big)\Big]_{1/i^2}^{1}$$

$$=\pi\Big(1-\frac{1}{i^2}\big(1+\log\frac{1}{i^2}\big)\Big)\to\pi,$$ 当 $i\to\infty$ 时. 所以 $I=\pi$.

$\Box$.

§10.3 含参仪积分.

设 $T\subseteq\mathbb{R}^n$, $D\subseteq\mathbb{R}^m$ 是区域, $f: D\times T\to\mathbb{R}$. 并记 $f_t(x)=f(x,t)$.

若对 $\forall t\in T$, $f_t(x)$ 在 D 上广义 Riemann 可积, 则可定义

$$I(t)=\int_D f(x,t)\,dx.$$

现在的问题是, 当 f 满足何种条件时, I 连续、可微、可积?

当 D 是高维空间中的区域时, 这类问题没有很好的答案, 因为广义重积分没有好用的 Cauchy 准则 (除非利用绝对可积性转化为对 $|f|$ 的讨论). 所以我们以下仅考虑 $m=1$ 的情况, 或者可利用坐标变换转化为 $m=1$ 的情形. 此时 D 只能有四种可能 ① $D=(a,b)$. ② $D=(a,+\infty)$ ③ $D=(-\infty,b)$, ④ $D=\mathbb{R}$. 通过切割区间, 我们可统一地设 $D=[a,\omega)$, 其中 $\omega=b$ 或 $+\infty$. 于是 $\int_D f(x,t)\,dx=\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x,t)\,dx$. 这个极限是有 Cauchy 准则的. 所以我们可进一步讨论一致收敛性等问题.

~~回~~ 回忆一下，当 $\omega=+\infty$ 时，它的开集定义为 $(A,+\infty)$.

补：设 $T\subseteq\mathbb{R}^n$，$D\subseteq\mathbb{R}^m$，$f: D\times T\to\mathbb{R}$，$x_0$ 是 D 的聚点，使得对 $\forall t\in T$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,t) =: g(t)$ 存在。若对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ s.t. $\forall x\in B_\delta(x_0)$，以及 $\forall t\in T$ 有 $|f(x,t)-g(t)|<\varepsilon$，则称 $f(x,t)$ 当 $x\to x_0$ 时在 T 上一致地收敛到 $g(t)$.

引理：若 f 在 $D\times T$ 上一致连续，则当 $x\to x_0$ 时 $f(x,t)$ 在 T 上一致地收敛到 $f(x_0,t)$.（证明显然）.

~~(教科书证明)~~

证明：$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.t. $\|(x,t)-(y,s)\|<\delta$ 时有 $|f(x,t)-f(y,s)|<\varepsilon$.
当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|(x,t)-(x_0,t)\|=\|x-x_0\|<\delta$. 于是
$|f(x,t)-f(x_0,t)|<\varepsilon$. □

（以后书中用证，后面直接写上面之行即可）

Date:
Place:
Reminders

设 $I(t,b)=\int_a^b f(x,t)\,dx$. 则 $I(t)=\lim\limits_{b\to\omega} I(t,b)$.
所以关于 $I(t)$ 的各种极限问题就是关于 $I(t,b)$ 的各种二重极限是否可交换的问题.

定义：含参变积分 $I(t)=\lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x,t)\,dx = \lim\limits_{b\to\omega} I(t,b)$ 叫做一致收敛的，如果对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ ω 在 $[a,\omega)$ 中的开集 U s.t. $\forall b\in U$，以及对 $\forall t\in T$，有 $|I(t)-I(t,b)|<\varepsilon$，即 $\left|\int_b^\omega f(x,t)\,dx\right|<\varepsilon$.

类似函数项级数的一致收敛性，我们可定义
$\beta(b)=\sup\limits_{t\in T}\left|\int_b^\omega f(x,t)\,dx\right|$. 则 $I(t)$ 一致收敛
$\Leftrightarrow \lim\limits_{b\to\omega}\beta(b)=0$. 当我们能求出 $\beta(b)$ 时，就可以利用这个方法证明一致收敛性.

定理(Cauchy)：$I(t)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 ω 在 $[a,\omega)$ 中的开邻域 U，使得对 $\forall b_1,b_2\in U$，$b_1<b_2$，$\forall t\in T$，有 $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,t)\,dx\right|<\varepsilon$.

定理(Weierstrass) 设 $f,g: D\times T\to\mathbb{R}$ 都满足定义中含参积分的条件. 记 $I(t)=\int_D f(x,t)\,dx$，$J(t)=\int_D g(x,t)\,dx$.
若 $|f|\le g$，且 $J(t)$ 一致收敛，则 $I(t)$ 也一致收敛.

Date:
Place:

Reminders

$D=[a,\omega)$

定理I'：设 $f: D\times T\to\mathbb{R}$. $t_0\in T'$ (t_0是T的极限点.)

若 a) 对$\forall b\in D$. $\lim\limits_{t\to t_0} f(x,t)=g(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛.

b) $I(t)=\int_a^\omega f(x,t)dx$ 对$t\in T$一致收敛.

则有：$\lim\limits_{t\to t_0} I(t)=\int_a^\omega g(x)dx$.

证明：对$\forall\varepsilon>0$ $\exists A_0\in[a,\omega)$ s.t. $\forall b_1,b_2>A_0$, $\forall t\in T$ 有

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,t)dx\right|<\varepsilon$. 令 $t\to t_0$. 则有 $\left|\int_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right|\le\varepsilon$

(含参积分定理I的结论) 所以 $\int_a^\omega g(x)dx$ 存在.

现在对$\forall\varepsilon>0$. 取$A_1\in[a,\omega)$, 使$\forall b>A_1$. $\left|\int_b^\omega g(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

取$A_2\in[a,\omega)$, 使$\forall b>A_2$. $\forall t\in T$ $\left|\int_b^\omega f(x,t)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 取一个$b>\max(A_1,A_2)$ ($b<\omega$)

由条件a). 存在t_0的去心邻域U. 使得对$\forall t\in U$. $\forall x\in[a,b]$

有 $|f(x,t)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 于是, 当 $t\in U$时, 有

$$\left|\int_a^\omega f(x,t)dx-\int_a^\omega g(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x,t)-g(x)|dx$$

$$+\left|\int_b^\omega f(x,t)dx\right|+\left|\int_b^\omega g(x)dx\right|<(b-a)\frac{\varepsilon}{3(b-a)}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{t\to t_0} I(t)=\int_a^\omega g(x)dx$. □

Date:
Place:

Reminders

推论：若 $|f(x,t)|\le F(x)$. $\int_a^\omega F(x)dx$ 收敛. 则 $I(t)$一致收敛.

定理(Abel-Dirichlet) 设 $f,g: D\times T\to\mathbb{R}$. 若它们满足以下两组条件之一：

(I)(Abel) $\int_a^\omega f(x,t)dx$ 在T上一致收敛.

对 $t\in T$. $g(x,t)$ 关于x单调.

$g(x,t)$ 一致有界.

(II)(Dirichlet) $\int_a^b f(x,t)dx$ 对 $b\in[a,\omega)$. $t\in T$ 一致有界.

对$t\in T$. $g(x,t)$ 关于x单调.

$g(x,t)\rightrightarrows 0$. $x\to\omega$ (关于$t\in T$一致)

则 $I(t)=\int_a^\omega f(x,t)g(x,t)dx$ 一致收敛.

证明：利用第二积分中值定理. □

~~定理 设 $f: D\times T\to\mathbb{R}$ ($D=[a,\omega)$) t_0是T的极限点. 若 ① 对$\forall b\in D$ $\lim\limits_{t\to t_0} f(x,t)=g(x)$ 在$[a,b]$上一致地成立, 且② $I(t)=\int_a^\omega f(x,t)dx$ 在T上一致收敛. 则有 $\lim\limits_{t\to t_0} I(t)=\int_a^\omega g(x)dx$.~~

这个定理还是需要的

~~(直接证明的推论')~~ — 可以定理I'.

对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists A_0\in[a,\omega)$ s.t. $\forall\ b_1,b_2>A_0$ $\forall t\in T$

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$. 取 $t\to t_0$. 因为推广的积分关于 t 连续. 于是有

$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,t_0)\,dx\right| \le \varepsilon$. 所以 $\int_a^\omega f(x,t_0)$ 收敛存在.

这步不必要了.

~~对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists A_1\in[a,\omega)$: s.t. $\forall\ b>A_1$. $\int_b^\omega f(x,t_0)<\frac{\varepsilon}{3}$.~~

~~$\exists A_2\in[a,\omega)$, s.t. $\forall b>A_2$. $\forall t\in T$. $\left|\int_b^\omega f(x,t)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 设 $b=\max(A_1,A_2)+1$.~~

~~由[illegible]一致收敛性. 存在 [illegible] $\delta>0$.~~

~~s.t. $\forall\ t\in B_\delta(t_0)$ $\forall x\in[a,b]$. $|f(x,t)-f(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.~~

~~则当 $t\in B_\delta(t_0)$ 时,有 $\left|\int_a^\omega f(x,t)dx-\int_a^\omega f(x,t_0)dx\right|$~~

~~$\le \int_a^b |f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx + \left|\int_b^\omega f(x,t)\,dx\right| + \left|\int_b^\omega f(x,t_0)\,dx\right|$~~

~~$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. □~~

~~不用前面的定理直接证这个更好. 因为可以看出对含参积分定理2的证④的引用. (见上).~~

~~证明: 对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists A_0 \in[a,\omega)$ s.t. $\forall\ b_1,b_2>A_0$. $\forall t\in T$ 有~~

~~$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,t)\,dx\right|<\varepsilon$. 左边的积分对 t 是连续 (因为[illegible])~~

~~当 $t\to t_0$ 时. 左边的积分 $\to\int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx$ (含参积分定理1证④).~~

~~所以 $\left|\int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx\right|\le\varepsilon$. 即 $\int_a^\omega g(x)\,dx$ 存在.~~

~~现在. 对于 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $A_1\in[a,\omega)$ 使 $\left|\int_b^\omega g(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. (+1)~~

~~存在 $A_2\in[a,\omega)$ 使得对 $\forall t\in T$ $\left|\int_b^\omega f(x,t)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 设 $b=\max(A_1,A_2)$~~

~~由条件①. 存在 t_0 的邻域 U, 使得对 $\forall t\in U$. 有 ($\forall x\in[a,b]$)~~

~~$|f(x,t)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 则当 $t\in U$ 时 有~~

~~$\left|\int_a^\omega f(x,t)dx-\int_a^\omega g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x,t)-g(x)|\,dx + \left|\int_b^\omega f(x,t)dx\right| + \left|\int_b^\omega g(x)dx\right|$~~

~~$\le \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. 所以 $\lim_{t\to t_0} I(t)=\int_a^\omega g(x)\,dx$. □~~

~~定理: 若 T 紧. $f\in C([a,\omega)\times T)$. 若 $I(t)=\int_a^\omega f(x,t)dx$ 一致收敛 则 $I\in C(T)$.~~

~~证明: 对 $\forall b\in[a,\omega)$. $f\in C([a,b]\times T)$. 于是一致连续. 所以当 $t\to t_0\in T$ 时, $\lim_{t\to t_0} f(x,t)=f(x,t_0)$ 对 $x\in[a,b]$ 一致地成立. 于是由定理知 $\lim_{t\to t_0} I(t)=I(t_0)$ □.~~

~~证明见左页.~~ 见背面.

Place:

Reminders

$P=(a,\omega)$.

定理1：若T紧，$f\in C(P\times T)$. $I(t)=\int_a^\omega f(x,t)\,dx$ 一致收敛，则 $I\in C(T)$

证明：对于 $t_0\in T$. 要证 $I(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0} I(t)$. 即对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. 对 $\forall t\in B_\delta(t_0)$，有 $\left|\int_a^\omega (f(x,t)-f(x,t_0))\,dx\right|<\varepsilon$.

- 因为 $I(t_0)=\lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x,t_0)\,dx$. 所以存在 $A_1\in[a,\omega)$ 使得对 $\forall b>A_1$，有 $\left|I(t_0)-\int_a^b f(x,t_0)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$，即 $\left|\int_b^\omega f(x,t_0)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.
- 因为 $I(t)=\lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x,t)\,dx$ (一致地) 所以存在 $A_2\in[a,\omega)$ 使得对 $\forall b>A_2$ (以及 $\forall t\in T$) 有 $\left|\int_b^\omega f(x,t)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

取 $b\in(\max(A_1,A_2),\omega)$. 则 $[a,b]\times T$ 紧，f 在其上一致连续. 于是存在 $\delta>0$ 使得对 $\forall (x,t),(y,s)\in[a,b]\times T$，满足 $d((x,t),(y,s))<\delta$，有 $|f(x,t)-f(y,s)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. 于是

$$\left|\int_a^\omega (f(x,t)-f(x,t_0))\,dx\right| < \left|\int_a^b (f(x,t)-f(x,t_0))\,dx\right|$$

$$+\left|\int_b^\omega f(x,t)\,dx\right|+\left|\int_b^\omega f(x,t_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

□

ADDRESS · 通讯录

Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		
Name	Tel	Fax	Mobile
	Address		
	E-mail		