Date:
Place:

Reminders

定理2应为~~[illegible]~~可导性.

Date:
Place:

Reminders

(续含参广义积分).

与~~[illegible]~~函数项级数类似, 含参广义积分也有Dini定理.

定理(Dini) 设T紧, $f\in C(D\times T)$ 且 $f\geq 0$. 若

$I(t)=\int_a^\omega f(x,t)\,dx$ 在T上连续, 则 $I(t)$ 对 $t\in T$ 一致收敛.

证明: 在 $D=[a,\omega)$ 中取一个严格递增序列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=a$, $a_n\to\omega$, $n\to\infty$ ~~趋向于ω~~

(例如, 当 $\omega=+\infty$ 时可取 $a_n=a+n$. 当 $\omega=b$ 时可取 $a_n=b-\frac{b-a}{n+1}$) 则 $I(t)=\int_a^\omega f(x,t)\,dx=\sum_{n=1}^\infty\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x,t)\,dx$.

设 $u_n(t)=\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x,t)\,dx$. 则 $u_n\geq 0$. $u_n\in C(T)$. 由级数版的Dini定理知 $\sum_{n=1}^\infty u_n(t)$ 一致收敛到 $I(t)$. 于是对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\sum_{n=N+1}^\infty u_n(t)<\varepsilon$. 现在取 $U=(a_N,\omega)$ 则对 $\forall b\in U$.

$\int_b^\omega f(x,t)\,dx\leq\int_{a_N}^{+\infty}f(x,t)\,dx=\sum_{n=N+1}^\infty u_n(t)<\varepsilon$. 所以 $I(t)$ 一致收敛. □

定理3. 设T是Jordan可测闭集. $f\in C(D\times T)$.
$I(t)=\int_a^\omega f(x,t)\,dx$ 一致收敛. 则I在T上R可积且有

$$\int_T I(t)\,dt=\int_a^\omega\left(\int_T f(x,t)\,dt\right)dx$$

证明: 定理2已保证 $I\in C(T)$. 所以显然R可积. 任取一个 $b\in[a,\omega)$. 则由含参积分定理可知

Date:
Place:
Reminders

$$\int_T\left(\int_a^b f(x,t)\,dx\right)dt=\int_a^b\left(\int_T f(x,t)\,dt\right)dx.$$

设 $I(t,b)=\int_a^b f(x,t)\,dx$. 由一致收敛性. 对 $\forall\varepsilon>0$

~~有~~ $\exists A\in[a,\omega)$, s.t. $\forall b>A$, $\forall t\in T$ 有 $|I(t,b)-I(t)|<\frac{\varepsilon}{\mu(T)}$.

于是 $-\frac{\varepsilon}{\mu(T)}\int_T dt<\int_T I(t,b)\,dt-\int_T I(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{\mu(T)}\int_T dt$.

所以 $\left|\int_T I(t,b)\,dt-\int_T I(t)\,dt\right|<\varepsilon$ 即

$\lim\limits_{b\to\omega}\int_T I(t,b)\,dt=\int_T I(t)\,dt$. 于是有 $\int_T I(t)\,dt=\int_a^\omega\left(\int_T f(x,t)\,dt\right)dx$ □.

$T\subseteq\mathbb{R}^n$　　　$D=[a,\omega)$

定理2 设T是闭区域. $f\in C(D\times T)$. $\frac{\partial f}{\partial t_i}\in C(D\times T)$ $i=1,\dots,n$.
若 $\int_a^\omega\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\,dx$ 对于 $t\in T$ 一致收敛, 则 $I(t)=\int_a^\omega f(x,t)\,dx$
在 T 上可微, 且有 $\frac{\partial I(t)}{\partial t_i}=\int_a^\omega\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\,dx$.

证明: 取 $\{a_n\}$ 严格递增的 使 $a_0=a$, $a_n\to\omega$ $(n\to\infty)$.
再设 $I_n(t)=\int_a^{a_n}f(x,t)\,dx$. 由含参积分部分的定理2知
$\frac{\partial I_n}{\partial t_i}(t)=\int_a^{a_n}\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\,dx$. 当 $n\to\infty$ 时. 右边一致收敛到 $\int_a^\omega\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\,dx$. 于是
$\left\{\frac{\partial I_n}{\partial t_i}\right\}$ 一致收敛 $\{I_n\}$ 收敛. 所以 $I(t)$ 可微且有

$$\frac{\partial I}{\partial t_i}(t)=\int_a^\omega\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)\,dx.$$

□

Date:
Place:
Reminders

下面考虑定理3的一种推广：若T也为无界区间，或I(t)在T上广义R可积，则同样的估计在适当的条件下也成立.

设 $D_1=[a,\omega)$, $D_2=[b,\eta)$ 其中 ω, η 为使 D_1, D_2 非空的有限实数或 $+\infty$.

定理4. 设 $f\in C(D_1\times D_2)$. 若

a) $I(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$, $J(x)=\int_b^\eta f(x,y)dy$ ~~分别在 D_2, D_1 上一致收敛~~ 在 $[b,b']\subseteq D_2$ 和 $[a,a']\subseteq D_1$ 上一致收敛.

b) $\int_a^\omega\left(\int_b^\eta |f(x,y)|dy\right)dx$ 和 $\int_b^\eta\left(\int_a^\omega |f(x,y)|dx\right)dy$ 至少有一个存在.

则~~重~~两个广义积分 $\int_b^\eta I(y)dy$, $\int_a^\omega J(x)dx$ ~~[illegible]~~ 存在且相等.

证明：不妨设 $\int_a^\omega\left(\int_b^\eta |f(x,y)|dy\right)dx$ 存在. 于是

$$\int_a^\omega |J(x)|dx=\int_a^\omega\left|\int_b^\eta f(x,y)dy\right|dx\le\int_a^\omega\left(\int_b^\eta |f(x,y)|dy\right)dx.$$

所以 $J(x)$ 在 D_1 上绝对可积. 从而 $\int_a^\omega J(x)dx$ 存在.

~~先考虑 $\iint_{D_1\times D_2} f(x,y)dxdy$, 这是一个二重广义积分. 它存在当且仅当 $|f|$ 在 $D_1\times D_2$ 上可积. 于是只要找到一个穷竭 $\{K_n\}$, 使 $\left\{\iint_{K_n}|f(x,y)|dxdy\right\}$ 收敛即可. 对于 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$, 先找 A_n 使~~

~~$$\left|\int_a^{A_n}\int_b^\eta |f(x,y)|dydx-\int_a^\omega\int_b^\eta |f(x,y)|dydx\right|<\frac{\varepsilon_n}{2}.$$~~

~~然后由~~

要证的结论即 $\lim\limits_{\beta\to\eta}\int_b^\beta I(y)dy=\int_a^\omega J(x)dx$.

由定理3. $\int_b^\beta I(y)dy=\int_b^\beta\left(\int_a^\omega f(x,y)dx\right)dy=\int_a^\omega\left(\int_b^\beta f(x,y)dy\right)dx$.

设 $J(x,\beta)=\int_b^\beta f(x,y)dy$. 即证 $\lim\limits_{\beta\to\eta}\int_a^\omega J(x,\beta)dx=\int_a^\omega J(x)dx$.

这是定理2'的结论. 下面只需检查定理2'的条件: 函数J定义在 $D_1\times D_2$ 上. $\eta\in D_2'$. 条件a) 对 $\forall a'\in D_1$, $\lim\limits_{\beta\to\eta}J(x,\beta)=J(x)$ 在 $[a,a')$ 上一致收敛. 这正是本定理的条件a. 条件b) $K(\beta)=\int_a^\omega J(x,\beta)dx$ 对 $\beta\in D_2$ 一致收敛. 注意

$$|J(x,\beta)|\le\int_b^\beta|f(x,y)|dy\le\int_b^\eta|f(x,y)|dy \text{ 与 }\beta\text{ 无关}.$$

而 $\int_a^\omega\left(\int_b^\eta|f(x,y)|dy\right)dx$ 收敛. 所以由 Weierstrass 判别法 $\int_a^\omega J(x,\beta)dx$ 对 $\beta\in D_2$ 一致收敛. 所以定理2'的条件成立. 所以原定理成立. □

Dini 推论: 设 $f\in C(D_1\times D_2)$ $f\ge0$. 若

a) $I(y)$, $J(x)$ 连续. b) $\int_a^\omega J(x)dx$ 与 $\int_b^\eta I(y)dy$ 至少有一个存在.

则b)中另一个积分也存在. 且有 $\int_a^\omega J(x)dx=\int_b^\eta I(y)dy$. □

证明: 即定理4 + Dini定理.

例: ① $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$. 做变量代换 $x=ut$.

得 $I=\int_0^\infty ue^{-u^2t^2}dt$. 记之为 $\varphi(u)$.

例② $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. 考虑 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$.

根据引理③, $I(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 所以在 $\alpha\ge 0$ 处连续.

于是 $I=I(0)=\lim_{\alpha\to0}I(\alpha)$. 注意 $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx$ 在 $[\delta,+\infty)$ $\delta>0$

上一致收敛 (可见引理②) 所以在 $[\delta,+\infty)$ 上有 $I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\,dx$

$=-\frac{1}{1+\alpha^2}$. 于是对 $\forall\alpha,\beta\in(0,+\infty)$, 取 $\delta<\min(\alpha,\beta)$, 有

$$I(\alpha)=I(\beta)-\int_\beta^\alpha\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}=I(\beta)+\arctan(\beta)-\arctan(\alpha).$$

令 $\alpha\to0$ 得 $I=I(\beta)+\arctan\beta$. 再令 $\beta\to+\infty$, 注意

$|I(\beta)|\le\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}\frac{|\sin x|}{x}dx\le\int_0^{+\infty}e^{-\beta x}dx=\frac{1}{\beta}\to0$. 所以

$I=\frac{\pi}{2}$. □

解法2: $\frac{1}{x}=\int_0^{\infty}e^{-yx}dy$.

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\sin x\,dx\int_0^{+\infty}e^{-yx}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\sin x\,e^{-yx}dx\right)dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{\pi}{2}.$$

$f(y)=\int_0^{+\infty}\sin x\,e^{-yx}dx=\frac{1}{1+y^2}$ 在 $y\ge y_0>0$ 上一致收敛 (Weierstrass)

$g(x)=\int_0^{+\infty}\sin x\,e^{-yx}dy=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x\ge0$ 上一致收敛.

考虑 $I^2=I\cdot\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\int_0^{+\infty}I\,e^{-u^2}du$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\,e^{-x^2u^2}dx\right)e^{-u^2}du$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\,e^{-u^2(1+x^2)}dx\right)du.$$

若两个积分能换序, 则有

$$I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\,e^{-u^2(1+x^2)}du\right)dx$$

$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$, 于是 $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

下面证明换序的合理性. 设 $f(x,u)=u\,e^{-u^2(1+x^2)}$. 显然 f

连续, $f\ge0$. $I(u)=\int_0^{+\infty}f(x,u)\,dx=\begin{cases}I\,e^{-u^2} & u>0\\ 0 & u=0\end{cases}$

它并不连续. 但对 $\forall\delta>0$, $I(u)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上连续.

$J(x)=\int_0^{+\infty}f(x,u)du=\frac{1}{2(1+x^2)}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 因此由

推论知 $\int_\delta^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,u)dx\right)du=\int_0^{+\infty}\left(\int_\delta^{+\infty}f(x,u)du\right)dx$

$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(1+x^2)\delta^2}}{2(1+x^2)}dx$. 右边关于 δ 是连续的. 所以有

$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x,u)\,dx\,du$

$=\lim_{\delta\to0}\int_\delta^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x,u)\,dx\,du$.

引理: ① $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,du$ $(\alpha>0)$

关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

② $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,dt$ $(\alpha>0)$

关于 $u\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

证明: ① $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,du=\left(\int_0^1+\int_1^{+\infty}\right)(\cdots)$

$\int_0^1$ 是通常的定积分,不影响一致收敛性. 所以只需考虑 $\int_1^{+\infty}$

$|e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t| \le t e^{-u^2 t}$ $\left(\begin{array}{l}|e^{-\alpha t}|\le 1\\ |\sin t|\le t\end{array}\right)$

$\le \frac{t}{1+u^2 t} \le \frac{1}{u^2}$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^2}$ 收敛. 所以由 Weierstrass $\int_1^{+\infty}(\cdots)$ 一致收敛

② $|e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t| \le e^{-\alpha t}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ 收敛.

所以由 Weierstrass, $\int_0^{\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,dt$ 一致收敛

□.

下面考虑右边. 设 $g(\delta,x)=\frac{e^{-(1+x^2)\delta^2}}{2(1+x^2)}$. 它在 $[0,+\infty)^2$

上连续. 且 $0<g(\delta,x)\le\frac{1}{1+x^2}$ (与 δ 无关). $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}<+\infty$.

所以 $\int_0^{\infty} g(\delta,x)dx$ 关于 δ 一致收敛 (Weierstrass). 于是

它关于 δ 连续. 取 $\delta\to0$ 的极限得

$I^2=\lim_{\delta\to0}\int_\delta^{+\infty}\left(\int_0^{\infty} f(x,u)\,dx\right)du=\lim_{\delta\to0}\int_0^{+\infty} g(\delta,x)dx$

$=\int_0^{+\infty} g(0,x)dx=\frac{\pi}{4}$. 于是 $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □.

③

$I=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$. $J=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx$.

令 $x^2=t$. 则 $I=\frac12\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt t}dt$ 利用 $\frac{1}{\sqrt t}=\frac{2}{\sqrt\pi}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du$

$I=\frac{1}{\sqrt\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,du\right)dt$ 同理

$J=\frac{1}{\sqrt\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\cos t\,du\right)dt$ 若积分能够换序则有

$I=\frac{1}{\sqrt\pi}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}=\frac12\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. $J=\frac{1}{\sqrt\pi}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du=\frac12\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

上述换序的合理性不易证明. 我们先考虑 对 $\alpha>0$,

$I(\alpha)=\frac12\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt t}dt=\frac{1}{\sqrt\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,du\right)dt$.

由引理①② 知 两个一重含参积分分别一致收敛.

引理③ $I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

④ $J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明：③ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 收敛（广义积分的 Abel-Dirichlet）.

$e^{-\alpha t}$ 关于 t 单调递减且一致有界. ($e^{-\alpha t}\le 1$).

由 Abel 判别法 一致收敛.

④ $\frac{1}{1+(\alpha+u^2)^2}\le\frac{1}{1+u^4}$. $\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}<+\infty$

由 Weierstrass. $J(\alpha)$ 一致收敛 □.

对 I 的讨论更繁琐. 可参看徐森林 例 15.3.9

Date:
Place:
Reminders

而积分 $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha+u^2)}|\sin t|\,dt\right)du$

$\le\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha+u^2)}dt\right)du=\int_0^{+\infty}\frac{du}{\alpha+u^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$

所以由定理4 知 $I(\alpha)$ 中的积分可换序 于是

$$I(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,dt\right)du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}=:J(\alpha)$$

注意 $I(\alpha)$ $J(\alpha)$ 是一致收敛的. 引理③④ 所以关于 α 连续，所以

$I(0)=\lim_{\alpha\to0}I(\alpha)=\lim_{\alpha\to0}J(\alpha)=J(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}=\frac12\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

J 的交换合法性同理. □

NL公式，微分方程，d

总结：① 区间分割 ② 收敛因子 ③ 对参数求导，求极限

求积分 ④ $\frac1t=\int_0^{+\infty}e^{-ts}ds$. $\frac{1}{\sqrt{t}}=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-ts^2}ds$, …

⑤ Weierstrass Abel-Dirichlet.

⑥ 定理 1.2.3.4. Dini 推论

其它例子：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$. $\int_0^{+\infty}\frac{a\cos bx}{a^2+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-ab}$ $(a>0,b>0)$

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos cx\,dx=\frac12\log\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}$ $(a,b>0)$. …

Date:
Place:
Reminders

§10.4 Γ函数与B函数.

定义: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$ $\quad \alpha>0$

$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt.$ $\quad \alpha,\beta>0.$

命题: i) $\Gamma\in C^\infty((0,+\infty))$ ii) $B\in C^\infty((0,+\infty)\times(0,+\infty))$.

证明: i) $\Gamma(\alpha)=\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt.$

$t=0$是第一个积分的瑕点. $t=+\infty$是第二个积分的瑕点.

记 $\Gamma_k^{(1)}(\alpha)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(\log t)^k e^{-t}dt$; 对于 $\alpha\in[a,b]\subseteq(0,+\infty)$

$\Gamma_k^{(2)}(\alpha)=\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}(\log t)^k e^{-t}dt.$ | ~~$t^{\alpha-1}(\log t)^k e^{-t}$~~ 以及充分小的t

$|t^{\alpha-1}(\log t)^k e^{-t}|<t^{\frac{a}{2}-1}$ $\quad (0<t<c_k)$

于是 $\int_0^1=\int_0^{c_k}+\int_{c_k}^1$ 前者一致收敛, 后者是通常的定积分. 所以 $\Gamma_k^{(1)}(\alpha)$ 在$[a,b]$上一致收敛. 类似地, 当 $t>1$时

$|t^{\alpha-1}(\log t)^k e^{-t}|<t^{b-1}(\log t)^k e^{-t}.$

于是 $\Gamma_k^{(2)}(\alpha)$ 在$[a,b]$上一致收敛. 所以所有的 $\Gamma_k^{(i)}(\alpha)$ 都是$[a,b]$上的连续函数. 于是 $\Gamma_k(\alpha)=\Gamma_k^{(1)}(\alpha)+\Gamma_k^{(2)}(\alpha)$ 也连续.

ii) 的证明是类似的. 瑕点在$t=0$和1. 分别讨论即可. □

(Bohr-Mollerup)

定理: i) Γ函数满足如下性质:

若 $\alpha = n \in \mathbb{N}$. 则由①②可知 $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ →

所以Γ函数是阶乘的推广.

Date:
Place:
Reminders

① $\Gamma(\alpha) > 0$ $(\alpha > 0)$. $\Gamma(1) = 1$.

② $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. $(\alpha > 0)$.

③ $\log\Gamma(\alpha)$ 在 $(0, +\infty)$ 上凸.

ii) 满足①②③的函数是唯一的.

证明: i) ① 显然. ② 对 e^{-t} 分部积分.

③ 因为 Γ 光滑. 要证 $\log\Gamma(s)$ 凸, 只要证

$$(\log\Gamma)'' = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0. \text{ 即 } \Gamma''\Gamma - \Gamma'^2 \geq 0.$$

$$\Gamma''(\alpha)\Gamma(\alpha) - \Gamma'(\alpha)^2 = \int_0^\infty x^{\alpha-1}(\log x)^2 e^{-x}dx \cdot \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$

$$- \int_0^\infty x^{\alpha-1}(\log x)e^{-x}dx \cdot \int_0^\infty y^{\alpha-1}\log y\, e^{-y}dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}e^{-x-y}\left((\log x)^2 - \log x \cdot \log y\right)dxdy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}e^{-x-y}\left((\log y)^2 - \log y \cdot \log x\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}e^{-x-y}(\log x - \log y)^2 dxdy \geq 0.$$

ii) ~~由②. $\Gamma(\alpha)$ 由 $\Gamma(\{\alpha\}) = \Gamma(\alpha-[\alpha])$ 决定. 若 $\alpha\in\mathbb{N}$.~~

设 $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 满足①②③. 若 $\alpha \in \mathbb{N}$.

则显然有 $f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$. 若 $\alpha \notin \mathbb{N}$. 设 $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

则 $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)\cdots$

$= (\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-[\alpha])\cdot\Gamma(\{\alpha\})$. f 同理.

所以只要证明对 $\alpha\in(0,1)$ $f(\alpha)=\Gamma(\alpha)$ 即可.

由凸函数性质, 对于 $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, 以及 $\alpha\in(0,1)$.

$$\frac{\log\Gamma(n)-\log\Gamma(n-1)}{n-(n-1)} \le \frac{\log\Gamma(n+\alpha)-\log\Gamma(n)}{(n+\alpha)-n} \le \frac{\log\Gamma(n+1)-\log\Gamma(n)}{(n+1)-n}$$

即 $\log(n-1) \le \frac{1}{\alpha}\left[\log\Gamma(n+\alpha)-\log(n-1)!\right] \le \log n$

$\Leftrightarrow \log (n-1)^{\alpha}(n-1)! \le \log\Gamma(n+\alpha) \le \log n^{\alpha}(n-1)!$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n-1)^{\alpha}\cdot(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \le \Gamma(\alpha) \le \dfrac{n^{\alpha}(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$ 取 $n\to\infty$ 的极限 得

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} = \Gamma(\alpha)$. f 同理. 所以 $f=\Gamma$. □

Euler-Gauss

推论: 对于 $\forall\alpha>0$ $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}$.

证明: 记极限为 $g(\alpha)$. 则 $g(1)=1$. 且

$g(\alpha+1) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha+1}n!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)} = \alpha\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\alpha}\cdot n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}\cdot\dfrac{n}{n+\alpha+1}$

$=\alpha g(\alpha)$. 所以当 $\alpha\ge1$ 时也有 $\Gamma(\alpha)=g(\alpha)$. □

Date:
Place:

Reminders

广义重积分绝对收敛. 因此可用换元法与累次积分 $\longrightarrow$

Date:
Place: Legendre

Reminders

推论(加倍公式) 对 $\forall \alpha > 0$

$$\Gamma(2\alpha) = \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\tfrac{1}{2}).$$

证明: 等价于证明 $\Gamma(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, 记右边为 $f(\alpha)$. 只要证明 $f(\alpha)$ 满足①②③即可.

① $f(\alpha) > 0$ 是显然的. $f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(1) = 1$.

② $f(\alpha+1) = \frac{2^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2}+1) = \frac{2^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{2} \cdot \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) = \alpha \cdot f(\alpha)$.

③ $\log f = \log \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} + \log \Gamma(\frac{\alpha}{2}) + \log \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$ 三者皆凸. 所以 f 凸. □

定理: 对 $\forall \alpha, \beta > 0$.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta).$$

证明: $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty y^{\beta-1} e^{-y} dy$

$= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-x-y} dx dy$ 令 $z = x+y$, $x \in (0, z)$

$= \int_0^\infty \int_0^z x^{\alpha-1} (z-x)^{\beta-1} e^{-z} dx dz$ 令 $x = zt$

$= \int_0^\infty \left(\int_0^1 z^{\alpha-1} t^{\alpha-1} z^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} z dt \right) e^{-z} dz$

$= \int_0^\infty z^{\alpha+\beta-1} e^{-z} dz \cdot \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta)$. □

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

推论：① $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$.

② $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$

$B(\alpha,\beta+1)=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

$B(\alpha+1,\beta+1)=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}B(\alpha,\beta)$. $\cdots$

③ $B(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx$

④ $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$. （余元公式）.

证明：①②③显然，对于④，取 $t=\dfrac{1}{1+x}$，则

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\int_\infty^0 \frac{1}{(1+x)^{\alpha-1}}\cdot\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\beta-1}}\cdot\frac{-dx}{(1+x)^2}$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx.$$

④ $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\Gamma(1)B(\alpha,1-\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ □.

其它例子：① $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\cos^\beta x\,dx$

设 $t=\sin^2 x$，则 $dt=2\sin x\cos x\,dx$ 于是

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}x\cos^{\beta-1}x\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}$$

Date:
Place:
Reminders

② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^{-\alpha} x\,dx \quad (-1<\alpha<1)$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{-\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha-\alpha}{2}+1)} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha+1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$$

③ $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$

$\Gamma(y) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^y n!}{y(y+1)\cdots(y+n)}$. $\Gamma(1-y) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-y} n!}{(1-y)(2-y)\cdots(n+1-y)}$

$$\Gamma(y)\Gamma(1-y) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n!)^2}{y(1-y^2)(2^2-y^2)\cdots(n^2-y^2)(n+1-y)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y(1-y^2)(1-\frac{y^2}{2^2})\cdots(1-\frac{y^2}{n^2})}$$

$\Rightarrow \frac{\sin\pi y}{\pi} = y\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)$, 再取 $y=\frac{x}{\pi}$ 即可 ◇

④ 考虑 $I=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}dx$. 一方面 $I=(\sqrt{\pi})^n=\pi^{\frac{n}{2}}$.

另一方面用n维球坐标得

$$I=\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}dr\int_D d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}.$$

其中角度部分的积分正是 $n-1$ 维单位球面的面积, 记为 σ_{n-1}, 而 径向部分的积分为

由这两个例子可得 →

$\int_0^\infty \sin(x^\alpha)\,dx$ 和 $\int_0^\infty \cos(x^\alpha)\,dx$.

Date:
Place:
Reminders

$r^2=t$

$$\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}dr=\int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

于是 $\sigma_{n-1}=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$. 对单位球 $B_0(1)$ 做同样的积分可知n维单位球的体积 μ_n 为 $\int_0^1 r^{n-1}dr\int_0 d\theta_1\cdots d\theta_{n-1}=\dfrac{\sigma_{n-1}}{n}$

于是 $\mu_n=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. ◇

⑤ $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}dt$

对 $n\in\mathbb{N}$ $\dfrac{1}{e^t-1}=e^{-t}+e^{-2t}+\cdots+e^{-nt}+\dfrac{e^{-nt}}{e^t-1}$. 于是

$$I(\alpha)=\int_0^\infty\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}dt=\int_0^\infty t^{\alpha-1}\left(e^{-t}+e^{-2t}+\cdots+e^{-nt}\right)dt+\int_0^\infty\frac{t^{\alpha-1}e^{-nt}}{e^t-1}dt$$

$$=\Gamma(\alpha)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right)+R_n(\alpha)$$

当 $n\to\infty$ 时 显然 $R_n(\alpha)\to0$ (可用第二积分中值定理), 所以

$I(\alpha)=\Gamma(\alpha)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=\Gamma(\alpha)\cdot\zeta(\alpha)$. ◇

⑥ $I(\alpha)=\int_0^\infty\dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx\quad(0<\alpha<2)$

$J(\alpha)=\int_0^\infty\dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx\quad(0<\alpha<1)$

其中系数的通项公式可参见 arXiv:1003.2907. →

此方法即渐近分析中的鞍点法或称 Laplace 展开法. $x=x(y)$ 的公式可用 Lagrange 反演法得到.

Date:
Place:
Reminders

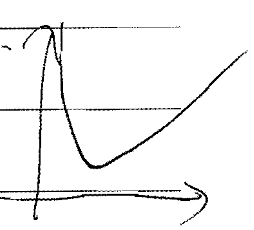
利用恒等式 $\frac{1}{x^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-xy}dy$

$$I(\alpha)=\int_0^\infty \sin x\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-xy}dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\frac{y^{\alpha-1}}{1+y^2}dy\xlongequal{y^2=z}\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\frac{z^{\frac{\alpha}{2}-1}}{1+z}dz$$

$$=\frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}.$$

同理可得 $J(\alpha)=\frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$



最后我们来证明 $\Gamma(\alpha)$ 的 Stirling 公式.

$$\Gamma(\alpha+1)=\sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha\left[1+\frac{1}{12\alpha}+\frac{1}{288\alpha^2}-\frac{139}{51840\alpha^3}-\frac{571}{2488320\alpha^4}+O\left(\frac{1}{\alpha^5}\right)\right]$$

证明: $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt$ 设 $t=\alpha x$

$$=\int_0^\infty\alpha^\alpha x^\alpha e^{-\alpha x}\alpha dx=\alpha^{\alpha+1}\int_0^\infty e^{-\alpha(x-\log x)}dx.$$

设 $f(x)=x-\log x$ 它在 $x=1$ 处有唯一极小值点.

设 $f(x)=1+\frac{y^2}{2}$. 则可解得

$$x=1+y+\frac{y^2}{3}+\frac{y^3}{36}-\frac{y^4}{270}+\frac{y^5}{4320}+\frac{y^6}{17010}$$

Date: ....
Place: ....

Reminders

a_0 的系数之所以是为了使 a_0 和 $a_n(n>0)$ 有统一的计算公式(见下文). →

Date: ....
Place: ....

Reminders

$$-\frac{139}{5443200}y^7+\frac{y^8}{204120}-\frac{571\,y^9}{2351462400}+o(y^{10})$$

换元，注意 y 的范围是 $-\infty$ 到 $+\infty$.

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha^{\alpha+1}\cdot e^{-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha}{2}y^2}\left(1+\frac{2}{3}y+\cdots\right)dy$$

将每个 $\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{\alpha}{2}y^2}(y^k)\,dy$ 算出即得 Stirling 公式. □

§11 Fourier 分析

§11.1 ~~Fourier~~ 级数 三角 与 Fourier级数

设 $n\in\mathbb{N}$. 形如

$$p(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的函数叫三角多项式. 由 Weierstrass 逼近定理可知, 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数可被三角多项式逼近. 这一事实在物理上有一个直观的解释: 连续的周期运动可近似地分解为频率不断增加的简谐振动的叠加. 这个观察被用在地心说、日心说中对行星运动轨道的研究中(即本轮和均轮). 另外, Euler, Bernoulli 等人发现弦的振动可由三角级数(即三角多项式的项数趋于无穷时的极限)给出. 所以自然地, 人们开始研

究函数能否展成三角级数展开的问题. 接下来Bessel, Fourier分别从天体力学和热传导理论出发, 建立了三角级数的一般理论.

设 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上逐点收敛. 则显然 f 是以 2π 为周期的函数. 所以我们有时可以认为 f 是定义在 $[0,2\pi]$ 上的函数且满足 $f(0)=f(2\pi)$.

研究三角级数时上面的形式不是太方便, 我们更喜欢用复数形式来写. 回忆一下,

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\quad \sin n\theta=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i},$$ 得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n-ib_n)e^{inx}+(a_n+ib_n)e^{-inx}\right)$$

若定义 $c_n=\begin{cases}(a_n-ib_n)/2 & n>0\\ a_0/2 & n=0\\ (a_{|n|}+ib_{|n|})/2 & n<0\end{cases}$, 则有

$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{inx}$. 注意这里的无穷求和是

$\{c_n\}$满足 $\overline{c_n}=c_{-n}$. 这可保证 $f(x)\in\mathbb{R}$. →

但其实 c_n 可取任意复数. 相应的 $f(x)$ 则成为复值函数.

Date:
Place:

Reminders

~~亦可改成主值意义. 略.~~

~~正因级数无所谓主值.~~

Date:
Place:

Reminders

在主值意义下进行的. 即

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

~~注意~~ $\cancel{\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}}$ ~~(若 $x \ne 2k\pi$)~~

~~所以由 Abel-Dirichlet, 我们立刻有如下定理:~~

~~定理 若 $\{c_n\}$~~ 在级数理论中, 我们有 Weierstrass 和 Abel-Dirichlet 两个判别法用于判定一致收敛. 其中 A-D 判别法强烈地依赖单调性. 但在 $\mathbb{C}$ 上, 复数无法比较大小, 所以必须寻找某种替代的方法.

定义: 复数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 叫做有界变差的, 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}| = |c_0 - c_1| + |c_1 - c_2| + \cdots$ 收敛.

引理: 若 $\{c_n\}$ 有界变差, 则 极限 $\lim_{n\to\infty} c_n$ 存在.

证明: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n - c_{n+1}|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c_{n+1})$ 收敛.

而后者的极限显然为 $c_0 - \lim_{n\to\infty} c_n$. $\square$

Date:
Place:

Reminders

负指标方向类似. 略.

Date:
Place:

Reminders

定理 (Abel-Dirichlet) 若 $\{c_n\}$ 有界变差, 且 $c_n \to 0$,

则 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ 在 $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ 上一致收敛.

证明: 对 $\forall \varepsilon>0$ 考虑 $\cancel{\left(A_k = \sum_{l=n+1}^{k} e^{ilx}\right)}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k e^{ikx}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(c_k - c_{k+1})A_k + c_{n+p}A_{n+p}\right|$$

其中 $$|A_k| = \left|\sum_{l=n+1}^{k} e^{ilx}\right| = \left|e^{i(n+1)x}\left(1+\cdots+e^{(k-n-1)ix}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}} =: M$$

$$|\ | \leq M\cdot\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|c_k - c_{k+1}| + |c_{n+p}|\right)$$ 由已知条件, 可取

N, 使得对 $\forall n>N$ 以及 $\forall p\in\mathbb{N}$, 有 $\sum_{k=n+1}^{n+p}|c_k - c_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

$|c_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2M}$. 于是 $|\ | < \varepsilon$. 所以由 Cauchy 准则, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

在 $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛. $\square$

由此定理马上可知 $\sum \frac{\cos nx}{n}$, $\sum \frac{\sin nx}{n}$, $\sum \frac{\cos nx}{\log(n+1)}$ 等

三角级数都是(一致)收敛的(在相应的区间上).

Date:
Place:

Reminders

因 $|C_n| \geq 0$，所以收敛 ⟺ 主值收敛.

推论：若 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n|$ 收敛，则 f 连续.

一个必要条件是 $f(x)$ 必须是以 2π 为周期的函数
要使 f 的 ... 应满足 Riemann 可积性条件

Date:
Place:

Reminders

若用 Weierstrass，则可直接得到如下定理

定理 (Weierstrass) 若 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n|$ 收敛，
则在整个 $\mathbb{R}$ 上，$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx}$ 绝对一致收敛.

推论：i) 若当 $n\to\infty$ 时 $|C_n| = O(\frac{1}{n^p})$ $(p>1)$，则 $f(x)$ 绝对一致收敛.

ii) 若当 $n\to\infty$ 时 $|C_n| = O(\frac{1}{n^p})$ $(p>2)$，则 $f(x)$ 可导且 $f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n (in) e^{inx}$.

iii) 一般地，若 $p > k+1$，$k\in\mathbb{N}$，则 $f(x)$ k 阶可导，且

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n (in)^k e^{inx}$$

所以系数衰减得越快，函数越光滑.

下面考虑如何从 $f(x)$ 反解 C_n. 假设 $\sum |C_n|$ 收敛，于是 f 连续，所以在 $[0, 2\pi]$ 上 Riemann 可积. 考虑

$$f(x)\cdot e^{-imx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{inx} e^{-imx}$$

因为一致收敛，所以可在 $[0, 2\pi]$ 上逐项积分.

相应地. $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$ →

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

积分限亦可取为 ~~…~~ $-\pi$到π.

Luzin猜想中是 $L^2[0,2\pi]$. →

1966年的Fields奖是Atiyah, Cohen, Grothendieck →
和Smale, 为历史最强阵容, 因此Carleson未能获Fields.
1970年时他已超龄了

于是有 $\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx$

当 $n\neq m$ 时, 显然有 $\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = \left(\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right)_0^{2\pi} = 0$.

当 $n=m$ 时, $\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = 2\pi$, 所以求和中只有一项非零.

由此可得
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx. \quad (*)$$

若展开实部虚部, 则有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

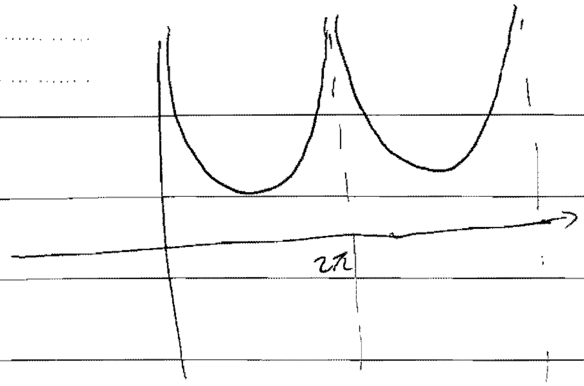
另一方面, $(*)$中的积分对任意 $f\in R[0,2\pi]$ 都可定义
相应的级数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx\right)}_{c_n} e^{inx}$ 称为f
的Fourier级数. ~~…~~ 记为 $f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-inx}$.

接下来自然的问题是, f满足什么条件时 $\sum c_n e^{inx}$ 收敛回f自己. 这里收敛可以是逐点的, 一致的, 按L^2范数的, 甚至是按发散级数求和法意义的. 其中最难的问题是 $R[0,2\pi]$ 中的函数是否几乎处处逐点收敛. 这个问题叫Luzin猜想, 直到1966年才被Carleson解决. 他因此获得了Wolf奖和Abel奖.

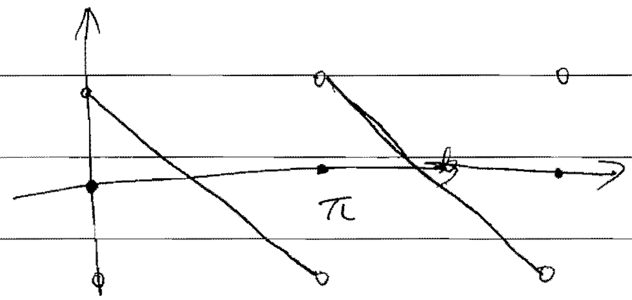
Date:
Place:

Reminders

f(x):



g(x):



Date:
Place:

Reminders

例 ① $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

$f+ig=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+i\sin nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x+i\sin x)^{n}}{n}$

$=-\log(1-\cos x-i\sin x)=-\log 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)$

设 $0<x<\pi$，则 $=\log\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{\pi-x}{2}\cdot i$.

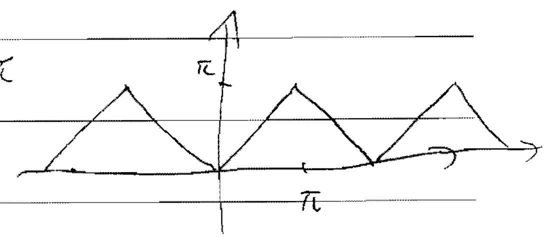
所以 $f(x)=\log\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$. $g(x)=\frac{\pi-x}{2}$. 但这只是在 $(0,\pi)$ 上，其它区间上会有其它表达式，因为 $f.g$ 显然是周期的.

② $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$. $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$

$\Rightarrow f(x)=e^{\cos x}\cos(\sin x)$. $g(x)=e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

因为 $\frac{1}{n!}$ 比任何 $\frac{1}{n^k}$ 衰减得都快. 所以 $f.g$ 可以任意次逐项求导.

③ $f(x)=\begin{cases}|x| & -\pi\le x\le\pi\\ \text{周期延拓} & \text{其它}\end{cases}$



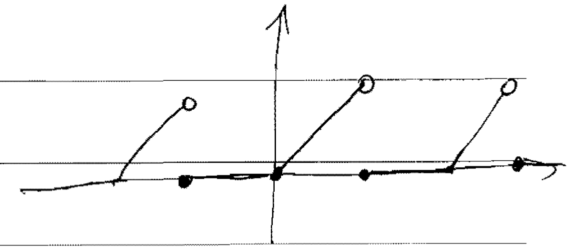
$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{inx}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx$

当 $n=0$ 时，$C_0=\frac{\pi}{2}$. 当 n 为其它偶数时 $C_n=0$

当 n 为 $2k+1$ 时 $C_n=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2}$. 所以 f 最终的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

④ $f(x)=\begin{cases} x & 0\leq x<\pi \\ 0 & -\pi\leq x<0 \\ \text{周期延拓} & \text{其它}\end{cases}$



按实形式计算系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & n=0\\ 0 & n=2k\\ -\frac{2}{\pi(2k+1)^2} & n=2k+1\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{(-1)^n\pi}{n}.$$ 所以

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi}{n}\sin nx.$$

在例③④中，虽然当 $x\in(0,\pi)$ 时 $f(x)=g(x)$，但它们的 Fourier 级数不同. 这是因为 Fourier 系数是 $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ 在整个区间上的积分，是由整体信息决定的. 后面的局部化原理则与这里的现象形成有趣的对比.

Date:
Place:
Reminders

不完备.

Date:
Place:
Reminders

旧方

§11.2 Fourier级数的收敛性.

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的实值函数. 很显然 只要 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 就可以定义其 Fourier 级数

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}.\quad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx. \qquad (*)$$

~~现在的问题是,对于~~ 设 $R(S^1)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上满足 $f(-\pi)=f(\pi)$ 的 Riemann 可积函数的全体构成的线性空间, 则 $(*)$ 中的积分 $f\mapsto c_n$ 给出了 $R(S^1)$ 到 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ 的线性映射. 而 和式 ~~给出~~ 如果收敛的话, 则给出 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ 的某个子空间到 $\mathbb{C}^{S^1}$ 的映射. Fourier 分析就是要研究这几个映射的性质. 而这里的收敛如何定义, 则会显著地影响结论. 以前讲的逐点收敛、一致收敛都太强了, 对于 $R(S^1)$ 中比较坏的函数很难做到这种收敛. 所以 我们要引入新的收敛性.

定义①: 设 $f\in R[a,b]$, $p\geq 1$. 定义

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}.$$ 称为 f 的 p-范数.

$R[a,b]$ 配上 $\|\cdot\|_p$ 之后成为一个赋范空间. 记之

为 $R^p[a,b]$.

② $R[a,b]$ 中的函数列 $\{f_n\}$ 若满足：对 $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n>N\ \ \|f_n-f\|_p<\varepsilon$. 则称 $\{f_n\}$ 在 $R^p[a,b]$ 中收敛到 f.

③ 设 $\mathcal{F}$ 是 $R[a,b]$ 中的子空间. 若对 $\forall f\in R[a,b]$. $\forall\varepsilon>0\ \exists g\in\mathcal{F}$. 使 $\|f-g\|_p<\varepsilon$. 则称 $\mathcal{F}$ 在 $R^p[a,b]$ 中稠密.

类似地还可引入开、闭、紧等拓扑概念. 但因为 $R^p[a,b]$ 不完备. 所以并没有比较好的结论. 等有了Lebesgue积分之后再说.

在所有的 $R^p[a,b]$ 中. $R^2[a,b]$ 是最有趣的.

引理：对于 $\forall f,g\in R[a,b]$.

$$\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=2(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2)$$

所以 $R^2[a,b]$ 中的 $\|\cdot\|_2$ 实际是由内积诱导的.

定义：在 $R^2[a,b]$ 上定义 $\langle\,,\rangle: R^2\times R^2\to\mathbb{R}$

$(f,g)\mapsto \int_a^b \overline{f(x)}\,g(x)\,dx$, （于是 $\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}$）

则 $\langle\,,\rangle$ 是一个 Hermit内积

回到 $R(S^1)$ 的情况，若记 $e_n=e^{inx}$，则有

$$\langle e_n,e_m\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}e^{imx}\,dx=\begin{cases}2\pi & n=m\\0 & n\neq m\end{cases}$$

Date:
Place:
Reminders

C在R中稠用不着. 也许可以省略 以后可做本试题

此处应用 $|f| \le |\mathrm{Re}\, f| + |\mathrm{Im}\, f|$
分成实部和虚部分别考虑.

Date:
Place:
Reminders

所以 $\hat{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n$ 是一组正交的单位向量. 而由f出发计算Fourier的积分 $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ 可写为 $c_n = \frac{\langle e_n, f\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle}$. 最后的形式则为

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\langle e_n, f\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle} e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \hat{e}_n, f\rangle \hat{e}_n.$$

如果V是一个有限维Hermit空间, $e_1 \cdots e_n$ 是一组基, 则对 $\forall\, w \in V$, 有 $w = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, w\rangle e_i$. 所以Fourier级数在 $\|\cdot\|_2$ 下的收敛性可以看成无穷维内积空间上的一组向量是否构成"基"的问题.

定理: 设 $f \in R(S^1)$, $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \langle \hat{e}_n, f\rangle \hat{e}_n$, 则 $\|f - S_N\|_2 \to 0$, 当 $N\to\infty$ 时.

引理1. $C[a,b]$ 在 $R[a,b]$ 中稠密 和 $R^2(a,b)$

证明: 即证若f是[a,b]上的Riemann可积函数. 则对 $\forall \varepsilon > 0$ 存在[a,b]上的连续函数g, 使 $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon$
或 $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx < \varepsilon$.

Date:
Place:
Reminders

若已证明了 L^1 的版本. 设 $\Omega = \omega(\mathrm{Re} f)+\omega(\mathrm{Im} f)$.
(见下页注). $g\in C[a,b]$ 使 $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon^2}{\Omega}$. 则
$\|f-g\|_2<\varepsilon$.

Date:
Place:
Reminders

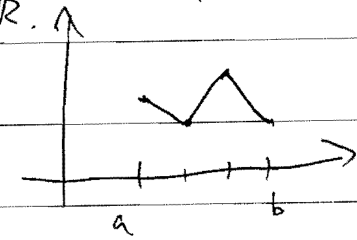
因为 f R可积. 所以对 $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ $[a,b]$ 的分划

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

使 $\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$. 其中 $M_i=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f(x)\}$

$m_i=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}\{f(x)\}$

现在构造一个折线函数 $g(x):[a,b]\to\mathbb{R}$.



若 $x_{i-1}\le x\le x_i$. 则规定

$$g(x)=\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}f(x_{i-1})+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}f(x_i).$$

显然 g 是连续函数. 且在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 上 $m_i\le g(x)\le M_i$.

于是在 $[x_{i-1},x_i]$ 上, 有 $|f(x)-g(x)|\le M_i-m_i$

$\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-g(x)|\,dx\le(M_i-m_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$. 所以

$\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx\le\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$. □.

引理2. 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为任意复数列. 记 $T_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}a_n\hat{e}_n$

则有 $\|f-S_N\|_2\le\|f-T_N\|_2$.

证明: $\|f-T_N\|_2^2=\langle f-T_N,f-T_N\rangle$

$=\|f-S_N\|_2^2+\langle f-S_N,S_N-T_N\rangle+\langle S_N-T_N,f-T_N\rangle+\|S_N-T_N\|_2^2$

Date:
Place:

Reminders

$\omega(f)$

其中 $\Omega = \omega(Ref)+\omega(Im f)$. 表示f在$(a,b)$

上的振幅. 于是 由g的取法可知

$$|f(x)-g(x)| \le |Re(f-g)| + |Im(f-g)| \le \Omega.$$

直接改为使 $\|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$ 即可

Date:
Place: 又对 $n \in [-N, N]$, 有

Reminders

注意 $\langle f - S_N, \hat{e}_n \rangle = \langle f, \hat{e}_n \rangle - \langle f, \hat{e}_n \rangle = 0$.

于是 $\langle f - S_N, S_N - T_N \rangle = 0$. 取复共轭得 $\langle S_N - T_N, f - S_N \rangle = 0$.

于是 $\|f - T_N\|_2^2 - \|f - S_N\|_2^2 = \|S_N - T_N\|_2^2 \ge 0$. □

~~对 $\varepsilon > 0$~~, 对 $\varepsilon>0$, 按引理1

定理的证明: 设 $f \in R(S^1)$. 取 $g \in C(S^1)$ 使 $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{4\Omega}$. ~~其中 Ω 表示 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上的振幅.~~

~~由g的取法可知 $|f(x)-g(x)| \le M_i - m_i \le \Omega$.~~ 于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 dx \le \Omega \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)| dx}_{\|\cdot\|_1} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

现在因为 g 是连续函数. 所以存在三角多项式 T_N (N是次数), 使得对 $x \in (a,b)$ 有 $|g(x) - T_N(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}$. 于是

$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - T_N(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}$. 最后 由引理2.

$$\|f - S_N(x)\|_2^2 \le \|f - T_N\|_2^2 \le \|f - g + g - T_N\|_2^2$$

$$\le 2(\|f-g\|_2^2 + \|g - T_N\|_2^2) < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2.$$

当 $n > N$ 时. 仍由引理2 可知 $\|f - S_n(x)\|_2^2 < \|f - S_N(x)\|_2^2$

所以 $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N\|_2^2 = 0$ □

实形式: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ →

若只取有限项. 则得 $\|f\|_2^2 \geq \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2\cdot 2\pi$ ↗

这称为Bessel不等式.

推论: 若 $f\in C(S^1)$ 使 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|<\infty$, 则 f 的Fourier →
绝对一致收敛到 f.

证明: 设 $\tilde f(x)=\sum c_n e^{inx}$. $\tilde f\in C(S^1)$.

$\tilde f(x)e^{-inx}=\sum_m c_m e^{imx-inx}$ 也绝对一致收敛. 逐项积分得

$\tilde c_n = \frac{1}{2\pi}\int \tilde f(x)e^{-inx}dx = \frac{2\pi}{2\pi}\sum c_m\delta_{nm} = c_n$ 可得 $\tilde f = f$. □

推论: $\|f\|_2^2 = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$ (Parseval等式)

证明: $\|f-S_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \langle f, S_N\rangle - \langle S_N, f\rangle + \langle S_N, S_N\rangle$

其中 $\langle f, S_N\rangle = \langle f, \sum_n\langle\hat e_n, f\rangle\hat e_n\rangle$
$= \sum_n\langle\hat e_n, f\rangle\langle f, \hat e_n\rangle = \sum_n 2\pi|c_n|^2$

$\langle S_N, f\rangle = \langle\sum_n\langle\hat e_n, f\rangle\hat e_n, f\rangle = \sum_n\overline{\langle\hat e_n, f\rangle}\langle\hat e_n, f\rangle$

$\langle S_N, S_N\rangle = \langle\sum\langle\hat e_n, f\rangle\hat e_n, \sum\langle\hat e_m, f\rangle\hat e_m\rangle$ //

所以 $\|f-S_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2$

因为 $\lim_{N\to\infty}\|f-S_N\|_2^2 = 0$. 所以 $\|f\|_2^2 = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$. □

推论: 若 $f\in R(S^1)$. 则其Fourier系数必满足 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$ 收敛.

所以 $\sum\frac{\sin nx}{\log n}$ 一定不是R可积函数的Fourier级数.
$\lim_{n\to\infty}c_n = 0$. (Riemann-Lebesgue引理).

推论(唯一性定理) 若 $f, g\in R(S^1)$ 具有相同的Fourier级数
则 f, g 几乎处处相等

证明: $\|f-g\|_2^2 = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n-\tilde c_n|^2 = 0$. 即
$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx = 0$. 所以 f, g 是 a.e. 相等. □

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

推论：若 $f, g \in R(S^1)$，其 Fourier 系数为 c_n 和 d_n.

则 $\langle f, g\rangle = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{c}_n d_n$.

证明：考虑 $f+g$, $f-g$, f, g 的 Parseval 等式. □.

推论：设 $f \in R(S^1)$. 则对 $\forall [a,b] \subseteq [-\pi, \pi]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_a^b e^{inx}\,dx$$

证明：取 $g(x) = \begin{cases} 1 & x\in(a,b) \\ 0 & x\notin(a,b) \end{cases}$ 即可. □.

例① $f(x) = \begin{cases} e^{i\alpha x} & -\pi \le x < \pi \\ f(-\pi) & x = \pi \end{cases}$ 则有

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i(\alpha-n)\pi} - e^{-i(\alpha-n)\pi}}{i(\alpha-n)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{(\alpha-n)\pi}$$ 由 Parseval 等式

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\alpha x}|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{\pi^2(\alpha-n)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2}.$$

特别地. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$. (若连续)

Date:
Place:
Reminders

$$\frac{x^2}{\sin^2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n}(2n-1)\frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad \to$$

例如 $a_n=(-1)^n$. $\to$

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \frac{0\text{或}-1}{n} \to 0.$$

Date:
Place:
Reminders

两边乘α^2，然后在$\alpha=0$附近Taylor展开，可得Bernoulli数与$\zeta(2n)$的关系：$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{2(2n)!}(2\pi)^{2n}$ (略)

② $f(x)=\cos\alpha x = \frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}$

由例1可知 $f(x)$ 的Fourier级数为

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right)\cos nx$$

不妨设 $0<\alpha<1$. 注意这个 c_n 满足 $\sum|c_n|$ 收敛，所以上式的~可改成=，特取 $x=\pi$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2} = \frac{1-\pi\alpha\cot\pi\alpha}{2\alpha^2}.$$

由此也可得 $\zeta(2n)$ 与 B_{2n} 的关系.

§11.3 Cesàro 与 Abel 可和性.

设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 我们知道，若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=A$. 但是反之，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=A$ 并不能推出 $\lim_{n\to\infty} a_n=A$.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

~~例：① $a_n=(-1)^n$ 记 $\sigma_n=(\sum_{k=1}^{n} a_k)/n$~~

现在考虑一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 设它的前 n 项部分和为 S_n

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$. 我们要考虑 S_n 的前 n 项平均，记为 σ_n

$$\sigma_n=\frac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=a_1+\frac{n-1}{n}a_2+\frac{n-2}{n}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n.$$

σ_n 称为原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 n 个 Cesàro 和. 若 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$

存在，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Cesàro 可和.

例 ① $a_n=(-1)^{n-1}$. $S_n=\begin{cases}1 & n\text{奇}\\ 0 & n\text{偶}\end{cases}$ Cesàro

$\sigma_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2n} & n\text{奇}\\ \frac{1}{2} & n\text{偶}\end{cases}$，于是 $\sigma_n\to\frac{1}{2}$. 即 $1-1+1-1+1-\cdots\overset{C}{=}\frac{1}{2}$

下面回到三角级数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. 我们先定义

$S_N=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ $N=0,1,2,\cdots$, 再定义

$\sigma_N=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n$ σ_N 也是 N 次三角多项式.

它事实上在 $\|\cdot\|_2$ 的意义下距离 f 更远 (因为 S_N 是最近的.

但下面我们将证明，当 f 连续时. σ_N 会一致地逼近 f.

这就是 Fejér 定理.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

首先先给出 S_N 和 σ_N 的两个较好的表达式.

引理: i) $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, D_N(y)\,dy$

其中 $D_N(y)=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$, ~~称为 Dirichlet 核~~.

ii) $\sigma_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_N(y)\,dy$

其中 $F_N(y)=\frac{1}{N}\frac{\sin^2(\frac{Ny}{2})}{\sin^2(\frac{y}{2})}$. 称为 Fejér 核

证明: i) $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\,dy$

$S_N=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{in(x-y)}\,dy$. $x-y=\tilde{y}$, $y=x-\tilde{y}$

因为f是周期的. 所以 $=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{iny}\,dy$

设 $\omega=e^{iy}$ 则

$$D_N(y)=\sum_{n=-N}^{N}\omega^n=\omega^{-N}\frac{\omega^{2N+1}-1}{\omega-1}=\frac{\omega^{N+\frac{1}{2}}-\omega^{-N-\frac{1}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}}-\omega^{-\frac{1}{2}}}$$ ✓

ii) $F_N=\frac{1}{N}(D_0+D_1+\cdots+D_{N-1})=\frac{1}{N(\omega-1)}(\omega-1+\omega^2-\omega^{-1}+\cdots$

$+\,\omega^N-\omega^{-N+1})$

Date:
Place:
Reminders

注意 此例不是 Cesàro 可和的. →

Date:
Place:
Reminders

$$= \frac{1}{N(\omega-1)}\left(\omega^N+\omega^{N-1}+\cdots+\omega\right)\left(1+\omega^{-1}+\cdots+\omega^{-N+1}\right)$$

$$= \frac{\omega^N-1}{N(\omega-1)}\left(1+\omega^{-1}+\cdots+\omega^{-N+1}\right) = \frac{(\omega^N-1)(1-\omega^{-N})}{N(\omega-1)(1-\omega^{-1})}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{Ny}{2}}{N\sin^2\frac{y}{2}}. \qquad \square$$

接下来的问题就是, 当 $N\to\infty$ 时, 积分 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y-x)F_N(y)dx$ 是否收敛到 f 本身? 这个问题我们一会再来考虑. 下面介绍另一种发散级数求和法.

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是一个数列, 我们可以考虑幂级数

$A(r)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$. 由Abel定理可知, 若 $\sum a_n$ 收敛到某个 A, 则必有 $A=\lim_{r\to1}A(r)$. 但是反之, 若 $\lim_{r\to1}A(r)$ 存在, 未必能推出 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 存在. 我们把 $A(r)$ 叫做该级数的 Abel 平均. 若极限 $\lim_{r\to1}A(r)$ 存在, 则称该级数 Abel 可和.

例: $a_n=(-1)^{n}\cdot(n+1)$ 于是

$$A(r)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot(n+1)r^n=\frac{1}{(1+r)^2}.$$

Date:
Place:
Reminders

$\lim_{r\to 1} A(r) = \frac{1}{4}$. 所以 $1-2+3-4+5-\cdots = \frac{1}{4}$.

下面回到 Fourier 级数. 对于 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. 我们定义它的 Abel 平均为

$$A_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} c_n e^{in\theta}$$

(|n| 是因为这是主值意义下的级数)

$$= c_0 + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r^n \left(c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}\right).$$

引理 i) $A_r(x)$ 当 $r\in[0,1)$ 时是绝对一致收敛的.

证明: 设 $|f(x)| \le M$. 于是 $|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(x) e^{-inx} dx\right| \le \frac{M}{2\pi}$.

所以 $|A_r(x)| \le \frac{M}{2\pi} + \sum_{n\ge 1} r^n \cdot \frac{M}{\pi} = \frac{M}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1-r}\right)$ □.

ii) 当 $r\in[0,1)$ 时.

$$A_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cdot P_r(y)\,dy.$$

其中 $P_r(y) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos y + r^2}$, 称为 Poisson 核.

Date:
Place:
Reminders

证明: $A_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy$

$+ \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(e^{in(x-y)}+e^{-in(x-y)}\right)dy$

(由一致收敛性)

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(e^{iny}+e^{-iny}\right)\right)dy$

记 $\omega = re^{iy}$ 则

$P_r(y) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(\omega^n+\bar{\omega}^n) = 1+\frac{\omega}{1-\omega}+\frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}$

$= \frac{\cancel{1-\omega-\bar{\omega}+\omega\bar{\omega}+\omega-\omega\bar{\omega}+\bar{\omega}-\omega\bar{\omega}}}{1-\omega-\bar{\omega}+\omega\bar{\omega}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ □.

接下来的问题就变成当 $r\to 1^-$ 时, 积分 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y-x)P_r(y)dy$ 是否收敛回 $f(x)$ 了.

在 Fourier 级数的 Cesàro 求和与 Abel 求和中都出现了如下形式的积分 $f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y-x)K_n(y)dy$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-y)\, f(y)dy.$

问题都是当 $h\to h_0$ 时是否有 $\lim_{h\to h_0} f_h(x)=f(x)$.

如果把积分号换成求和，f 视为向量，乘上核运算视为一个线性变换，则问题归结为：若

$$V_h=\alpha_h V,\ \text{是否有}\ \lim_{h\to h_0}V_h=V.$$

即 $\lim_{h\to h_0}\alpha_h=\mathrm{Id}$. 这是一类非常是有一般性的问题，特别在微分方程中有重要的应用，值得专门研究一下。

定义：设 $f,g\in R(S^1)$，定义它们的卷积为

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,g(x-y)\,dy.$$

（对每个 x，右边的积分都存在，所以定义好）

~~由周期性可知 $f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)dy=g*f(x)$. 所以它给出 $R(S^1)$ 上的一种交换的乘法，下面我们将证明它还具有结合性.~~

（卷积性质）

定理：设 $f,g,h\in R(S^1)$，则

i) $f*(g+h)=f*g+f*h$. ii) $(cf)*g=f*(cg)=c(f*g)$

iii) $f*g=g*f$. iv) $(f*g)*h=f*(g*h)$

v) $f*g\in C(S^1)$.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

iv) 设 f, g 的 Fourier 系数分别为 a_n, b_n, c_n，则

$c_n = a_n \cdot b_n$.

证明：其中 i) ii) 显然，iii) 换元即可，iv) 和 iv) 交换积分次序 + 换元. 对 v).

$$\left|(f*g)(x_1) - (f*g)(x_2)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(g(x_1-y) - g(x_2-y)\right)dy\right|.$$

记 $\bar{f}(y) = \overline{f(y)}$. $g_1(y) = g(x_1-y)$. $g_2(y) = g(x_2-y)$.

设 $\|\bar{f}\|_2 = 2\pi M$.

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\langle \bar{f}, g_1 - g_2\rangle\right| \le \frac{1}{2\pi}\|\bar{f}\|_2 \cdot \|g_1 - g_2\|_2.$$

由前面的稠密性定理，对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists h \in C(S^1)$ 使

$\|g-h\|_2 < \frac{\varepsilon}{3M}$. 即 $\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(y) - h(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3M}$.

于是 $\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x_i-y) - h(x_i-y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3M}$ $i=1,2$.

同样定义 h_1, h_2. 则有

$$\left|(f*g)(x_1) - (f*g)(x_2)\right| \le M \cdot \left(\|g_1 - h_1\|_2 + \|h_1 - h_2\|_2 + \|h_2 - g_2\|\right)$$

$$< M\left(\frac{2\varepsilon}{3M} + \|h_1 - h_2\|\right)$$

注意 h 在 $\mathbb{R}$ 上连续，且以 2π 为周期，所以 h 一致连续，

所以存在 $\delta > 0$ 使得对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，$|x_1 - x_2| < \delta$.

Date:
Place:
Reminders

~~例~~：经得~会儿再说.

若 $K_a(y)\geq 0$，则 ii) 可由 i) 推出.

Date:
Place:
Reminders

有 $|h(x_1)-h(x_2)|<\frac{\varepsilon}{9M}$，于是

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|h(x_1-y)-h(x_2-y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}<\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{9M}<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

最终有：只要 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$，$|x_1-x_2|<\delta$，就有
$|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)|<\varepsilon$. 所以 $f*g$ 一致连续. □

定义：设 $A\in\mathbb{R}_\infty$（例如 $A=\mathbb{N}$ 或 $(0,1)$），a_0 是 A 的极限点（例如 $a_0=+\infty$ 或 1）. $\{K_a(x)\}_{a\in A}$ 是一族 $R(S^1)$ 中的函数（即 $K: A\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ s.t. by $K(a,\cdot)\in R(S^1)$）. 若它们满足以下条件：

i) 对 $\forall a\in A$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_a(x)dx=1$.

ii) $\exists M>0$ s.t. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_a(x)|dx<M$

iii) 对 $\forall\delta>0$ $\lim\limits_{a\to a_0}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}|K_a(x)|dx=0$.

则称函数族 $\{K_a(x)\}_{a\in A}$ 是一个好核，或单位的逼近（后一名称来自下面的定理.

定理（好核性质）设 $\{K_a(x)\}_{a\in A}$ 是一个好核，$f\in R(S^1)$.

Date:
Place:

Reminders

若f在每一点处左右极限都存在，则称之为 regulated function（可译为规整的？）

一个函数是 regulated，当且仅当它可写为一串列阶梯函数的一致极限。单调函数和连续函数显然都是规整的。规整函数一定 Riemann 可积。

Date:
Place:

Reminders

则 $\lim\limits_{a\to a_0}(f*K_a)(x_0)=\begin{cases} f(x_0), & 若 f 在 x_0 连续 \\ \dfrac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}, & 若 f 在 x_0 处左右极限都存在. \end{cases}$

（其实是不明，但是是要的的）

证明：设 $\{K_a\}_{a\in I}$ 的定义 ii) 条中的常数为 M. $|f|$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的上界为 B. 只证第 2 种情况. 由左右极限定义. 对 $\forall\varepsilon>0$

$\exists\delta_+>0$ 使得对 $\forall y>0$ $|f(x_0+y)-f(x_0+)|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

$\exists\delta_->0$ 使得对 $\forall y>0$ $|f(x_0-y)-f(x_0-)|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 取 $\delta_1=\min\{\delta_+,\delta_-\}$

则当 $|y|<\delta_1$ 时 $|f(x_0\pm y)-f(x_0\pm)|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

$\left|(f*K_a)(x_0)-\frac{1}{2}\left(f(x_0-)+f(x_0+)\right)\right|$

$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_a(y)\left(f(x-y)-\frac{1}{2}\left(f(x_0-)+f(x_0+)\right)\right)dy\right|$

，若f在x_0处连续，则有

$$\lim_{a\to a_0}(f*K_a)(x_0)=f(x_0).$$

推论：若每个 $K_a(x)$ 都是偶函数. f在 x_0 处左右极限都存在（记为 $f(x_0\pm)$），则

$$\lim_{a\to a_0}(f*K_a)(x_0)=\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.$$

因为f在x_0处连续，所以对$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_0>0$

使得当$|y|<\delta_0$时 $\left|f(x_0-y)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{K}$ （K待定）

设$|f|$在$[-\pi,\pi]$上的上界为B

$U=B_{\delta_A}(a_0)$ 或 $U=\{a\ge N\}$.

证明：$\left|(f*K-f)(x_0)\right|$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_a(y)f(x_0-y)\,dy-f(x_0)\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_a(y)\big(f(x_0-y)-f(x_0)\big)\,dy\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\left(\int_{|y|<\delta_0}|K_a(y)|\cdot\left|f(x_0-y)-f(x_0)\right|dy+\int_{\delta_0\le|y|\le\pi}|K_a(y)|\cdot\left|f(x_0-y)-f(x_0)\right|dy\right)$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\varepsilon}{K}\int_{-\pi}^{\pi}|K_a(y)|\,dy+2B\cdot\int_{\delta_0\le|y|\le\pi}|K_a(y)|\,dy\right)$$

$$\le\frac{M}{K}\cdot\varepsilon+\frac{B}{\pi}\int_{\delta_0\le|y|\le\pi}|K_a(y)|\,dy.$$

（由好核性质第iii)条，存在a_0的开邻域U使$a\in U$时有$\int_{\delta_0\le|y|\le\pi}|K_a(y)|\,dy<\frac{\varepsilon}{L}$）

$\le\frac{M}{K}\cdot\varepsilon+\frac{B}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{L}$. 于是取 $K=2M$, $L=B$ 即得

$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi})\varepsilon<\varepsilon$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

推论的证明同理. 只要注意到 K_a 偶

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_a(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_a(y)\,dy = \frac{1}{2}.$$ 于是

$$\left|(f * K_a)(x_0) - \frac{1}{2}\left(f(x_0+)+f(x_0-)\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi} K_a(y) f(x_0-y)\,dy - \int_0^{\pi} K_a(y) f(x_0-)\,dy\right.$$

$$\left.+\int_{-\pi}^{0} K_a(y)\cdot f(x_0-y)\,dy - \int_{-\pi}^{0} K_a(y) f(x_0+)\,dy\right|$$

然后再把 $\int_0^{\pi}$ 和 $\int_{-\pi}^{0}$ 拆成 $\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}$ 和 $\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{0}$ 即可. □

推论: 若 $f\in C(S^1)$, 则定理中的收敛是一致的.

证明: ~~f 在 [illegible] 上连续~~, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 所以取出的 δ 与 x_0 无关, 于是最后的 U(δ 或 N) 也与 x_0 无关. 所以收敛是一致的. □

现在回到 Fourier 级数. 我们有三组核函数 D_N, F_N 和 P_r. 它们满足

Date:
Place:
Reminders

$S_N = f * D_N$. $\quad D_N(x) = \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ $\quad N\in\mathbb{N}$, $N_0=+\infty$

$\sigma_N = f * F_N$ $\quad F_N(x) = \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2\frac{x}{2}}$ $\quad N\in\mathbb{N}$, $N_0=+\infty$

$A_r = f * P_r$. $\quad P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$ $\quad r\in(0,1)$, $r_0=1$.

接下来的问题是它们是否是好核?

引理 D_N 不是好核.

证明: D_N 满足好核定义的 i), 但是不满足 ii)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

因为 $\sin\frac{x}{2}\le\frac{x}{2}$, 所以 $\ge \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{|\sin(N+\frac{1}{2})x|}{x}dx$

令 $(N+\frac{1}{2})x=y$ $\quad = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy$.

$$\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{(N-1)\pi}^{N\pi} + \int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi}$$

若不加|·|，则极限为零. 因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x|\le\pi} D_N(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin(N+\tfrac12)x\,dx$$

定义 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{x}{2} & x>\delta\\ 0 & x<\delta\end{cases}$ 则 $f\in R[0,\pi]$. 由 Riemann-Lebesgue 可知 ○ $\to 0$.

但性质 iii) 也不满足. 因为 →

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x|\le\pi}|D_N(x)|\,dx = \frac1\pi\int_\delta^\pi \frac{|\sin(N+\frac12)x|}{\sin\frac x2}\,dx$$

$$\ge \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sin\frac\delta2}\int_\delta^\pi|\sin(N+\tfrac12)x|\,dx$$

$$\ge \frac{1}{\pi\sin\frac\delta2}\int_\delta^\pi \sin^2(N+\tfrac12)x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sin\frac\delta2}\left(\frac{\pi-\delta}{2}+\frac{\sin(2N+1)\delta}{4N+2}\right)$$

$$\ge \frac{1}{\pi\sin\frac\delta2}\left(\frac{\pi-\delta}{2}-\frac{1}{4N+2}\right)$$

右边有非零的下极限，所以左边下极限非零.

其中 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dy = (-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy$

$$= \frac{(-1)^k}{\xi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin y\,dy = \frac{(-1)^{k+1}}{\xi}\left[\cos y\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} = \frac{2}{\xi} > \frac{2}{(k+1)\pi}$$

同理 $\int_{N\pi}^{(N+\frac12)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dy \ge \frac{1}{(N+\frac12)\pi}$. 于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(x)|\,dx \ge \frac12+\frac13+\cdots+\frac1N + O(1)$$

$= \log(N)+O(1)$. 所以无界. □.

定理: i) F_N 是好核.

ii) P_r 是好核.

证明: i) F_N 显然满足 i). ii). 对于 iii)

$$\int_{\delta\le|x|\le\pi}F_N(x)\,dx = \int_{\delta\le|x|\le\pi}\frac1N\frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2\frac x2}\,dx \le \frac{2(\pi-\delta)}{N\sin^2\frac\delta2}\xrightarrow{N\to+\infty}0.$$

ii) P_r 显然满足 i) ii). 对于 iii). 注意 当 $\delta\le|x|\le\pi$ 时,

$1-2r\cos x+r^2=(1-r)^2+2r(1-\cos x)\ge 4r\sin^2\frac x2\ge 4r\sin^2\frac\delta2$. 所以

$$\int_{\delta\le|x|\le\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx \le \frac{1-r^2}{4r\sin^2\frac\delta2}(\pi-\delta)\to0. \quad r\to1^-.$$

□.

推论：i) $f\in R(S^1)$. 若其Fourier系数 $=0$. $\rightarrow$ 则f在其连续点处一定为零.（唯一性定理）.

ii) $C(S^1)$中的函数可由三角多项式一致逼近（Weierstrass第二逼近定理）.

iii) $C[a,b]$中的函数可由多项式一致逼近（Weierstrass第一逼近定理）（Fejér）

证明：i) $c_n=0 \Rightarrow S_N^{(x_0)}=0 \Rightarrow \sigma_N^{(x_0)}=0 \Rightarrow f(x_0)=0$.

ii) 取 $\sigma_N(x)$ 即可.

iii) σ_N 可由它的Taylor多项式一致逼近. □

前面从重新求和法得到好核的卷积. 反过来，每给定一个好核 $\{K_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$，考虑 $f_\alpha=K_\alpha * f$ 的Fourier级数. 由卷积性质(vi) $f_\alpha(x)=\sum c_n b_n(\alpha)e^{inx}$ 其中 c_n是f的Fourier系数，$b_n(\alpha)$为K_α的Fourier系数. 所以每个好核都定义了一种广义的重新求和法.

$$b_n(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\alpha(y)e^{-iny}dy$$

它可视为 $K_\alpha * e^{inx}$ 在 $x=0$ 处的值.

由好核定理，当 $\alpha\to\alpha_0$ 时，所有 $b_n(\alpha)\to 1$. 所以这些都是Cesàro和Abel求和法的推广.

（Fejér定理）

推论：i) 设 $f\in R(S^1)$. 若f在某点左右极限都存在，则其Fourier级数在该点在Cesàro意义下收敛到 $\frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-))$. 若 $f\in C(S^1)$，则其Fourier的Cesàro平均一致收敛到f.

ii)（将Cesàro换成Abel.）

再回顾一下好核定理：

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K(x-y)f(y)dy=f(x).$$

若将积分视为求和，函数视为向量下标，则上式可视为

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\sum_y K_{xy}(\alpha)f_y=f_x.$$

即 $\lim_{\alpha\to\alpha_0}K(\alpha)f=f$.

即 $\lim_{\alpha\to\alpha_0}K(\alpha)=id$. 所以好核为单位的逼近. 在函数空间中，恒等算子不能写成一个核函数 $K(x,y)$ 在 $f(y)$ 上的积分（即 $f(x)=\int K(x,y)f(y)dy$）我们只能用好核去逼近这种不存在的 $K(x,y)$. 这种逼近在微分方程中有重要的应用（那里视线性微分算子为某种矩阵，解微分方程就是矩阵求逆，要求逆就需要有单位）. 另外，如何赋予 $\lim K(\alpha)$ 数学意义也导致了广义函数（或分布）理论.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

§11.4 逐点收敛性.

首先我们证明更广的版本的 Riemann-Lebesgue 引理

定理 (Riemann-Lebesgue) 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积或在 $[a,b)$ 上广义 Riemann 可积且绝对广义 Riemann 可积 (b 可为 $+\infty$),

则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx=0$.

证明: 不妨设 f 是实值的. 我们只需证

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$. $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$.

两者是类似的, 我们只证前者.

首先考虑 f Riemann 可积的情形. 于是 f 有界. 设 $|f(x)|\le M$.

记 $n=[\lambda]$. 将 $[a,b]$ n 等分. $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$ $i=0,1,\cdots,n$.

记 $\omega_i=\omega(f,\underbrace{[x_{i-1},x_i]}_{T_i})$ $(i=1,\cdots,n)$. 因为 f R 可积, 所以

$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i|T_i|=0$

注意 $\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,dx\right|=\left|\left[\frac{\sin x}{\lambda}\right]_{x_{i-1}}^{x_i}\right|\le\frac{2}{\lambda}$, 将积分 $\int_a^b$ 分拆成 n 个,

Date:
Place:
Reminders

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\cos\lambda x\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\cos\lambda x\,dx$$

$$+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\cos\lambda x\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\big(f(x)-f(x_0)\big)\cos\lambda x\,dx + \int_{x_1}^{x_2}\big(f(x)-f(x_1)\big)\cos\lambda x\,dx$$

$$+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}\big(f(x)-f(x_{n-1})\big)\cos\lambda x\,dx + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,dx$$

于是 $\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \sum_{i=1}^{n}\omega_i|I_i| + n\cdot M\cdot\frac{2}{\lambda}$.

$$\le \sum_{i=1}^{n}\omega_i|I_i| + \frac{2M}{\sqrt{\lambda}} \to 0.\quad \lambda\to\infty.$$

再设f在$[a,b)$上广义R可积，其中b有限. 对$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. $\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$. 由$f$在$[a,b-\delta]$上R可积，可知 $\exists\lambda_0$ s.t. 当$\lambda>\lambda_0$时 $\left|\int_a^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是 $\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \left|\int_a^{b-\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| + \int_{b-\delta}^{b}|f(x)|\,dx < \varepsilon$.

当$[a,b)=[a,+\infty)$时 类似，将$b-\delta$替换为A即可. □

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

例. 我们知道 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$, 即

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)\sin(N+\tfrac{1}{2})x\,dx$$

$$+2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{x}\,dx$$

$$= (\cdots) + 2\int_{-(N+\frac{1}{2})\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x} = \pi.$$

□.

接下来回到 Fourier 级数的部分和

$$S_N(x) = (f * D_N)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cdot\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0}\right) f(x-y)\,\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+y)+f(x-y)\right)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\,dy.$$

Date:
Place:
Reminders

注意 Dirichlet 核有一个奇性部分 $\frac{1}{\sin\frac{y}{2}}$. 若能将其处理掉，则由 R-L 引理很容易得出 ~~~~极限为零的结果~~ ~~~~第一种处理是把积分区域偏一下，避开坏点 $y=0$. 即

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\left(f(x+y)+f(x-y)\right)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}(\cdots)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(\cdots)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}dy.$$

注意第二个积分当 $N\to\infty$ 时趋于零. 所以我们得到.

引理：若 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x) = s$. 则 对 $\forall \delta>0$.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\left(f(x+y)+f(x-y)\right)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}dy = s.$$

推论(Riemann 局部化定理) 若 f, g 在 x_0 的某邻域内具有相同的值. 则它们的 Fourier 级数在这点处同时收敛同时发散. 若收敛. 则收敛到同一个数值.

Date: 另一种处理是~~在~~在 f 上加条件设法消去奇性.
Place:
Reminders

如果 $S_N(x)\to s$, ~~$\lim\limits_{N\to\infty}|S_N(x)-s|\to 0$~~. 考虑

$$S_N(x) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+y)+f(x-y)-2s\right)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

根据 Riemann-Lebesgue 引理. 只要

$$\frac{f(x+y)+f(x-y)-2s}{\sin\frac{t}{2}}$$ 是 Riemann 可积或广义 Riemann 可积

的. 就有 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x) = x$. 这就是 Dini 判别法.

定理(Dini) 设 $f\in R(S^1)$. $x\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$. 定义

$$\varphi(y) = f(x+y)+f(x-y)-2s$$

若存在 $\delta>0$ 使 $\varphi(y)/y$ 在 $[0,\delta]$ 上广义 R 可积且广义绝对 R 可积. 则有 $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x) = s$.

证明：

$$S_N(x) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\frac{\varphi(y)}{\sin\frac{y}{2}}\sin(N+\tfrac{1}{2})y\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}(\cdots)\sin(N+\tfrac{1}{2})y\,dy$$

第二个积分 $\to 0$. 对于第一个积分. 因为 $\frac{\varphi(y)}{y}$ 可积. 所以

$$\frac{\varphi(y)}{\sin\frac{y}{2}} = \frac{\varphi(y)}{\frac{y}{2}} + \varphi(y)\left(\frac{1}{\sin\frac{y}{2}} - \frac{1}{\frac{y}{2}}\right)$$ 也可积，再由 R-L

引理，$S_N(x)\to s$ $\square$

Date:
Place:
Reminders

推论：若 f 在点 x_0 处左右极限都存在，且满足如下局部Hölder条件：$\exists \delta>0,\ L>0,\ \alpha\in(0,1]$ s.t.

$\forall\ y\in(0,\delta)$,
$$|f(x+y)-f(x_0+)|<Ly^\alpha$$
$$|f(x-y)-f(x_0-)|<Ly^\alpha.$$

则 $S_N(x)\to\frac{1}{2}\big(f(x_0+)+f(x-)\big)$

证明：
$$\left|\frac{\varphi(y)}{y}\right|=\left|\frac{f(x+y)+f(x-y)-f(x+)-f(x-)}{y}\right|$$
$$\le Ly^{\alpha-1}+Ly^{\alpha-1}=\frac{2L}{y^{1-\alpha}}\qquad 0<y\le\delta.$$

右边是L可积的，所以收敛。 □.

推论：i) 若 f 在 x_0 处连续，且左右导数 $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ 都存在，则 $S_N(x_0)\to f(x_0)$.

ii) 若 f 在 x_0 处左右极限存在，且两个广义左右导数
$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+)}{t},\quad \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-)}{-t}\ 存在.$$

则 $S_N(x_0)\to\frac{1}{2}\big(f(x_0+)+f(x_0-)\big)$.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

定义：$f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 叫分段可微的，若存在 $[a,b]$ 的分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，使得在任意一 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ 上 $g_i(x)=\begin{cases} f(x_{i-1}+) & x=x_{i-1} \\ f(x) & x\in \mathring{I}_i \\ f(x_i-) & x=x_i \end{cases}$ 都是可微的.

推论：iii) 若 f 分段可微，则 $S_N(x_0)\to\frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-))$

iv) ⋯，且 f 在 x_0 处连续，则 $S_N(x_0)\to f(x_0)$.

v) 若 $f\in C^1[-\pi,\pi]$，则 $S_N(x)\to f(x)$.

§11.5 一些应用.

1. 等周不等式. 设 $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$，$t\mapsto(x(t),y(t))$ 是一个分段光滑简单闭曲线. 不妨设参数已选为弧长参数. 即 $x'(t)^2+y'(t)^2=1$

于是 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x'(t)^2+y'(t)^2)dt=1$. x,y 都是连续且分段 C^1 的，所以 Fourier 级数收敛. 设 $x\sim\sum a_ne^{int}$，$y\sim\sum b_ne^{int}$，

则 $x'\sim\sum a_nine^{inx}$，$y'\sim\sum b_nine^{int}$，于是

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x'^2+y'^2dt=\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2(|a_n|^2+|b_n|^2)=1$. 另一方面，

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

γ所围曲线的面积可写为

$$A=\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\left(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right)dt\right|=\pi\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\left(a_n\bar{b}_n-b_n\bar{a}_n\right)\right|$$

$$\le \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)=\pi.$$

取等号的条件：能 $n=0$ 或 1. 不写 $\cancel{a_n\bar{b}_n-b_n\bar{a}_n=|a_n|^2+|b_n|^2}$

$x(t)=a_{-1}e^{-it}+a_0+a_1e^{it}$. $y(t)=b_{-1}e^{-it}+b_0+b_1e^{it}$.

其中 $\bar{a}_{-1}=a_1$, $\bar{b}_{-1}=b_1$ 另外 $|a_1|^2+|b_1|^2=\frac{1}{2}$

不等式 $|a_1\bar{b}_1-b_1\bar{a}_1|\le 2|a_1||b_1|\le |a_1|^2+|b_1|^2$.

$|a_1|=|b_1|=\frac{1}{2}$. 设 $a_1=\frac{1}{2}e^{i\theta}$. $b_1=\frac{1}{2}e^{i\varphi}$

则 $|\sin(\theta-\varphi)|=1$. $\Rightarrow \theta-\varphi=(k+\frac{1}{2})\pi$. 由此可得

$$x(t)=a_0+\cos(t+\theta).\quad y(t)=b_0\pm\sin(t+\theta).$$

即γ为这里一个圆（这个证明由 Hurwitz 给出）.

2. Weyl等分布定理.

Date:
Place:
Reminders

显然 $\langle x\rangle \in [0,1)$

~~设 $x\in\mathbb{R}$. 记 $\{x\} = x-[x]$. 即 x 的小数部分. 对于数列 $\{x_n\}$, 它的小数部分构成另一个数列 $\{\langle x_n\rangle\}$, 若 $\{x_n\}$ 在 $[0,1)$ 中的分布从某种意义上说是均匀的(见后). 我们就说 x_n~~

考虑数列 $\{x_n\}$, 其中每个 $x_n \in [0,1)$. 若它们的"分布"从某种意义(见后)上是均匀的, 我们就称 $\{x_n\}$ 是等分布的. 对任一数列 $\{x_n\}$, 可构造它的小数部分构成的数列 $\{\langle x_n\rangle\}$, 其中 $\langle x\rangle = x-[x]$, 接下来可以问它是否是等分布的. 特别地, 设 $\gamma\in\mathbb{R}$, $x_n = n\gamma$. Weyl 等分布定理就是关于 $\{\langle n\gamma\rangle\}$ 的分布性质. 显然, 当 $\gamma\in\mathbb{Q}$ 时 $\{\langle n\gamma\rangle\}$ 只能有有限多个点, 无论从何种意义上说都不是均匀的. 所以我们假设 $\gamma\notin\mathbb{Q}$. 于是 $\forall n,m\in\mathbb{Z}$, $\langle n\gamma\rangle \neq \langle m\gamma\rangle$.

在继续之前, 先来讨论一下周期不是 2π 的周期函数的 Fourier 级数. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是一个周期为 $2l$ $(l>0)$ 的函数. 我们可定义一个 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $t\mapsto f(\frac{lt}{\pi})$, 于是 g 是周期为 2π 的函数. 假设 f 在任意闭区间上可积(于是 g 也是), 我们可写出 g 的 Fourier 级数

$$g(t)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int},\quad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}\,dt$$

将 $t=\frac{\pi x}{l}$ 代入得

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$f(x)\sim\sum c_n e^{\frac{i\pi x}{l}}$, $c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{n\pi i x}{l}}dx$

这就是周期为2l的函数的Fourier级数. 它的各种收敛性与周期为2π的Fourier级数没有本质区别.

回到Weyl定理. 函数 $\langle\ \rangle: \mathbb{R}\to[0,1)$ 显然是（以1为）周期的

对于这样函数 $f(x)\sim\sum c_n e^{2\pi i x}$, $c_n=\int_{-1}^{1} f(x)e^{-n\pi i x}dx$.

我们来定义什么叫等分布性.

定义: $\{x_n\}\subseteq[0,1]$ 叫等分布的. 如果对 $\forall (a,b)\subseteq[0,1)$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\#\{1\le n\le N \mid x_n\in(a,b)\}}{N}=b-a$$

定理(Weyl) 设 $\gamma\notin\mathbb{Q}$. $x_n=\langle n\gamma\rangle$, 则 $\{x_n\}$ 是等分布的.

为证明它. 我们要设法处理等分布定义中的极限函数.

$\#\{1\le n\le N \mid \langle n\gamma\rangle\in(a,b)\}=\sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(\langle n\gamma\rangle)$, 其中 $\chi_{(a,b)}$ 是

区间(a,b)的指示函数: $\chi_{ab}(x)=\begin{cases}1 & x\in(a,b)\\ 0 & x\notin(a,b)\end{cases}$

我们可以把 χ_{ab} 做周期延拓(周期为1), 即

Date:
Place:
Reminders

$\chi_{[a,b)+\mathbb{Z}}(x) := \chi_{[a,b)}(\langle x\rangle)$. (为以下书写简单起见，仍记 $\chi_{[a,b)+\mathbb{Z}}$ 为 $\chi_{[a,b)}$) 于是

$\#\{1\le n\le N \mid \langle n\gamma\rangle \in [a,b)\} = \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b)}(n\gamma)$ 所求证的等式则变成

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b)}(n\gamma) \to b-a = \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x)\,dx \quad N\to\infty$$

(若将 x 视为空间变量，n 视为时间变量，上式表明当 $N\to\infty$ 时，时间平均趋向于空间平均，这在动力系统理论中称为遍历性)

引理：设 $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是周期为1的连续函数，$\gamma\notin\mathbb{Q}$.
则 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \to \int_0^1 f(x)\,dx$，当 $N\to\infty$ 时.

证明：① 我们首先证明当 $f=e^{2\pi i kx}$ ($k\in\mathbb{Z}$) 时结论成立. 若 $k=0$，则 $1\to 1$，显然是对的. 若 $k\neq 0$，积分为零. 而

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma)\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (\underbrace{e^{2\pi i k\gamma}}_{\omega})^n\right| = \left|\frac{\omega}{N}\frac{1-\omega^N}{1-\omega}\right| \le \frac{C}{N} \to 0.$$

② 所求结论关于 f 是线性的，所以若对 f, g 成立，则对 $\lambda f+\mu g$ 也成立. 特别地，结论对三角多项式成立.

③ 设 f 是一般的周期1连续函数. 对 $\forall \varepsilon>0$，存在三角

Date:
Place:
Reminders

推论：数列$\{x_n\}$是等分布的，当且仅当对所有$k\neq 0$，→

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_n}\to 0,\quad 当 N\to\infty 时.$$

证明：⇒ 即引理证明中的②和③。

⇐ 只需证明对于连续周期1函数f有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\to\int_0^1 f(x)\,dx,$$ 然后取 $f(x)=e^{2\pi i k x}$ 即可。

~~由等分布定义可知结论对区间的指标函数$\chi_{(a,b)}$是成立的而连续~~

函数可由指数函数逼近（见Ex可以推论的证明）. □

例：① 对$a\neq 0$, $0<b<1$, $\langle a n^b\rangle$是等分布的.

② 对$a\neq 0$. $\langle a\log n\rangle$不是等分布的.

③ 对$\gamma\notin\mathbb{Q}$. $\langle n^2\gamma\rangle$是等分布的. 下面证明

Date:
Place:
Reminders

多项式P满足$\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 由①②

存在N s.t. $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(n\gamma)-\int_0^1 P(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(n\gamma)-\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|f(n\gamma)-P(n\gamma)|$$

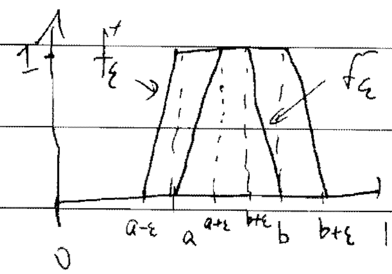
$$+\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(n\gamma)-\int_0^1 P(x)dx\right|+\int_0^1|P(x)-f(x)|dx$$

$$<\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\int_0^1\frac{\varepsilon}{3}dx=\varepsilon.\quad\square$$

定理的证明：任取$\varepsilon>0$（充分小的），构造函数$f_\varepsilon^{\pm}(x)$（如图）

则 $f_\varepsilon^-(x)\le\chi_{(a,b)}(x)\le f_\varepsilon^+(x)$

且 $\chi_{(a,b)}(x)\neq f_\varepsilon^{\pm}(x)$ 的部分是两个长度为ε的区间，于是其总长度$=2\varepsilon$.



根据梯形面积公式 $\int_0^1 f_\varepsilon^+(x)dx=\frac{1}{2}((b-a)+(b-a+2\varepsilon))=b-a+\varepsilon$,

$\int_0^1 f_\varepsilon^-(x)dx=\frac{1}{2}((b-a-2\varepsilon)+(b-a))=b-a-\varepsilon$. 另一方面，由

$f_\varepsilon^-\le\chi_{(a,b)}\le f_\varepsilon^+$可知

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_\varepsilon^-(n\gamma)\le\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{(a,b)}(n\gamma)}_{记为S_N}\le\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_\varepsilon^+(n\gamma)$$

放到 取极限后

④ Hardy–Littlewood 证明 对几乎所有 $x>1$, $\langle x^n\rangle$ 是等分布的. 例外的点包括 $x=1+\sqrt{2}$, $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 等. 哪些点是等分布的则更难确定.

例如 $x=\frac{3}{2}$. $\{\langle(\frac{3}{2})^n\rangle\}$ 这个数列出现在很多问题中, 有一个猜想说

$$\langle(\tfrac{3}{2})^n\rangle < 1-(\tfrac{3}{4})^n.$$

至今尚未解决. 如果能证明这个不等式, 则数论中的 Waring 问题则可彻底解决. 具体地说, 任何自然数 m 可写成 $g(n)$ 个正整数的 n 次方和. 其中 $g(n) = 2^n+\left[(\frac{3}{2})^n\right]-2$.

例如 $n=2$ 时, $g(2)=4$. 这就是 Lagrange 四平方定理.

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(k\gamma). \quad \Longrightarrow$$

当 $N\to\infty$ 时, 左右两边的和式趋向于它们的积分. 于是有

$$b-a-\varepsilon \le \varliminf_{N\to\infty} S_N \le \varlimsup_{N\to\infty} S_N \le b-a+\varepsilon.$$ 再令 $\varepsilon\to 0$ 即可. □

推论: 设 f 是周期为 1 的 Riemann 可积函数. 则上述定理的结论对 f 仍成立.

证明: 对 $\forall \varepsilon>0$, 存在 $[0,1]$ 的分割 P 使得 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

$$\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon.$$

定义两个函数 $f^+(x)=M_i$ (若 $x\in I_i$) $f^-(x)=m_i$ (若 $x\in I_i$).

于是 $\overline{S}(f,P)=\int_0^1 f^+(x)dx$. $\underline{S}(f,P)=\int_0^1 f^-(x)dx$. 且 $f^-(x)\le f(x)\le f^+(x)$.

另一方面 $f^+(x)=\sum_{i=1}^{n} M_i\chi_{I_i}(x)$. $f^-(x)=\sum_{i=1}^{n} m_i\chi_{I_i}(x)$.

由 Weyl 定理, 及结论的线性性, 有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f^+(k\gamma) \to \int_0^1 f^+(x)dx=\overline{S}(f,P). \quad N\to\infty.$$

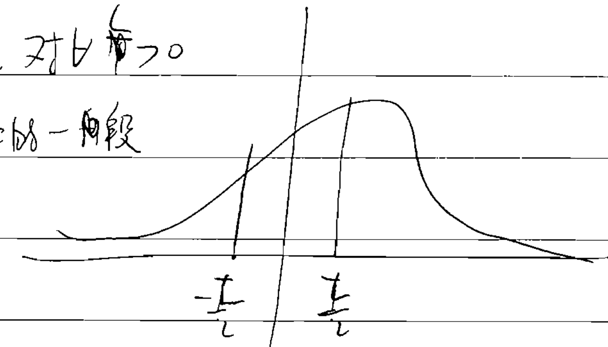
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f^-(k\gamma) \to \int_0^1 f^-(x)dx=\underline{S}(f,P) \quad N\to\infty.$$

所以 $\underline{S}(f,P) \le \varliminf_{N\to\infty} S_N \le \varlimsup_{N\to\infty} S_N \le \overline{S}(f,P)$, 再令 $\varepsilon\to 0$ 即可. □

§11.6 $\mathbb{R}$上的Fourier变换

Fourier变换是Fourier级数的连续类比. 考虑 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是一个足够好的函数. 对 $L>0$.

我们可以将 f 在 $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ 上的一段截下来, 做周期延拓, 再考虑它的Fourier级数



$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i \frac{n}{L}x}, \quad c_n=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)e^{-2\pi i \frac{n}{L}x}dx.$$

若将 $L\to 0$. 并设 $n/L=\xi$ 保持不动. 则

$$L\cdot c_n \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx =: \hat{f}(\xi).$$

$$f(x)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\overset{\approx d\xi}{\frac{1}{L}} \approx \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi.$$

所以问题就是, 当 f 是什么样的函数时上面的约等号可以改成等号.

~~定义: ① 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 满足广义积分 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ 和 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx$ 都存在, 则~~

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

定义：① 记在 $\mathbb{R}$ 上广义 R 可积且广义绝对 R 可积的复值函数的全体为 $|R|(\mathbb{R})$，或简记为 $|R|$.

② 对于 $f\in|R|$，定义 $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx.$$

称为 f 的 Fourier 变换（由 $|R|$ 的定义可知 $\hat{f}(\xi)$ 是处处有定义的.）

定理：对于 $\forall f\in|R|$，$\hat{f}(\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续

证明：由绝对可积性，对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists A>0$ s.t.

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|<\frac{\varepsilon}{6},\quad \int_{A}^{+\infty}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{6}.$$

记 $\int_{-A}^{A}|f(x)|dx=B$. 注意 $e^{-2\pi iy}$ 对于 $y\in\mathbb{R}$ 一致连续. 所以存在 $\delta_0>0$ 使得当 $|y_1-y_2|<\delta_0$ 时，有

$$\left|e^{-2\pi iy_1}-e^{-2\pi iy_2}\right|<\frac{\varepsilon}{3B}.$$ 现在取 $\delta=\delta_0/A$ 得当

$|\xi_1-\xi_2|<\delta$ 时，有 $|\xi_1x-\xi_2x|\le|\xi_1-\xi_2|\cdot|x|\le\delta\cdot A=\delta_0$ ($x\in[-A,A]$). 得

$$\left|e^{-2\pi i\xi_1x}-e^{-2\pi i\xi_2x}\right|<\frac{\varepsilon}{3B}.$$ 所以

$$\left|\hat{f}(\xi_1)-\hat{f}(\xi_2)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)\left(e^{-2\pi i\xi_1x}-e^{-2\pi i\xi_2x}\right)dx\right|$$

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

$$< 2\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|dx + \int_{-A}^{A}|f(x)|\,|e^{-2\pi i\xi_1 x} - e^{-2\pi i \xi_2 x}|dx + 2\int_A^{+\infty}|f(x)|dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3B}\cdot B + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$

③ 记 $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的一致连续函数全体为 $UC(\mathbb{R})$（或 UC）

性质：① $\hat{\ }: |R| \to UC$ 是线性的

② 设 $g(x) = f(x-x_0)$，则 $\hat{g}(\xi) = e^{-2\pi i x_0 \xi}\hat{f}(\xi)$

③ 设 $g(x) = e^{2\pi i \xi_0 x} f(x)$，则 $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi-\xi_0)$.

④ 设 $a\in\mathbb{R}$，$a\neq 0$，$g(x) = f(ax)$，则 $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$

⑤ 设 $g(x) = \overline{f(x)}$，则 $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

⑥ $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.　⑦ 当 $|\xi|\to\infty$ 时 $\hat{f}(\xi)\to 0$.

⑧ $|\hat{f}(\xi)| \le \int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx$.　~~⑨ 若 $f^{(k)}\in|R|$，则 $\hat{f}(\xi) \to o(\xi^k)$ $|\xi|\to\infty$~~

~~⑩ 若 $f^{(k)}\in|R|$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$，则 $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^k \hat{f}(\xi)$~~

~~⑪ 若 $x^k f \in |R|$，则 $\hat{f}^{(k)}(\xi) = \widehat{(-2\pi i x)^k f(x)}$~~

证明：①②③④⑤⑥ 显然。⑦ Riemann-Lebesgue 引理.

⑧ 显然. ~~⑨，⑩，⑪ 下证⑪~~. $\square$

Date:
Place:

Reminders

③ $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{h^2 + x^2}$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{h}{h^2+x^2} \cos(2\pi \xi x)\, dx = e^{-2\pi h|\xi|}$$

④ $f(x) = e^{-2\pi h|x|}$.

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{h^2+\xi^2}.$$

Date:
Place:

Reminders

例：① $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i \xi x} dx = \left(\frac{e^{-2\pi i \xi x}}{-2\pi i \xi} \right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-e^{-2\pi i \xi} + e^{2\pi i \xi}}{+2\pi i \xi} = \frac{1}{\pi \xi} \sin(2\pi\xi).$$

② $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. （这个 f 不在 L^1 中 也可做傅氏变换）.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x \cos(2\pi\xi x)}{2x} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x \sin 2\pi \xi x}{2x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}(1-2\pi\xi) + \operatorname{sgn}(1+2\pi\xi) \right)$$

$$= \begin{cases} \pi & |\xi| < \frac{1}{2\pi} \\ 0 & |\xi| > \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

⑤ $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi \xi x)\, dx$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{4\pi^2 \xi^2}{4\pi}} = e^{-\pi\xi^2}.$$

Date:
Place:
Reminders

设必要如此早地引进 Shwartz空间.
(以下将参照 Stein & Weiss 的 1.1 节处
理 L^1 的 Fourier 变换理论.

P62–P66 作废.

等价的写法: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|\partial_x^k (x^l f(x))\right| < +\infty$ →

Date:
Place:
Reminders

这些例子表明 一般的 $\hat{\ }: L^1(\mathbb{R}) \to UC$ 的结果可能不在 $L^1(\mathbb{R})$ 里. 于是无法谈论反变换 $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$. 为此, 我们应考虑 $L^1(\mathbb{R}) \cap UC$ 的一个子空间, 使得 $\hat{\ }$ 是这个空间上的一个线性变换. 在我们现有的知识水平下, 这个子空间可取为 Schwartz空间. (在更高级的课程中可取为 $L^2(\mathbb{R})$).

定义: ① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 叫速降的 (或 写一个 Schwartz函数), 如果它任意次可导, 且对 $\forall k, l\in\mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^k f^{(l)}(x)\right| < +\infty.$$

② 速降函数的全体记为 $S(\mathbb{R})$ 或 S.

性质: ① S 是线性空间, 且 $S \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap UC$.
② 若 $f\in S$, 则 $f'\in S$.
③ 若 $f\in S$, 则 $xf(x)\in S$.

在前面的例子中 ①②③④ 都不属于 S, 但⑤属于.

引理: 若 $f\in S$, 则 $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^k \hat{f}(\xi)$,

$\widehat{x^k f}(\xi) = (-2\pi i)^{-k} \hat{f}^{(k)}(\xi)$.

没必要如此早地引进 Shwartz空间.
以下将参照 Stein & Weiss 的 1.1 节处理 L^1 的 Fourier 变换理论.

P62-P66 作废.

等价的写法: $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\partial_x^k (x^l f(x))\right| < +\infty$ →

这些例子表明 一般的 $\hat{}: L^1(\mathbb{R}) \to UC$ 的结果可能不在 $L^1(\mathbb{R})$ 里. 于是无法谈论反变换 $\int_{\mathbb{R}} \hat f(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$. 为此, 我们应考虑 $L^1\cap UC$ 的一个子空间, 使得 $\hat{}$ 是这个空间上的一个线性变换. 在我们现有的知识水平下, 这个子空间可取为 Schwartz空间. (在更高级的课程中可取为 $L^2(\mathbb{R})$).

定义: ① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 叫速降的 (或一个Schwartz函数), 如果它任意次可导, 且对 $\forall k,l\in\mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)| < +\infty.$$

② 速降函数的全体记为 $S(\mathbb{R})$ 或 S.

性质: ① S 是线性空间, 且 $S\subseteq L^1\cap UC$.
② 若 $f\in S$, 则 $f'\in S$.
③ 若 $f\in S$, 则 $xf(x)\in S$.

在前面的例子中 ①②③④ 都不属于 S, 但⑤属于.

引理: 若 $f\in S$, 则 $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^k \hat f(\xi)$,

$$\widehat{x^k f}(\xi) = (-2\pi i)^{-k} \hat f^{(k)}(\xi).$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

推论：若 $f\in S$，则 $\hat{f}\in S$.

证明：因为 Fourier 变换及逆变换不变 S. □

有了这个推论，我们就可以在 S 上考虑 $\hat{}$ 的运算。之前的性质④和例子⑤有以下推论.

引理：① 设 $\delta>0$. $K_\delta(x)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$，则 $\hat{K_\delta}(\xi)=e^{-\pi\delta\xi^2}$.

② $\int_{\mathbb{R}}K_\delta(x)dx=1$.

③ $\int_{\mathbb{R}}|K_\delta(x)dx|<+\infty$.

④ $\forall\eta>0$ $\int_{|x|>\eta}|K_\delta(x)|dx\to 0$. $\delta\to 0$.

所以 $\{K_\delta(x)\}_{\delta\in(0,1)}$ 构成一族好核.

定义：设 $f,g\in S$，定义它们的卷积为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy.$$

推论：设 $f\in S$，则当 $\delta\to 0$ 时 $f*K_\delta$ 一致收敛到 f.

证明：现在积分区域是整个 $\mathbb{R}$，所以之前的结论不能直接用。

① 首先证 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。因为速降，所以存在 $A>0$

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

使得当$|x|>A$时 $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$，于是当 $x,y>A$（或 $x,y<-A$）时，

$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 考虑 $f|_{[A-1,A+1]}$. 因为连续，~~等~~ 所以一致

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta$ $(0<\delta<1)$ s.t. $\forall x,y\in[A-1,A+1]$ $|x-y|<\delta$. 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$

现在对$\forall x,y\in\mathbb{R}$. 若$x<-A-1$(则 $y<-A$) 或 $x>A+1$(则$y>A$)

或$-A\le x\le A$ (则$-A-1<y<A+1$)时. 直接

$-A-1\quad -A\qquad\qquad A\quad A+1$

有 $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

若 $x\in[A,A+1]$ y有可能$>A+1$. 取 $z=A+1$. 于是

$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. $x\in[-A-1,-A]$ 同理.

所以f一致连续

② 对$\forall\varepsilon>0$ 按①中方法取η;

$$\left|f*K_\delta(x)-f(x)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}}K_\delta(y)\left[f(x-y)-f(x)\right]dy\right|$$

$$\le\left(\int_{|y|>\eta}+\int_{|y|<\eta}\right)K_\delta(y)\left|f(x-y)-f(x)\right|dy.$$

~~由好核性质 iii) 且f的有界性 可知第一个积分趋于0. 可以~~

设 $|f(x)|\le M$. 则

$$\int_{|y|>\eta}K_\delta(y)\left|f(x-y)-f(x)\right|dy<2M\cdot O(\varepsilon).$$

$$\int_{|y|\le\eta}K_\delta(y)\left|f(x-y)-f(x)\right|dy<\varepsilon.$$

□

Date:
Place:

Reminders

~~下面可以证~~

引理：设 $f, g \in S$，则 乘法公式.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, g(y)\,dy$$

证明：即证

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi i xy}\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i xy}\,dx\right)dy.$$

这两个积分显然满足含参变积分的换序条件，所以结论成立 □

定理：设 $f \in S$，则

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x}\,d\xi.$$

证明：首先证明 $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,d\xi$. 令 $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$.

于是 $\hat{G}_\delta(\xi) = K_\delta(\xi)$，由乘法公式

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,G_\delta(\xi)\,d\xi.$$

当 $\delta \to 0$ 时，左边的极限为 $f(0)$，

而 $G_0 = 1$，所以右边的积分为 $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,d\xi$.

更一般地，定义 $F(y) = f(x+y)$，于是

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi. \quad \square$$

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

进一步的性质:

① 设 $f \in L(\mathbb{R})$，则 $\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$ 作为含参变量积分对于 $\xi\in\mathbb{R}$ 一致收敛. (Weierstrass).

② 若 $f\in L(\mathbb{R})$. $xf\in L(\mathbb{R})$. 则 $\hat{f}(\xi)$ 是可导的且

$$\hat{f}'(\xi) = (-2\pi i)\,\widehat{xf}(\xi).$$

证明: 记 $F(x,\xi)=f(x)e^{-2\pi i x\xi}$. 则 $\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} F(x,\xi)dx$

F 显然对 ξ 可导. $\frac{\partial F}{\partial \xi}=(-2\pi i)\,x f(x) e^{-2\pi i x\xi}$. 因为 $xf\in L(\mathbb{R})$.

所以 $\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial F}{\partial \xi}dx = -2\pi i\int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-2\pi i x\xi}dx$ 收敛. 并且由①知

收敛是一致的. 所以由含参变积分部分的有关定理知

$\hat{f}'(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial F}{\partial \xi}dx$. □

③ 首先介绍一个定义: 设 $f\in L(\mathbb{R})$. 若有 $g\in L(\mathbb{R})$, 使得

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|dx=0,$$

则称 f 在 L^1 意义下可导, 且其 L^1 的一导数为 g

④ 设 $f\in L(\mathbb{R})$ 在 L^1 意义下可导, 导数为 g. 则

Date: ......
Place: ......
Reminders

$$\hat{g}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$$

证明：即证 $\int_{\mathbb{R}} \left(g(x) - 2\pi i\xi f(x)\right) e^{-2\pi i \xi x}\, dx = 0$.

由 L^1 导数的定义，对 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall\ |h| < \delta$. 有

$\int_{\mathbb{R}} \left| g(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| dx < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是只需再看

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - 2\pi i\xi f(x)\right) e^{-2\pi i \xi x}\, dx$$

$$= \left(\frac{e^{2\pi i\xi h}-1}{h} - 2\pi i \xi\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i\xi x}\, dx}_{\hat{f}(\xi)}$$

若 $\hat{f}(\xi) = 0$. 则无需再证什么；若 $\hat{f}(\xi) \neq 0$. 记 $M = |\hat{f}(\xi)| > 0$.

则存在 h_0, 使 $\left|\frac{e^{2\pi i\xi h_0}-1}{h_0} - 2\pi i \xi\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$. 于是

$\left|\int_{\mathbb{R}} \left(g(x) - 2\pi i\xi f(x)\right) e^{-2\pi i\xi x}\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 所以等式成立. □

② ④ 可以很容易地推广到高阶导数的情况.

~~下面考虑 Fourier 积分的收敛性. 与之前考虑 Fourier 级数时类似. 我们也可以引进广义求和法证明类似~~

续~~卷积性质~~：前页

定理(乘法公式) 设 $f, g \in L(\mathbb{R})$，则

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx$$

证明：即证 $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y} dy\right) g(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i x y} dy\right) f(x)\,dx.$$

这实际上广义积分的交换性。因为 f, g 都是绝对收敛的。所以一致收敛性和绝对可积条件都是显然的。□

(这里实际和卷积没关系)

乘法公式中的积分是收敛的。因为 $\hat{f}, \hat{g}$ 都有界。所以 $\hat{f} \cdot g$ 和 $f \cdot \hat{g}$ 的敛散性与 g, f 相同。

转右页。

~~Fejér定理的证明然后再把它应用到均匀收敛性上。为此首先需引进卷积，并证明其性质。~~

一定理

定义：设 $f, g \in L(\mathbb{R})$ 定义 $f * g(x)$（其值）

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\,dy$$

则 $h \in L(\mathbb{R})$

证明：$\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |h(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\,dy\right| dx$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\,dx\right) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad \square$$

卷积的线性性、交换性、结合性都可由绝对广义R可积简单地推出。另外，如下性质也可推出。因为它十分重要，所以写一下：

定理：设 $f, g \in L(\mathbb{R})$，则

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi).$$

(~~转左看~~)

Date:
Place:

Reminders

$\Phi_A(x) = e^{-2\pi|x|}$ 或 $\Phi_G(x) = e^{-4\pi^2 x^2}$. $\longrightarrow$

不因子是为了和 $e^{2\pi i\xi x}$ 中的不相配，使最终结果好看一些.

Date:
Place:

Reminders

接下来可以考虑重新求和法了. 我们的出发点是 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 的 $\hat f$. 由之前的结果 $\hat f$ 应该是有界一致连续函数. 我们的问题是 $\int_{\mathbb{R}} \hat f(\xi) e^{2\pi i\xi x}$ 是否收敛到 $f(x)$. 一般来说这个积分是比较坏的. 但是因为 $\hat f$ 的性质, 它也不会特别坏. 例如, 若引入收敛因子适当的, 如 $e^{-\varepsilon|x|}$ 或 $e^{-\varepsilon x^2}$. 则因为 $\hat f$ 有界, 所以积分是绝对收敛.
接下来的问题就是当 $\varepsilon \to 0$ 时结果是否收敛到 f.

定义: 设 $\Phi \in C(\mathbb{R})$ 且 $\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=0$, $\Phi(0) = 1$. 记

$$M_{\varepsilon,\Phi}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\Phi(\varepsilon x)\,dx$$

若 $\lim_{\varepsilon\to 0} M_{\varepsilon,\Phi}(f) = A$. 则称(发散)广义积分 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ 在 Φ 平均的意义下收敛到 A.

以下我们经常取 ~~$\Phi_A(x) = e^{-|x|}$ 或 $\Phi_G(x) = e^{-x^2}$~~.

引理: 设 $f, \Phi \in L^1(\mathbb{R})$, $\varphi = \hat\Phi$, $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 则对 $\varepsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \hat f(x) e^{2\pi i x y}\,\Phi(\varepsilon x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dx.$$

证明: 乘积公式和性质③④的应用.

Date:

Place:

Reminders

注意 φ^A 和 φ^G 都是偶函数. 于是前一引理→

右边可写为 $f * \varphi_\varepsilon(y)$.

$\omega(y)$ 显然满足 $0 \le \omega(y) \le 2\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$. →

把这条单独做一个引理更好 →

Date:

Place:

Reminders

引理: 设 $\varphi^A = \widehat{\Phi}^A$, $\varphi^G = \widehat{\Phi}^G$ 则

$$\varphi^A(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \quad \varphi^A_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2} \quad (\text{Poisson})$$

$$\varphi^G(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \quad \varphi^G_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}\,\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon^2}} \quad (\text{Gauss})$$

且 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi^A_\varepsilon(x)\,dx = 1$. $\int_{\mathbb{R}} \varphi^G_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

(条件较前进一步假设)

定理 设 $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. ~~对 $\varepsilon>0$ 定义 $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$~~

~~若 $f \in L^1$~~. 则 $\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_1 \to 0$, $\varepsilon \to 0^+$. 即

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} |(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)|\,dx = 0.$$

证明: $\int_{\mathbb{R}} |(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy - f(x) \right| dx$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,dx \right) |\varphi_\varepsilon(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}} \omega(\varepsilon y)\,|\varphi(y)|\,dy.$$

定义 $\omega(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\,dx$. 下面先证

$\lim_{y \to 0} \omega(y) = 0$. 首先 若 f 连续 且 $\operatorname{supp}(f)$ 是紧的,

不妨设 f 仅在 (a,b) 上非零,

若 $h(a)=h(b)=0$ 则任选连续延拓 不必 $\rightarrow$

再选 δ. 若 $h(a).\ h(b)$ 中有一个非零, 选

$$\delta = \frac{2\varepsilon}{3(|h(a)|+|h(b)|)}$$

不妨设 $\delta<1/2$

因为连续 所以一致连续 所以对 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.t.

当 $|y|<\delta$ 时 有 $|f(x-y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a+1}$ 于是有

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)-f(x)|\,dx \le \int_{a-\delta}^{b+\delta}\frac{\varepsilon}{b-a+1}\,dx \le \varepsilon.$$

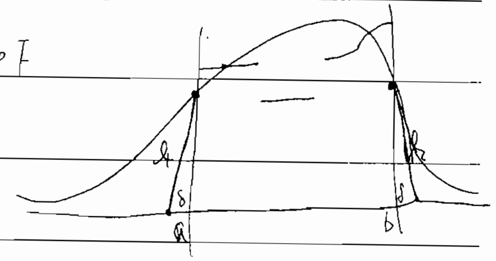
其次 我们证明 对 $\forall f\in L(\mathbb{R})$, $\forall\varepsilon>0$ 存在一个连续紧支函数 g

使 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon$. 因为 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx<+\infty$ 对 $\varepsilon>0$

存在 $a<b$ 使 $\left(\int_{-\infty}^{a}+\int_{b}^{+\infty}\right)|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}$. 在 $[a,b]$ 上可找

一连续函数 h 满足 $\int_a^b|f(x)-h(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}$

最后 选一 $\delta>0$, 并构造 $g(x)$ 如下



$$g(x)=\begin{cases}0 & x\le a-\delta\\ \text{线段 } l_1 & a-\varepsilon\le x\le a\\ h(x) & a\le x\le b\\ \text{线段 } l_2 & b\le x\le b+\varepsilon\\ 0 & x\ge b+\varepsilon\end{cases}$$ 则

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{a}|f(x)|\,dx+\delta\cdot\frac{1}{2}(|h(a)|+|h(b)|)+\int_a^b|f(x)-h(x)|\,dx+\int_b^{+\infty}|f(x)|\,dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

最后, $|f(x-y)-f(x)|\le|f(x-y)-g(x-y)|+|g(x-y)-g(x)|+|g(x)-f(x)|$ 即可证明

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$\lim\limits_{y\to 0}\omega(y)=0$. 回到定理的证明, 即证

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\omega(\varepsilon y)|\varphi(y)|\,dy=0.$$

注意 在任意 $[a,b]$ 上, $|\varphi(y)|$ 连续, 因而有界, 于是

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon y)|\varphi(y)|$ 对 $y\in[a,b]$ 一致地趋于零

另一方面, 因为 ω 有界 所以 积分 $\int_{\mathbb{R}}\omega(\varepsilon y)|\varphi(y)|\,dy$ 对 $\varepsilon>0$ 一致收敛 (直接把 ω 放掉即可) 所以由书中某定理

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\omega(\varepsilon y)|\varphi(y)|\,dy=\int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon y)\right)|\varphi(y)|\,dy=0.$$

$\square$.

推论: 记 $A_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\hat{\Phi}^{A}(\varepsilon\xi)\,d\xi$.

$$G_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\hat{\Phi}^{G}(\varepsilon\xi)\,d\xi.$$

则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|A_\varepsilon(x)-f(x)\|_1=0$. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|G_\varepsilon(x)-f(x)\|_1=0$.

(注: 若引入好核定义的第3条性质, 并假设 f 有界, 则可证明 $f*\varphi_\varepsilon$ 在连续点处收敛到 f)

Date:
Place:

Reminders

~~均匀收敛性在Riemann积分下不容易~~
~~第一个引理就证不出来，算了.~~

~~用之前证 L^1 收敛的办法可直接证 L^p 收敛~~
~~只要用一下积分的Minkowski不等式即可. L^2 时即 Cauchy-Schwarz~~
~~不等式. 难的是 $\|f\|_2=\|\hat f\|$, 麻烦的是 $\mathbb{R}^2$ 不完备.~~
~~之前证的是更均的 L^1 收敛~~

Date:
Place:

Reminders

推论: 若还知 $\hat f \in |R|$. 则

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat f(\xi)e^{2\pi i\xi x}dx \quad (a.e.)$$

证明: 设 $A(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat f(\xi)e^{2\pi i\xi x}dx$. 首先可以证明 $\lim_{\varepsilon\to0^+}A_\varepsilon(x)=A(x)$. 其次可证明 $\lim_{\varepsilon\to0^+}\|A_\varepsilon(x)-f(x)\|_1=\|A(x)-f(x)\|_1$.

于是由前一推论可知 $\|A(x)-f(x)\|_1=0$. 所以若 A. f 都在 x_0 连续, 则 $A(x_0)=f(x_0)$ ~~$A(x)=f(x)$~~

A 本身是连续的 而 f a.e. 连续. 所以 $A=f$ a.e. □

推论: 若 f 连续 $\hat f\in|R|$. 则 $f(x)=A(x)$

推论: $f_1, f_2\in|R|$. 若 $\hat f_1=\hat f_2$. 则 $f_1=f_2$ a.e.

对 Fourier 积分亦可考虑逐点收敛性. 也有 Dirichlet 核. Dini定理. Hölder条件. 分段光滑等结论. 因为与级数部分差不多. 我们就不重复了 ~~下面考虑一致收敛性~~.

~~局部 p 可积~~

~~定义: 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. 定义~~

~~$\|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ 称为 $\mathbb{R}$ 上的 p 范数~~

~~定义~~

~~$L^p(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \mid \|f\|_p<+\infty\}$.~~

此定义亦可写为 $|\partial^l(x^k f(x))|$ 有界. →

~~引理：若 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$，则 $\|\hat f\|_2=\|f\|_2$~~

~~证明：取 $g(x)=\overline{f(-x)}$，则 $\hat g(\xi)=\overline{\hat f(\xi)}$，定义 $h=f*g$~~

~~则 $\hat h(\xi)=\hat f(\xi)\cdot\hat g(\xi)=|\hat f(\xi)|^2$，注意~~

~~$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(-x)\,dx=h(0)$. $\int_{\mathbb{R}}|\hat f(\xi)|^2d\xi=\int_{\mathbb{R}}\hat h(\xi)d\xi$.~~

~~故只需证 $h(0)=\int_{\mathbb{R}}\hat h(\xi)d\xi$，就是问 Fourier 反演公式在~~

~~$x=0$ 处是否成立 ($h(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat h(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$)~~

§11.7 Schwartz 空间与分布理论

定义：$f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 叫做 Schwartz 函数，如果对 $\forall k,l\in\mathbb{N}$，$|x^k f^{(l)}(x)|$ 有界.

~~例① Gauss 核 $f(x)=e^{-x^2}\in$~~ 记所有 Schwartz 函数构成的线性空间记为 S，称为 Schwartz 空间.

例：① $e^{-x^2}\in S$ ② $e^{|x|}\notin S$

由定义可知 $X: f\mapsto xf$ 和 $D: f\mapsto f'$ 都是 S 上的线性映射，可见对任意的 $P\in\mathbb{R}[x]$，$P(X)$ 和 $P(D)$ 也都是 S 到 S 的映射.

Date: Place: Reminders

$\hat{f}'(\xi) = (2\pi i)\, \widehat{xf}(\xi)$ $\quad \widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$ →

Date: Place: Reminders

S显然是 $\mathbb{R}$ 上的 UC 的子空间. ~~前面的~~ Fourier变换的各种性质对 S 都成立. 特别地. 我们有如下引理

引理: 若 $f\in S$. 则 $\hat{f}\in S$

证明: 只要证 $|x^k \hat{f}^{(l)}(x)|$ 有界. 这等价于

$$\left|\left(D^k(x^l f(x))\right)^\wedge\right| \text{有界}.$$

而 $D^k(x^l f(x))\in S$, 所以其Fourier变换有界. □

再由上一节的推论, 可知在 S 上 Fourier反演公式成立.

(在Stein书中亦有利用Gauss核的好核性质的证明. 即前面划掉的部分 P62–P66)

~~[illegible]~~ 定义: 对于 $f\in S$. 定义

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$ (为什么仅是?)

并简记 $\|f\| = \|f\|_2$

定理(Plancherel) 若 $f\in S$. 则 $\|f\| = \|\hat{f}\|$.

证明: 设 $g(x) = \overline{f(-x)}$. 则 $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. 设 $h = f * g$. 则

$\hat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2$ ~~且显然也是Schwartz的~~ $h\in S$, 所以有反演公式:

Date:
Place:

Reminders

$d'_{k\ell}$ 当 $\ell>0$ 时显有 kernel 的.
所以只是半范数，不是范数.
(Seminorm)

Date:
Place:

Reminders

令 $h(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{h}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$. 取 $x=0$ 得

$$\|\hat{f}\|^2=\int_{\mathbb{R}}\hat{h}(\xi)d\xi=h(0)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{f(x)}dx=\|f\|^2.$$ □.

$(S,\|\cdot\|)$ 是一个 Hermite 内积空间. 上述定理说明了是其上的西算子.

但是 $(S,\|\cdot\|)$ 在 $\|\cdot\|$ 下并不完备.

因为仅用 $\|\cdot\|$ 度量距离太单薄了. 我们下面引入更多距离.

定义: 对 $\forall k,\ell\in\mathbb{N}$. 定义

$$\rho_{k\ell}: S\to\mathbb{R}_{\geq 0},\quad f\mapsto\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^k f^{(\ell)}(x)|$$

并定义 $d'_{k\ell}: S^2\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ $(f,g)\mapsto d_{k\ell}(f,g)=\rho_{k\ell}(f-g)$.

引理: i) $d'_{k\ell}$ 都是 S 上的距离. ← ~~X~~

ii) $d_{k\ell}=\dfrac{d_{k\ell}}{1+d'_{k\ell}}$ 也是 S 上的距离. 且 $0\leq d_{k\ell}\leq 1$

不是距离. 所以也不是拓扑.

并且 $d_{k\ell}$ 与 $d'_{k\ell}$ 定义相同的拓扑.

(在 d 下开 $\Leftrightarrow$ 在 d' 下开)

Date: ....
Place: ....

Reminders

引理：$f_n \to f$（按 d）$\Leftrightarrow$ 对 $\forall k$，$f_n \to f$ 按 d_k.

证明：若 $f_n \to f$ 按 d. 注意 $d_k(f_n, f) \le 2^k d(f_n, f)$.

所以对 $\forall \varepsilon > 0$，取 N 使 $\forall n > N$ 有 $d(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2^k}$，

则有 $d_k(f_n, f) < \varepsilon$. 反之，若对 $\forall k$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_k$ s.t.

$\forall n > N_k$ 有 $d_k(f_n, f) < \varepsilon/2$ 取 K，使 $\frac{1}{2^K} < \frac{\varepsilon}{2}$，再取

$N = \max(N_1, \cdots, N_K)$. 则有

$$d(f_n, f) = \sum_{k=1}^{K} \frac{d_k(f_n, f)}{2^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{d_k(f_n, f)}{2^k}$$

$$< \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{2^K} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Date: ....
Place: ....

Reminders

iii) 先将 d_{kl} 重新编号为 $d_1, d_2, \cdots$ 然后定义

$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$. 则 d 也是 S 上良好定义的距离,

且 $0 \le d \le 1$. ~~(且 $d \neq 0 \Leftrightarrow d_n = 0 \Leftrightarrow d_{kl} = 0 \Leftrightarrow d_{kl} \neq 0$)~~

iv) 在 S 上按 d 定义开集，闭集，收敛等概念.

~~对 S 上的加法、数乘都是连续的.~~

引理：i) $+ : S \times S \to S$ 是连续的.

ii) $\cdot : \mathbb{C} \times S \to S$ 是连续的.

iii) $x : S \to S$ 是连续的.

iv) $D : S \to S$ 是连续的.

~~v) 设 $\tau_h : S \to S$, $f(x) \mapsto f(x-h)$，则 $\lim_{h\to 0} \tau_h f = f$~~

~~vi) $\lim_{h \to 0} \frac{f - \tau_h f}{h} = f'$.~~ 略

v) S 是完备的.

vii) $\mathcal{F} : S \to S$ 是同胚.

证明：i) → iv) 显然（利用左边的引理）. 下证 v). 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是

d 下的 Cauchy 列. 于是对每一对 $k, l \in \mathbb{N}$，$\{x^k f_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致范数

下的 Cauchy 列. 所以它有一致极限 f_{kl}. 显然 $f_{kl} = x^k f_{0l}$. 由

一致收敛性质，$f_{0l} = \partial^l f_{00}$. 于是 f_{00} 就是所求极限.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

vi 也是显然的 □.

定义：~~线性~~ S 上的连续线性映射 $\varphi: S \to \mathbb{C}$ 叫做（缓增）分布，所有分布构成的空间记为 S'.

例：~~① 若 $f \in S$ 定义 $\varphi_f: S \to S, g \mapsto fg$ 则 $\varphi_f \in S'$~~

① 设 $f \in \mathbb{R}$. 定义 ~~$\varphi_f: S \to S, g \mapsto fg$ 则 $\varphi_f \in S'$~~.

$$\varphi_f: S \to \mathbb{C},\quad g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)\, dx$$

φ_f 显然是线性的. 下证 φ_f 连续. 设 $g_n \to g$（按 d）

即对 $\forall k, l \in \mathbb{N}$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_{k,\varepsilon}$ s.t. $|x^k (g_n^{(l)} - g^{(l)})| < \varepsilon$.

特别地,有 $|g_n - g| < \varepsilon$. $x^2 |g_n - g| < \varepsilon$. 于是

$$|g_n - g| < \frac{2\varepsilon}{1+x^2}.\ \text{所以}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) (g_n(x) - g(x))\, dx \right| < 2\varepsilon \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+x^2}\, dx \right|$$

② 对 $x_0 \in \mathbb{R}$. $\delta_{x_0}: S \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(x_0)$ 显然是一个分布.

类似地. $f \mapsto f^{(k)}(x_0)$ 也都是分布.

~~定理：$\varphi: S \to \mathbb{C}$ 是分布 $\Leftrightarrow$ $\exists C > 0$ $\exists k, l \in \mathbb{N}$~~

$S\times S' \to SC^{\infty}$

移到后面，用于证明卷积的完備性（见 Stein & Weiss） →

$$\delta < \min\left(\frac{1}{2^{N_0+1}}, \frac{\varepsilon}{C\cdot m\cdot n\cdot 2^{N_0+1}}\right).$$ →

定理：线性映射 $\varphi: S \to \mathbb{C}$ 是一个缓增分布

$\Longleftrightarrow$ 存在 $C>0$, $m, n\in\mathbb{N}$，使得

$$|\varphi(f)| \le C\sum_{k\le m,\, l\le n} \rho_{kl}(f) \quad \forall f\in S$$

证明：$\Leftarrow$ 若存在这样的 C, m, n. 对于 $1\le k\le m$, $1\le l\le n$,

设 ρ_{kl} 重新编号后为 $\rho_{N_{kl}}$. 再记 $N_0 = \max\{N_{kl} \mid 1\le k\le m, 1\le l\le n\}+1$

取一个 $\delta < 2^{-N_0-1}$. 若 $d(f, f_0) < \delta$. 则对任意的 N_{kl},

$\frac{d_N(f-f_0)}{2^N} < d(f-f_0) < \delta$，而 $d_N = \frac{d'_N}{1+d'_N}$，所以

$$\rho_{kl}(f-f_0) = d'_{kl}(f-f_0) < \frac{2^{N_{kl}}\delta}{1-2^{N_{kl}}\delta}$$ 因为 $\delta < 2^{-N_0-1}$

所以 $1-2^{N_{kl}}\delta > 1-2^{N_{kl}-N_0-1} \ge \frac{1}{2}$，所以 $\rho_{kl}(f-f_0) < 2^{N_0+1}\delta$

因此 $$|\varphi(f)-\varphi(f_0)| = |\varphi(f-f_0)| \le C\sum_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le l\le n}} \rho_{kl}(f-f_0)$$

$$< C\sum_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le l\le n}} 2^{N_0+1}\delta = C\cdot m\cdot n\cdot 2^{N_0+1}\delta.$$ 只要再缩小 $\delta>0$ 使

$C\cdot m\cdot n\, 2^{N_0+1}\delta < \varepsilon$. 即可证明对 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. 当 $d(f-f_0)<\delta$

时，有 $|\varphi(f)-\varphi(f_0)| < \varepsilon$. 所以 φ 连续.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

⇒ 若 φ 连续. 取 $\varepsilon=1$. 则存在 $\delta>0$ s.t. $\forall f\in S$ 满足 $d(f,0)<\delta$. 有 $|\varphi(f)|<1$.

现在取一个 N 使 $\frac{1}{2^N}<\delta$. 设 $m=\max\{k \mid N_{kl}\le N\}$

$n=\max\{l \mid N_{kl}\le N\}$ 记 $A=\sum\limits_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}}\frac{1}{2^{N_{kl}}}$. $\varepsilon'=\frac{\delta}{2A-\delta}$.

(不妨假设 A 充分大使 $2A-\delta>0$). 下证: 若 f 满足

$\sum\limits_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}} p_{kl}(f)<\varepsilon'$, 则 $d(f,0)<\delta$. 于是 $|\varphi(f)|<1$. (*)

事实上, $\sum\limits_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}} p_{kl}(f)<\varepsilon' \Rightarrow$ 每个 $p_{kl}<\varepsilon'$. 于是 $\frac{1}{\rho}>\frac{2A}{\delta}-1$ $\frac{1}{\rho}+1>\frac{2A}{\delta}$

$\Rightarrow \frac{\rho}{1+\rho}=\frac{1}{\frac{1}{\rho}+1}<\frac{\delta}{2A}$. 所以

$$d(f,0)=\sum_{k,l:N_{kl}\le N}\frac{1}{2^{N_{kl}}}\frac{p_{kl}(f)}{1+p_{kl}(f)}+\sum_{k,l:N_{kl}>N}\frac{1}{2^{N_{kl}}}\frac{p_{kl}(f)}{1+p_{kl}(f)}$$

$$\le \frac{\delta}{2A}\sum_{k,l:N_{kl}\le N}\frac{1}{2^{N_{kl}}}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$\le \frac{\delta}{2A}\cdot A+\frac{1}{2^{N+1}}=\delta.$$ (*) 证毕.

现在回到原问题. 对 $\forall f\in S$. 记 $\|f\|_{m,n}=\sum\limits_{\substack{k\le m\\l\le n}} p_{kl}(f)$

取 $\tilde f=\frac{\varepsilon'}{2\|f\|_{m,n}}f$ 则 $\|\tilde f\|_{m,n}=\frac{\varepsilon'}{2\|f\|_{m,n}}\cdot\|f\|_{m,n}=\frac{\varepsilon'}{2}<\varepsilon'$.

注意. 这个收敛性不能由距离定义出来. →

所以有 $|\varphi(\tilde{f})|<1$. 但 φ 是线性的. 所以

$$|\varphi(f)| = |\varphi(\tilde{f})| \cdot \frac{2\|f\|_{m,n}}{\varepsilon'} < \frac{2}{\varepsilon'}\|f\|_{m,n}$$

最后取 $C=\frac{2}{\varepsilon'}$ 即可 □.

S'

~~所有分布构成~~ 显然是一个线性空间. 我们按如下方式定义其中的收敛性 (称为弱 * 收敛)

定义: S' 中的序列 $\{\varphi_n\}$ 称为收敛的. 极限为 φ, 如果对任 $f\in S$, $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(f)=\varphi(f)$.

引理: 设 $L: S\to S$ 是一个连续线性映射

i) 映射 $L': S'\to S'$, $\varphi\mapsto L'(\varphi)(f)=\varphi(L(f))$ 是良定的, 即对 $\forall\varphi\in S'$, $L'(\varphi)$ 的确是连续的.

ii) L' 本身在弱 * 收敛的意义下也是连续的.

证明: i) 设 $f_n\to f$. $L'(\varphi)(f_n)=\varphi(L(f_n))$. 因为 φ 连续, L 连续, 所以 $\varphi\circ L$ 连续, 于是 $\varphi(L(f_n))\to\varphi(L(f))=L'(\varphi)(f)$ 于是 $L'(\varphi)$ 连续

ii) 设 $\varphi_n\to\varphi$ 需证 $L'(\varphi_n)\to L'(\varphi)$. 根据弱 * 收敛的定义, 即证对 $\forall f\in S$ $L'(\varphi_n)(f)\to L'(\varphi)(f)$. 即 $\varphi_n(L(f))\to\varphi(L(f))$, 由 φ_n 的弱 * 收敛性此式显然成立. □

~~例: $L=X$.~~

Date:
Place:
Reminders

此定义可以乘法公式相比较

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f} g\, dx = \int_{\mathbb{R}} f \hat{g}\, dx \iff \varphi_{\hat{f}}(g) = \varphi_f(\hat{g}).$$

这也与下面对 D, X 的处理一致.

$\hat{\varphi}$ 也是连续的. 利用一致收敛性可证

Date:
Place:
Reminders

定义: 设 φ 是一个分布. 定义 $\hat{\varphi}(f) = \varphi(\hat{f})$, 称为 φ 的 Fourier 变换.

由引理 $\mathcal{F}: \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ 是连续双射且逆映射也连续. 因此是同胚.

之前曾说过, 对于 $f \in |R|$. $\varphi_f : S \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)\, dx$ 是分布. 特别地, 若 $f \in S$, 则 $\varphi_f \in S'$. 所以 $\varphi: f \mapsto \varphi_f$ 是 S 到 S' 的线性映射. 它显然是单射. 所以 S 可视为 S' 的子空间. 对于 $f \in S$ 可以求导. 于是有

$$\varphi_{f'}(g) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) g(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x) g'(x)\, dx = -\varphi_f(g')$$

若将 f 等同于 φ_f, f' 等同于 $\varphi_{f'}$. 上式表明 $f' = -f \circ D$.

由此可引出 S' 上的 ~~微分~~ 导数运算

定义: 对于 $\varphi \in S'$. 定义 $\overset{D\varphi}{\varphi'}(g) = -\varphi(g')$, 称为 φ 的导数

由前面的引理可知 $(\ )'$ 运算也是连续的.

下面考虑乘 x 操作. $\varphi_{xf}(g) = \int_{\mathbb{R}} (x f(x)) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)(x g(x))\, dx$
$= \varphi_f(xg)$.

Date:
Place:

Reminders

$f\in S \Rightarrow \mathcal{F}(f)\in S$ S中函数可以乘分布.

~~注：若 $\mathcal{F}(f)$ 不是多项式，$\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$ 尚无定义.~~

反变换可记为 $^\vee$. 于是 $f*\varphi=(\hat f\cdot\hat\varphi)^\vee$. →

Date:
Place:

Reminders

所以可类似定义

定义：对于 $\varphi\in S'$，定义 $X\varphi(g)=\varphi(xg)$.

（更一般地，还可在分布上乘以 x 的任意多项式 m 或其他使 $mg\in S$ 的函数 m（如 $m\in S$））

定理：S' 上的 Fourier 变换 D, X 满足

$\widehat{\varphi'}=2\pi i X\hat\varphi$, $\hat\varphi'=-2\pi i\widehat{X\varphi}$

证明. $\widehat{\varphi'}(g)=\varphi'(\hat g)=-\varphi(\hat g')=2\pi i\,\varphi(\widehat{xg})$

$=2\pi i\,\hat\varphi(xg)=2\pi i X\hat\varphi(g)$.

$\hat\varphi'(g)=-\hat\varphi(g')=-\varphi(\widehat{g'})=-2\pi i\,\varphi(x\hat g)$

$=-2\pi i X\varphi(\hat g)=-2\pi i\,\widehat{X\varphi}(g)$. □

将 Fourier 变换记为 $\mathcal{F}$. 根据卷积定理，若 $f,g\in S$，则 $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$. 现在若 g 改成分布，因为 S 中的元素和分布是可以乘的，所以可得如下定义：

定义：设 $f\in S$, $\varphi\in S'$. 定义 $f*\varphi=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(\varphi))$

Date:
Place:

Reminders

这些作为提前 →

Date:
Place:

Reminders

例：① $u(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ ~~$u(f)$~~

称为Heaviside阶梯函数.

$u(f)=\int_{\mathbb{R}} u(x)f(x)=\int_0^{\infty}f(x)dx.$

② 考虑 $\overset{\delta(f)}{=}u'(f)=-u(f')=-\int_0^{\infty}f'(x)dx=f(0)$. 它称为 Dirac δ 函数.

它在物理上代表质点的密度，或点电荷的电荷密度.

考虑 δ 的 Fourier 变换

$\hat{\delta}(f)=\delta(\hat{f})=\hat{f}(0)=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=1(f)$.

所以一般记 $\hat{\delta}=1$. 反之

$\hat{1}(f)=1(\hat{f})=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)d\xi=f(0)=\delta(f)$. 所以 $\hat{1}=\delta$.

由此可得

$f*\delta=(\hat{f}\cdot\hat{\delta})^{\vee}=(\hat{f})^{\vee}=f$. 所以 δ 是卷积运算的单位元.

另外，$x\delta(f)=\delta(xf)=0\cdot f(0)=0$，所以 $x\delta=0$.

③ 考虑 $\delta'(f)=-\delta(f')=-f'(0)$. 它的物理意义是原点处的一对电偶极子，由之前的性质可知 $\hat{\delta'}=2\pi ix$. 于是

$f*\delta'=(\hat{f}\cdot 2\pi ix)^{\vee}=f'\ (=f'*\delta)$. 类似地还可定义 $\delta^{(k)}$

④ $\varphi(x)=|x|$ $\quad \varphi(f)=\int_{\mathbb{R}}|x|f(x)dx=\int_0^{\infty}xf(x)-\int_{-\infty}^0 xf(x)dx$

$\varphi'(f)=-\varphi(f')=-\int_0^{\infty}xf'(x)dx+\int_{-\infty}^0 xf'(x)dx$

$=-\left(xf(x)\right)_0^{\infty}+\int_0^{\infty}f(x)dx+\left(xf(x)\right)_0^{\infty}-\int_{-\infty}^0 f(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x)f(x)dx.$

所以 $\varphi'(x) = \cancel{\mathrm{Sgn}}\ \mathrm{Sgn}(x)$. 注意在 $x=0$处, $\mathrm{Sgn}(x)$ 的值可随意规定. 所以一般函数在某点处的值并不重要(像S函数那样在$x=0$处为$+\infty$ 更有说服力).

$$\mathrm{Sgn}'(f) = -\mathrm{Sgn}(f') = -\int_0^\infty f'(x)dx + \int_{-\infty}^0 f'(x)dx$$

$$= 2f(0). \quad 所以\ \mathrm{Sgn}'(x) = 2\delta(x).$$

设 $f, g \in S$. 我们知道 $\begin{cases} \widehat{f*g} = \hat f \cdot \hat g \\ \widehat{f\cdot g} = \hat f * \hat g \end{cases}$ 由此不难想到如下定义

定义: 设 $f \in S$, $\varphi \in S'$. 定义 $f*\varphi = (\hat f \cdot \hat\varphi)^\vee$.

更具体地说. 设 $g \in S$, 则有

$$(f*\varphi)(g) = (\hat f \cdot \hat\varphi)^\vee(g) = (\hat f \cdot \hat\varphi)(\check g) = \hat\varphi(\hat f \cdot \check g)$$
$$= \varphi((\hat f \cdot \check g)^\wedge) = \varphi(\hat{\hat f} * g).$$

注意 $\hat{\hat f}(x) = f(-x) = \tilde f(x)$. 所以 $(f*\varphi)(g) = \varphi(\tilde f * g)$.

这也可当做 $f*\varphi$ 的定义. 事实上, $f*\varphi$ 还有更好的刻画

~~定理. 设 $f \in S$, $\varphi \in S'$. $\psi = f*\varphi$. 则 $\psi(g) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau_x \tilde f)\, g(x)dx$. 对 $g \in S$~~

Date:
Place:

Reminders

$\tau_x f(y) = f(y-x)$.

约定：若 $\psi\in S'$ 满足存在函数 f 使得对于 $g\in S$

$\psi(g)=\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$，则称 ψ 是一个通常的函数，且记 $\psi=f$.

定理表述改成：

定理：设 $f\in S$, $\varphi\in S'$, $\psi=f*\varphi$, $F(y)=\varphi(\tau_y\tilde{f})$

则 ii) $\psi(g)=\int_{\mathbb{R}} F(y)g(y)dy$　i) $F\in C^\infty(\mathbb{R})$, $|F|\le|P|$

Date:
Place:

Reminders

定理：设 $f\in S$, $\varphi\in S'$, $\psi=f*\varphi$, 则 ψ 是一个 C^∞ 函数

且 $\psi(x)=\varphi(\tau_x\tilde{f})$

证明：$(f*\varphi)(g)=\varphi(\tilde{f}*g)=\varphi(\int_{\mathbb{R}}\tau_y\tilde{f}(x)\,g(y)dy)$

~~要证明 $\psi(g)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\tau_y\tilde{f})g(y)dy$~~

$=\varphi\left(\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}(x-y)g(y)dy\right)=\varphi\left(\int_{\mathbb{R}}\tau_y\tilde{f}(x)g(y)dy\right)$.

若 ψ 是通常的函数，应有

$\psi(g)=\int_{\mathbb{R}}\psi(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\tau_y\tilde{f})g(y)dy$.

$F(x,y)=f(y-x)$

问题归结为 φ 与线性运算 $F(x,y)\mapsto\int_{\mathbb{R}}F(x,y)g(y)dy$ 是否"可交换"?

首先，定义 $F(y)=\varphi(\tau_y\tilde{f})=\varphi(\tilde{f}(x-y))=\varphi(f(y-x))$

于是 $F'(y)=\lim\limits_{h\to0}\frac{F(y+h)-F(y)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\varphi(f(y+h-x))-\varphi(f(y-x))\right)$

$=\varphi\left(\lim\limits_{h\to0}\frac{f(y+h-x)-f(y-x)}{h}\right)=\varphi(f'(y-x))$

$=\varphi(\tau_y\tilde{f'})$　因为 $f\in S$, 所以 $f'\in S$, 于是 $F'(y)$ 处处存在，此过程可对 f' 继续下去

于是 $F\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

接下来考虑 $h(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau_y \tilde{f}(x)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y-x)\, g(y)\, dy$

f、g 都是 Schwartz 函数，所以 h(x) 收敛。

对 $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$，存在 a_k, b_k，使得

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(y-x) g(y)\, dy - \int_{a_k}^{b_k} f(y-x) g(y)\, dy\right| < \frac{\varepsilon_k}{2}.$$

因为 $f(y-x)g(y)$ 可积，所以存在 $n_k \in \mathbb{N}$ ~~(a_k, b_k) 的 n 等分~~，使得 $[a_k, b_k]$ 的 n_k 等分的 Riemann 和很好地逼近上述定积分：

$$\left|\int_{a_k}^{b_k} f(y-x) g(y)\, dy - \sum_{i=1}^{n_k} f(\underbrace{a_k + \frac{b_k-a_k}{n_k} i}_{y_{k_i}} - x)\, g(\underbrace{a_k + \frac{b_k-a_k}{n_k} i}_{y_{k_i}}) \frac{b_k-a_k}{n_k}\right| < \frac{\varepsilon_k}{2}$$

定义 $h_k(x) = \sum_{i=1}^{n_k} f(\underbrace{a_k + \frac{b_k-a_k}{n_k} i}_{y_{k_i}} - x)\, g(\underbrace{a_k + \frac{b_k-a_k}{n_k} i}_{y_{k_i}}) \frac{b_k-a_k}{n_k}$

则有 $|h(x) - h_k(x)| < \varepsilon_k = \frac{1}{k}$. 所以 $\lim_{k\to\infty} h_k(x) = h(x)$.

于是 $\varphi(h(x)) = \lim_{k\to\infty} \varphi(h_k(x))$

$$= \lim_{k\to\infty} \varphi\left(\sum_{i=1}^{n_k} f(y_{k_i} - x)\, g(y_{k_i}) \frac{b_k-a_k}{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \underbrace{\varphi(\tau_{y_{k_i}} \tilde{f})}_{\psi(y_{k_i})}\, g(y_{k_i}) \frac{b_k-a_k}{n_k}$$

因为 $\psi(y_k)$

（对 ψ 的性质研究得还不够）. 为什么 $\int_{\mathbb{R}} \psi(y) g(y)\, dy$ 存在

不那么简单.

此处要说明 $\int_a^b f(y-x)g(y)dy \to \int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy$ →

是在 S 中的拓扑下收敛的. 因此应考虑

~~$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k \partial_x^l \int_a^b f(y-x)g(y)dy\right|$ 和 $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k\partial_x^l\int_{-\infty}^{\infty} f(y-x)g(y)dy\right|$~~

~~$\le \sup_{x\in\mathbb{R}}|x^k f^{(l)}(x)| \sup_{y\in\mathbb{R}}|g(y)|$~~

当 $b\to+\infty$ 和 $a\to-\infty$ 的极限.

利用 Schwartz 性质不难证明.

另一方面. 根据分布的上界刻画: $\exists\, C, m, n$

$$|F(y)| = |\varphi(f(y-x))| \le C\sum_{\substack{k\le m\\ l\le n}}\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^k f^{(l)}(y-x)|$$

$$= C\sum_{\substack{k\le m\\ l\le n}} \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|y-\xi|^k|f^{(l)}(\xi)|$$

$$\le C\sum_{\substack{k\le m\\ l\le n}}\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}|y|^i|\xi|^{k-i}|f^{(l)}(\xi)|$$

$$= \sum_{i=0}^m a_i |y|^i$$

所以 $F(y)$ 的增长不超过一个~~固定次数的~~多项式. 于是积分 $\int_{\mathbb{R}}F(y)g(y)dy$ 对于 $\forall g\in S$ 是收敛的.

~~因为 $\int_{\mathbb{R}}F(y)g(y)dy = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b F(y)g(y)dy$. 若能证明~~

~~$\varphi\left(\int_a^b f(y-x)g(y)dy\right) = \int_a^b \varphi(\tau_y f)\, g(y)dy$~~

~~只要让 $a,b\to -\infty,+\infty$. 因为 φ 是连续的. 所以就有~~

~~$\varphi\left(\int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy\right) = \int_{\mathbb{R}} F(y)g(y)dy$.~~

Date:
Place:

Reminders

~~此处要说明 $h_n \to h$ 是在S的拓扑下收敛.~~

~~即对 $k, l \in \mathbb{N}$~~

$$\cancel{\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \left(\int_a^b f^{(l)}(y-x)g(y)dy - \sum_{i=1}^{n} f^{(l)}(y_i-x)g(y_i)\frac{b-a}{n} \right) \right|}$$

~~当 $n\to\infty$ 时为零.~~

Date:
Place:

Reminders

~~设 $h(x)=\int_a^b f(y-x)g(y)dx$. 考虑这个定积分的n等分Riemann和 $h_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f(y_i-x)g(y_i)\frac{b-a}{n}$ 其中 $y_i=a+\frac{b-a}{n}i$. 因为 $f(y-x)g(y)$ 已可积. 所以 $h_n\to h$ 当 $n\to\infty$ 时.~~

因为 $\int_{\mathbb{R}} F(y)g(y)dy=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b F(y)g(y)dy$. 若能

证明 ① $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(y-x)g(y)dy=\int_{\mathbb{R}} f(y-x)g(y)dy$

(在S中)

② $\varphi\left(\int_a^b f(y-x)g(y)dy\right)=\int_a^b F(y)g(y)dy$.

则由 φ 的连续性可知 $\varphi\left(\int_{\mathbb{R}}(\cdots)\right)=\int_{\mathbb{R}}(\cdots)$.

对于① 只要证明对 k, l

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k\int_b^\infty f^{(l)}(y-x)g(y)dy\right|\to 0 \quad b\to+\infty$$

即可 ($a\to-\infty$ 是类似的)

$$\left|x^k\int_b^\infty f^{(l)}(y-x)g(y)dy\right|$$

$$=\left|\int_b^\infty (y-(y-x))^k f^{(l)}(y-x)g(y)dy\right| = \left|\int_b^\infty \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i y^{k-i}(y-x)^i f^{(l)}(y-x)\, g(y)dy\right.$$

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

$$\le \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} p_{i\beta}(f) \int_b^\infty |y|^{k} |g(y)| \, dy \le C \int_b^\infty \frac{dy}{1+y^2} \to 0.$$

对∀ε>0

对于②，将a.b n等分 设分点为 $y_i = a + \frac{b-a}{n} i$. 则当n充分大时 $\left| \int_a^b f(y-x) g(y) \, dy - \sum_{i=1}^{n} f(y_i - x) g(y_i) \frac{b-a}{n} \right| < \varepsilon.$

定义 $h_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i - x) g(y_i) \frac{b-a}{n}$. $h(x) = \int_a^b f(y-x) g(y) \, dy$

上式表明 $h_n \to h$. 但这只是对x逐点的. 注意 $h_n \in S$. $h \in S$.
我们要证明 $h_n \to h$ 在S中的拓扑下也成立.

首先. 对于 $f.g \in S$ 以及 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(y_i - x) g(y_i)(y_i - y_{i-1}) \rightrightarrows \int_a^b f(y-x) g(y) \, dy$$

$\int_{y_{i-1}}^{y_i} dy$

这是因为 $\left| \int_a^b f(y-x) g(y) \, dy - \sum_{i=1}^{n} f(y_i - x) g(y_i)(y_i - y_{i-1}) \right|$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \left(f(y-x) g(y) - f(y_i - x) g(y_i) \right) dy \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \left| f'(\xi - x) g(\xi) + f(\xi - x) g'(\xi) \right| |y - y_i| \, dy$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \int_{y_{i-1}}^{y_i} (A_1 B_0 + A_0 B_1) \frac{b-a}{n} \, dy = (A_1 B_0 + A_0 B_1) \frac{(b-a)^2}{n} \to 0.$$

接下来. 将上述估计中的f(x)替换成 $f^{(k)}(x)$. 则可知

$$\sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(y_i - x) g(y_i)(y_i - y_{i-1}) \rightrightarrows \int_a^b f^{(k)}(y-x) g(y) \, dy.$$

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

最后 $\int_a^b x f(y-x)\, g(y)\, dy$

$$= \int_a^b f(y-x)\,(y g(y))\, dy - \int_a^b \big((y-x) f(y-x)\big)\, g(y)\, dy.$$

因为 $y g(y) \in S$，$y f(y) \in S$，所以上述结论对 $\int_a^b x f(y-x) g(y) dy$ 也成立。于是对 $\int_a^b x^k f(y-x) g(y) dy$ 也成立。

综上所述，对 $\forall k, l$，Riemann 和

$$\sum_{i=1}^n x^k f^{(l)}(y_i - x)\, g(y_i)\,(y_i - y_{i-1})$$ 对于 $x \in \mathbb{R}$ 一致地收敛到

$$\int_a^b x^k f^{(l)}(y-x)\, g(y)\, dy.$$ 所以 $h_n \to h$ 是在 S 中的。

最后只需证明 $\lim_{n\to\infty} \varphi(h_n) = \int_a^b F(y) g(y) dy$

$$\varphi(h_n) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^n f(y_i - x)\, g(y_i) \frac{b-a}{n}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^n \varphi(\tau_{y_i} \tilde{f})\, g(y_i) \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^n F(y_i)\, g(y_i) \frac{b-a}{n}.$$

~~因为 F 连续 ...~~ 因为 $F(y) g(y)$ R 可积，所以当 $n \to \infty$ 时，上式右端趋向于 $\int_a^b F(y) g(y) dy$. $\square$

关于分布的最后一个定理是如下的 Schwartz 表示定理。

Date: ......
Place: ......

Reminders

Freché 空间版 $(L^1)'=L^\infty$ or $(L^2)'=L^2$.

要用 Hahn-Banach 和 Riesz 表示 →

一般不叫 Riesz表示? whatever...

$f\in M_\varepsilon$ 时需对 $\hat{f}$ 也提衰减要求. →

Date: ......
Place: ......

Reminders

定理：设 $\varphi\in S'$，则存在 $m\in\mathbb{N}$，$F\in C(\mathbb{R})$，满足

i) $\exists$ 多项式 P，使 $\forall y\in\mathbb{R}$ $|F(y)|\le|P(y)|$.

ii) $\varphi=F^{(m)}$，或者对于 $f\in S$，

$$\varphi(f)=\int_{\mathbb{R}}F(x)(-\partial_x)^m f(x)\,dx.$$

即每个分布都是缓增连续函数的有限阶导数. 这定理的证明本质的部分要用到前面对 $|\varphi(f)|$ 的估计. 除此以外还需要一些更进一步的泛函分析知识. 这里就不证明了.

§11.2 应用: Poisson 求和公式与采样定理

与 Heisenberg 不确定性原理.

设 $f\in S$（或 M_ε!）对于 $T>0$，可定义一个周期为 T 的函数 $F_T(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+nT)$. 由 f 的衰减性可知 F_T 在 $\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛. 接下来的问题是 F_T 的 Fourier 级数是什么样的？由 Fourier 级数部分的有关结果 我们知道

$$F_T(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{2\pi i\frac{x}{T}n}.$$ 其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T F_T(x)\,e^{-2\pi i\frac{x}{T}n}\,dx$$

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+mT)e^{-2\pi i \frac{x}{T}n}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^T f(x+mT)e^{-2\pi i \frac{x}{T}n}\,dx \qquad x+mT=y$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{mT}^{(m+1)T} f(y)e^{-2\pi i \frac{y}{T}n}\,dy$$

$$= \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i \left(\frac{n}{T}\right)y}\,dy = \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right).$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{2\pi i \frac{n}{T}x}$$

这就是 Poisson 求和公式. 特别地. 当 $x=0$ 时有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right).$$ 当 $T=1$ 时. 有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$ 这两个特殊情形有时也叫 Poisson 求和公式.

例① $f(x)=e^{-\pi x^2}$. $\hat{f}(\xi)=e^{-\pi\xi^2}$.

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 T^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T} e^{-\pi \frac{n^2}{T^2}}$$ 这个公式有时也叫 Poisson 求和公式. 它可用来证明 θ函数恒等式, 模性质, ζ函数函数方程, 四平方定理, 弦论中的 T 对偶等.

② 若 $f \in M_\varepsilon$ 满足 $\operatorname{supp}\hat{f} \subseteq [-M, M]$. 由 Poisson:

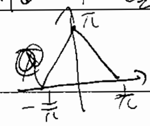
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} x}$$

当 T 充分小时，有 $\left|\frac{n}{T}\right| > M$.（例如 $T < \frac{1}{M}$）于是右边的求和只有一项 $n=0$

所以有 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT) = \frac{1}{T}\hat{f}(0) = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

这可以用来证明一些有趣的恒等式，如 $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \text{(三角形, 高 } \pi\text{, 底 } [-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]) & |x| < \frac{1}{\pi} \\ 0 & |x| > \frac{1}{\pi} \end{cases}$ 所以 $M = \frac{1}{\pi}$ 于是



当 $|T| < \pi$ 时，有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(x+nT)}{(x+nT)^2} = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{T}$$

注意左边依赖于 x，而右边与 x 无关.

更一般地，当 $\operatorname{supp}\hat{f} \subseteq [-M, M]$ 时，$\operatorname{supp}\widehat{f^k} \subseteq [-kM, kM]$，所以当 $T < \frac{1}{kM}$ 时，有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f^k(x+nT) = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} f^k(x)\,dx.$$

（前提是 $f^k \in M_\varepsilon$）.

这种 Fourier 变换具有紧支性的函数在信号处理中特别有用. 特别地，我们有如下采样定理.

Date:
Place:
Reminders

也叫 Whittaker-Nyquist-Shannon-Kotelnikov 定理的.

另一种证明：利用 Poisson 求和公式于 (?) 中的技巧可证明 $\hat{f}(\xi)=\sum f(\frac{n}{2M})(\cdots)$. 再做 Fourier 逆变换即可.

若取 $L>M$. 将 $\hat{f}(\xi)$ 在 $[-L,L]$ 上 Fourier 展开

$$\hat{f}(\xi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2L}f\left(\frac{n}{2L}\right)e^{-2\pi i\frac{n}{2L}\xi}$$

再代入 $f(x)$

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

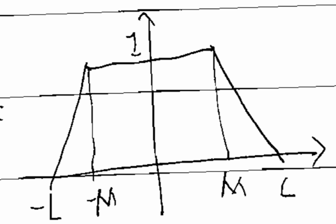
注意 $\hat{f}(\xi)$ 在 $[-M,M]$ 上为 ... 其它地方为零. 所以对于任意连续函数

$$h(\xi)=\begin{cases}1 & |\xi|\le M\\ (\cdots) & M\le|\xi|\le L\\ 0 & |\xi|>L\end{cases}$$

都有

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}h(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi.$$

特别地，我们可取

$h(\xi)=$ 

$$=\begin{cases}0 & \xi<-L\\ \frac{L+\xi}{L-M} & -L\le\xi\le-M\\ 1 & -M\le\xi\le M\\ \frac{L-\xi}{L-M} & M\le\xi\le L\\ 0 & \xi>L\end{cases}$$

于是有

Date:
Place:
Reminders

定理 (Nyquist-Shannon) 设 $f\in M_\varepsilon$ (或 $M_\varepsilon(\mathbb{R})$)

若 $\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq[-M,M]$. 则有

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(\frac{n}{2M}\right)\operatorname{sinc}(2Mx-n).$$

其中 $\operatorname{sinc}(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$.

证明：在 $[-M,M]$ 上将 $\hat{f}$ 展开为 Fourier 级数.

$$\hat{f}(\xi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{2\pi i\frac{n}{2M}\xi}\qquad c_n=\frac{1}{2M}\int_{-M}^{M}\hat{f}(\xi)e^{-2\pi i\frac{n}{2M}\xi}d\xi$$

于是

$$=\frac{1}{2M}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{-2\pi i\frac{n}{2M}\xi}d\xi=\frac{1}{2M}f\left(-\frac{n}{2M}\right).$$

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

$$=\int_{-M}^{M}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2M}f\left(\frac{n}{2M}\right)\int_{-M}^{M}e^{2\pi i\xi\left(x-\frac{n}{2M}\right)}d\xi$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2M}f\left(\frac{n}{2M}\right)\cdot\frac{e^{\pi i(2Mx-n)}-e^{-\pi i(2Mx-n)}}{2\pi i\left(x-\frac{n}{2M}\right)}$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(\frac{n}{2M}\right)\operatorname{sinc}(2Mx-n).\qquad\square$$

Date:
Place:
Reminders

$$f(x)=\int_{-L}^{L}h(\xi)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2L}f\left(\frac{n}{2L}\right)e^{-2\pi i\frac{n}{2L}\xi}\right)e^{2\pi i\xi x}\,d\xi$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2L}f\left(\frac{n}{2L}\right)\int_{-L}^{L}h(\xi)e^{2\pi i(x-\frac{n}{2L})\xi}\,d\xi$$ ，其中

$$\int_{-L}^{L}h(\xi)e^{2\pi i(x-\frac{n}{2L})\xi}\,d\xi=\int_{0}^{L}h(\xi)\left[e^{2\pi i(x-\frac{n}{2L})\xi}+e^{-2\pi i(x-\frac{n}{2L})\xi}\right]d\xi$$

$$=2\left[\int_0^M\cos\left[2\pi\left(x-\frac{n}{2L}\right)\xi\right]d\xi+\int_M^L\frac{L-\xi}{L-M}\cos\left[2\pi\left(x-\frac{n}{2L}\right)\xi\right]d\xi\right]$$

$$=\frac{2L^2\left[\cos\left(\frac{M}{L}\pi(2Lx-n)\right)-\cos\left(\pi(2Lx-n)\right)\right]}{(L-M)\pi^2(2Lx-n)^2}$$ 所以

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(\frac{n}{2L}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{M}{L}\pi(2Lx-n)\right)-\cos\left(\pi(2Lx-n)\right)}{\left(1-\frac{M}{L}\right)\pi^2(2Lx-n)^2}.$$

此公式称为过采样公式. 注意其中的系数是 $O(\frac{1}{n^2})$ 的. 比原始的采样定理要好. 因为我们现在的采样间隔更密. 当 $L\to M$ 时, 不难验证上述系数会回归到 $\mathrm{sinc}(2Mx-n)$. (下页还有)

Date:
Place:
Reminders

推论: 若 $f,\hat f$ 都具有紧支集, 则 $f\equiv 0$

证明: 由上述定理

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(\frac{n}{2M}\right)\mathrm{sinc}(2Mx-n)=\sum_{n=-N}^{N}f\left(\frac{n}{2M}\right)\mathrm{sinc}(2Mx-n).$$

任取充分大的 $x_1,\cdots,x_{2N+1}$ 可得

$$0=\sum_{n=-N}^{N}f\left(\frac{n}{2M}\right)\mathrm{sinc}(2Mx_i-n)\quad(i=1,\cdots,2N+1)$$

x_i 任意, 于是左边 $f(\frac{n}{2M})$ 的系数矩阵非退化. 所以 $f(\frac{n}{2M})=0$ $(n=1\cdots 2N+1)$. 所以 $f\equiv 0$ □.

最后考虑 Heisenberg 不确定性原理.

定理: 设 $\psi\in S$ 满足 $\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2dx=1$, 则

$$\int_{\mathbb{R}}x^2|\psi(x)|^2dx\cdot\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat\psi(\xi)|^2d\xi\ge\frac{1}{16\pi^2}.$$

证明:
$$1=\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2dx=-\int_{\mathbb{R}}x\left(\psi(x)\overline{\psi(x)}\right)'dx$$
$$\le 2\int_{\mathbb{R}}|x||\psi(x)||\psi'(x)|\,dx$$
$$\le 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}}x^2|\psi(x)|^2dx}\cdot\sqrt{\int_{\mathbb{R}}|\psi'(x)|^2dx}$$
$$=2\sqrt{\int_{\mathbb{R}}x^2|\psi(x)|^2dx}\cdot\sqrt{\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\psi'}(\xi)|^2dx}$$
$$=4\pi\sqrt{\int_{\mathbb{R}}x^2|\psi(x)|^2dx}\cdot\sqrt{\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat\psi(\xi)|^2d\xi}.$$ □

过采样公式亦可写为

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2L}\right)\cdot \mathrm{sinc}\left((L+M)\left(x-\frac{n}{2L}\right)\right)\mathrm{sinc}\left((L-M)\left(x-\frac{n}{2L}\right)\right)\frac{2L}{L+M}$$

因为 $\mathrm{sinc}(y)\to 1$ $(y\to 0)$ 所以更容易看出当 $L\to M$ 时它会回到采样定理.

当 f ~~supported~~ 支撑在 $[a,b]$ 上时. 通过傅里叶变换可得到~~的定理~~其它类型的采样公式. 具体可见傅里叶分析方面的教科书.

此外. A,B 需要是自伴的. 因不想讲 Hilbert $\to$ 空间与自伴算子. 故此处略

推论: 条件同前. 则对 $\forall\ x_0,\ \xi_0\in\mathbb{R}$, 有

$$\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2|\psi(x)|^2dx\cdot\int_{\mathbb{R}}(\xi-\xi_0)^2|\hat\psi(\xi)|^2d\xi\geq\frac{1}{16\pi^2}.$$

证明: 取 $\tilde\psi(x)=e^{-2\pi i x\xi_0}\psi(x+x_0)$, 然后对 $\tilde\psi$ 应用定理即可. □

在量子力学中. $\psi(x)$ 叫做粒子的波函数

$x_0=\int_{\mathbb{R}}x|\psi(x)|^2dx$ 叫位置期望值.

$\xi_0=\int_{\mathbb{R}}\xi|\hat\psi(\xi)|^2d\xi$ 叫动量期望值.

$\Delta x=\sqrt{\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2|\psi(x)|^2dx}$ 叫位置不确定度.

$\Delta\xi=\sqrt{\int_{\mathbb{R}}(\xi-\xi_0)^2|\hat\psi(\xi)|^2d\xi}$ 叫动量确定度.

Heisenberg 不确定性原理即 $\Delta x\cdot\Delta\xi\geq\frac{1}{4\pi}$. (无量纲化了)

更一般地. 设 A,B 是一对物理量. 其对应的算子不交换 $(AB\neq BA)$. 则 $\Delta A\cdot\Delta B\geq\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$ (Robertson). 它是更一般的 Schrödinger 不确定性的推论. 更多内容参见量子力学教科书.

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

§11.9 $\mathbb{R}^d$ 中的 Fourier 变换.

设 $\mathbb{R}^d$ 的坐标为 ~~坐~~ $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$. 对于 $y=(y_1\cdots y_d)$.

规定 $x\cdot y=x_1y_1+\cdots+x_dy_d$. $|x|=\sqrt{x\cdot x}$. 对多重指标

$\alpha=(\alpha_1,\cdots\alpha_d)$ ~~坐~~ $(\alpha_i\in\mathbb{N})$ 规定

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}.\quad f^{(\alpha)}(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}f(x).$$

定义: ① $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 叫速降的. 或 Schwartz函数. 若

对 $\forall\alpha.\beta\in\mathbb{N}^d$. $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha f^{(\beta)}(x)|<+\infty$.

② 所有速降函数构成的线性空间记为 $S(\mathbb{R}^d)$.

③ 对于 $f\in S(\mathbb{R}^d)$. 定义 ~~时~~ 它的 Fourier变换为 $\hat{f}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$.

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx.$$

性质: 设 $f\in S(\mathbb{R}^d)$. 则

i) $(f(x+h))^\wedge(\xi)=e^{2\pi i\xi\cdot h}\hat{f}(\xi)$.

ii) $(f(x)e^{-2\pi i x\cdot h})^\wedge(\xi)=\hat{f}(\xi+h)$.

iii) $(f(Ax))^\wedge(\xi)=\frac{1}{A^d}\hat{f}\left(\frac{\xi}{A}\right)$ $(A>0)$.

Date:
Place:

Reminders

推论：$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 叫径向的，若 f 只依赖 $|x|$.

若 f 是径向的，则 $\hat f$ 也是径向的.

Date:
Place:

Reminders

iv) $\left(f^{(\alpha)}(x)\right)^{\wedge}(\xi)=(2\pi i\xi)^{\alpha}\hat f(\xi)$.

v) $\left((-2\pi i x)^{\alpha}f(x)\right)^{\wedge}(\xi)=\hat f^{(\alpha)}(\xi)$

vi) 若 $R:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是一个正交变换，则

$$\left(f(Rx)\right)^{\wedge}(\xi)=\hat f(R\xi).$$

证明：i) → v) 都是显然的. 只证 vi).

$$\left(f(Rx)\right)^{\wedge}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(Rx)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}f(Rx)e^{-2\pi i (Rx)\cdot(R\xi)}dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)e^{-2\pi i y\cdot(R\xi)}dy \qquad \det R=1$$

$$=\hat f(R\xi) \qquad \square.$$

推论：若 $f\in S$，则 $\hat f\in S$.

在 $S(\mathbb{R}^d)$ 上可类似一维情形引入 $P_{\alpha\beta}$，从而 ρ_d 并定义 S 中的拓扑. 之前的各种结论（包括关于 S' 的部分）可一字不改地照搬过来. 特别地，我们有

定理：设 $f \in S(\mathbb{R}^d)$，则

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

并且有 $$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx.$$

在 $\mathbb{R}^d$ 中除直角坐标系外，还有其它各种坐标系。Fourier 变换在其它坐标系中具有一些特别的形式，它们在理论和应用中都是很重要的。我们先看 $d=2$ 和 $d=3$ 的情况。

$d=2$. 设 $\mathbb{R}^d$ 中的坐标为 (x,y)，极坐标为 (r,θ)。再设变换后的坐标为 (ξ,η)，极坐标为 (ρ,φ)。对于一个 $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$，对固定的 r，$f(r,\theta)$ 是以 2π 为周期的函数，所以有（不妨设 f, $\hat{f}$ 都很好，如 Schwartz）

$$f(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r) e^{in\theta}.$$ 同理

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{c}_n(\rho) e^{in\varphi}$$ 问题：$c_n(r)$ 和 $\hat{c}_n(\rho)$ 有什么关系？由 Fourier 变换的定义（为简单，此处取无 2π 版

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{-i(x\xi+y\eta)} dxdy$$

Date:
Place:
Reminders

$$=\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi}d\theta\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_n(r)\,e^{in\theta-ir\rho\cos(\theta-\varphi)}\right)$$

令 $\theta-\varphi=\psi$

$$=\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi}d\psi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_n(r)\,e^{in\varphi+in\psi-ir\rho\cos\psi}\right)$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{in\varphi}\int_0^\infty C_n(r)\,r\,dr\int_0^{2\pi}e^{i(n\psi-r\rho\cos\psi)}\,d\psi.$$

利用微分方程法可以证明 $\int_0^{2\pi}e^{i(n\psi-r\rho\cos\psi)}\,d\psi$

$=2\pi\,(i)^n J_n(r\rho)$. 所以

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^\infty C_n(r)\,J_n(r\rho)\,r\,dr\right)2\pi\,e^{in(\varphi+\frac{\pi}{2})}.$$

所以有 $\hat{C}_n(r)\sim\int_0^\infty C_n(r)\,J_n(r\rho)\,r\,dr$. 将这个直接抽象出来即得如下定义：

定义：设 $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$, $\nu>-\frac{1}{2}$. 定义

$$F_\nu(\rho)=\int_0^\infty f(r)\,J_\nu(r\rho)\,r\,dr.$$

称为 ν 阶 Hankel 变换.

Date:
Place:

Reminders

若 f 紧支. 不妨设 f 在 $B_R(0)$ 外部全零. 则

它在 $B_R(0)$ 内可展开为 Fourier-Bessel 级数

$$f(r) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_\nu\left(\mu_{\nu,n}\frac{r}{R}\right).$$ 其中 $\mu_{\nu,n}$ 是 $J_\nu(x)$ 的第 n 个零点.

~~基函数~~满足正交关系

$$\int_0^1 x J_\nu(x\mu_{\nu,n}) J_\nu(x\mu_{\nu,m}) = \frac{\delta_{nm}}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_{\nu,n}).$$

于是 $$C_n = \frac{\int_0^R f(r) J_\nu(\mu_{\nu,n}\frac{r}{R}) r\,dr}{\frac{R^2}{2}\cdot J_{\nu+1}^2(\mu_{\nu,n})}$$

它可视为 S^1 上的 Fourier 级数在圆周上的径向推广.

Date:
Place:

Reminders

利用 Bessel 函数的有理性质可以证明

$$\int_0^\infty J_\nu(\rho r) J_\nu(\rho' r)\, r\,dr = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}. \quad \rho,\rho'>0$$

所以有

$$f(r) = \int_0^\infty f(r')\frac{\delta(r-r')}{r'} r'dr' = \int_0^\infty f(r')\left(\int_0^\infty J_\nu(\rho r) J_\nu(\rho r')\rho\,d\rho\right) r'dr'$$

$$= \int_0^\infty F_\nu(\rho) J_\nu(\rho r)\rho\,d\rho$$

即 Hankel 正变换与反变换是一样的. 另外, 还有 Parseval 等式

$$\int_0^\infty |f(r)|^2 r\,dr = \int_0^\infty |F_\nu(\rho)|^2 \rho\,d\rho.$$

$d=3$. 坐标为 (x,y,z) 和 (r,θ,φ). 第一个问题是, ~~球面上~~ Fourier 级数的对应物是什么? $d=2$ 时出现 Fourier 级数是因为 θ 的取值范围正好是 S^1. 但 $d=3$ 时, (θ,φ) 的取值范围是 S^2. $\cos nx$ 或 $\sin nx$ 都是 S^1 上的周期函数, 所以接下来的问题是, S^2 上的这类函数 ~~简谐~~ 是什么? 答案是调和多项式.

Date:
Place:

Reminders

另一种做法:

在 $\mathbb{R}^2$ 上 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

$\Delta P=0$, $\deg P = n \Rightarrow P = r^n \underbrace{Q(\cos\theta,\sin\theta)}_{=Q(\theta)}$. 代入得

$n^2 r^{n-2} Q + r^{n-2}Q''(\theta)=0 \Rightarrow Q = C_1\cos n\theta + C_2 \sin n\theta$.

在 $\mathbb{R}^3$ 上.

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

设 $f(x,y,z)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. 其中 $R(r)=r^l$. $\Phi=e^{im\varphi}$

则 Θ 满足

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \left(l(l+1)\sin^2\theta - m^2\right)\Theta = 0$$

Spherical harmonics →

若令 $\cos\theta = x$, $\Theta(\theta)=P(x)$, 则 P 满足

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0.$$

它的多项式解即 $P_l^m(x)$.

Date:
Place:

Reminders

定义: 设 $P[x_1,\cdots,x_d]$ 是多项式, 若 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ 若

$\Delta P=0$. 则称 P 是一个调和多项式.

引理: 设 P 是一个调和多项式, $P = P_0+\cdots+P_D$ 是它分解为齐次分量的直和, 则每个 P_i 也是调和的.

证明: $\Delta P(x)=0 \Rightarrow \Delta P(\lambda x)=0 \Rightarrow \Delta\left(\sum \lambda^i P_i(x)\right) = \sum_{i=0}^{D}\lambda^i \Delta P_i(x)$.

取 $D+1$ 个 $\lambda_0,\cdots,\lambda_D$ 互不相等, 则由范德蒙行列式知 $\Delta P_i(x)=0$. □

问题: 齐次调和函数有哪些?

$d=2$: 1. x. y. x^2-y^2. $2xy$. x^3-3xy^2. y^3-3x^2y, ...

正对应 1. $\cos\theta$ $\sin\theta$ $\cos 2\theta$ $\sin 2\theta$ $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ ...

$d=3$: 1. x. y. z. x^2-y^2, y^2-z^2, xy. yz. zx, ...

它们在 S^2 上的限制即可做 S^2 上的 "Fourier 级数" 的基

在实际应用中, 一般选如下基, 称为球谐函数

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_l^m(\cos\theta).$$ $l=0,1,2,\cdots$

$m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l$.

其中 P_l^m 称为连带 Legendre 多项式, 其定义为

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m}(x^2-1)^l.$$

Date:
Place:

Reminders

Y_l^m 也有这定律. 略

Date:
Place:

Reminders

下面任意 $f(x,y,z)$ 可写为（假设足够好）.

$$f(x,y,z)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi).$$

若进一步考虑 $f_{lm}(r)$ 的 "Fourier" 变换, 则计算变得很复杂. 如果我们限制在球对称的情形, 则

$$\cancel{\hat{f}(\rho)=\int_{\mathbb{R}^3} f(r)\,e^{-ir\rho\cos\ldots}\,dr}$$

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,e^{-i x\cdot\xi}\,dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,e^{-ir\rho\cos(\hat{x},\xi)}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

~~假设该变换使~~

$$\cancel{=4\pi\int_0^{\infty} f(r)\,j_0(r\rho)}$$

取 ξ 为 z 轴, 则 $\cos(\hat{x},\xi)=\cos\theta$

$$=2\pi\int_0^{\infty}dr\int_0^{\pi}d\theta\, f(r)\,e^{-ir\cos\theta}\,r^2\sin\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\infty} f(r)\,r^2\,dr\int_0^{\pi} e^{ir(-\cos\theta)}\,d(-\cos\theta)=\cdots$$

$$=\frac{4\pi}{\rho}\int_0^{\infty} r f(r)\sin(r\rho)\,dr,\ \text{即}$$

Date:
Place:
Reminders

此处需要

$$J_\nu(t) = \frac{t^\nu}{(2\pi)^{\nu+1}} \omega_{2\nu} \int_0^\pi e^{-it\cos\theta} (\sin\theta)^{2\nu}\, d\theta$$

其中 $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ 为 S^{n-1} 的面积。(n可不是整数)

更多内容可参见 Stein–Weiss，或者是 Stein 的专著（奇异积分 调和分析等）。

参见，例如 de Rham 或 GTM94，或几何分析的有关专著。

Date:
Place:
Reminders

$$\rho \hat f(\rho) = 4\pi\int_0^\infty r f(r)\sin(r\rho)\, dr.$$ 即 正弦变换

一般地，在 $\mathbb{R}^d$ 中，若 f 只依赖于 r，则 $\hat f$ 只依赖于 ρ，且有

$$\rho^{\frac{n-2}{2}} \hat f(\rho) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n-2}{2}} f(r) J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)\, r\,dr \qquad (*)$$

特别地，当 $n=3$ 时，$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$，这就回到上面的情况。(*) 也是 Hankel 变换，所以 Hankel 变换也可视为正弦变换的某种推广。

$\mathbb{R}^d$ 中某区域上函数的"Fourier"变换问题往往归结为 Laplace 方程（亦称调和方程）或 Laplace 算子的特征值问题，所以这类问题及其推广被称为调和分析。

更一般地，若 M 是一个流形，在 M 上可谈论 Riemann 度量及相应的 Laplace 算子，于是可进一步考虑 M 上的调和分析，当 M 紧时，有著名的 Hodge 定理，在几何分析中，流形的 Laplace 算子的特征值是重要的研究对象之一。著名的"听鼓"问题即来源于此。

(下面是 Radon 变换)

Date:

Place:

Reminders

Date:

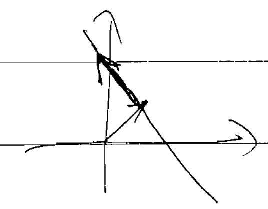
Place:

Reminders

对于 $\gamma\in S^{d-1}$，$t\in\mathbb{R}$，定义

$$P_{\gamma,t}=\{x\in\mathbb{R}^d \mid x\cdot\gamma=t\}.$$

显然 $P_{\gamma,t}=P_{-\gamma,-t}$.



在 $P_{\gamma,t}$ 上可取一个体积形式 ω 使得它与 γ 所决定的 ~~…~~ $\mathbb{R}\gamma$ 上的定向组成 $\mathbb{R}^d$ 的标准定向（例如取 $P_{\gamma,t}$ 中的标准基 $x_2,\dots,x_n$ 使得 $\gamma\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n=e_1\wedge\cdots\wedge e_n$）。对任意的 $f\in S(\mathbb{R}^d)$ 定义 $Rf(\gamma,t)=\int_{P_{\gamma,t}}f\omega$，称为 f 的 Radon 变换。注意 $Rf: S^{d-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

反之，对于 $g: S^{d-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，定义

$$R^*g(x)=\int_{S^{d-1}}g(\gamma,x\cdot\gamma)\,d\sigma(\gamma).$$

其中 $d\sigma(\gamma)$ 是 S^{d-1} 上的体积形式，使得 $\int_{S^{d-1}}d\sigma(\gamma)=1$。$R^*g$ 称为 g 的对偶 Radon 变换。注意 $R^*g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$.

引理：记 $R_\gamma(f)(t)=Rf(\gamma,t)\in\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，则

$$\widehat{R_\gamma(f)}(\xi)=\hat f(\xi\gamma).$$

证明：$\widehat{R_\gamma(f)}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}R_\gamma(f)(t)e^{-2\pi i\xi t}\,dt$

Date: ……………
Place: ……………

Reminders

Date: ……………
Place: ……………

Reminders

$$\cancel{= \int_{\mathbb{R}} \int_{P_{\gamma,t}} f(x)\, d} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{P_{\gamma,t}} f\, \omega_{\gamma t} \right) e^{-2\pi i s t}\, dt.$$

对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$. $x = (x\cdot\gamma)\cdot\gamma + u$. 其中 $u\cdot\gamma = 0$. 在 $\mathbb{R}^d$ 中取 $\gamma = \hat{e}_1$. 在 $\gamma^{\perp}$（即 $P_{\gamma,0}$）中取 $\hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n$. 则有

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i s (x\cdot\gamma)}\, dx = \hat{f}(s\gamma).$$

定理：若定义 $(-\Delta)^{\alpha}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)(2\pi|\xi|)^{2\alpha} e^{2\pi i \xi x}\, dx$. 则有

$$f = \frac{1}{c_d} (-\Delta)^{\frac{d-1}{2}} R^* R(f),\ \text{其中}\ c_d = (4\pi)^{\frac{d-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

证明：由引理 $Rf(\gamma,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma)\, e^{2\pi i s t}\, ds$. 于是

$$R^* R(f)(x) = \int_{S^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma)\, e^{2\pi i (x\cdot\gamma) s}\, ds\, d\sigma(\gamma)$$

$$= 2 \int_{S^{d-1}} \int_0^{\infty} \hat{f}(s\gamma)\, e^{2\pi i x\cdot(s\gamma)}\, ds\, d\sigma(\gamma)$$

$$= \frac{2}{\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi} \frac{d\xi}{|\xi|^{d-1}}$$ 所以

$$(-\Delta)^{\frac{d-1}{2}} R^* R(f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi} (2\pi|\xi|)^{d-1} \frac{d\xi}{|\xi|^{d-1}}$$

$$= c_d f.$$ □

Date:

Place:

Reminders

这里去掉了指数上的2π，为了好看

Date:

Place:

Reminders

特别地，当 $d=3$ 时，$\frac{d-1}{2}=1$，于是有

$$f=\frac{1}{2\pi}(-\Delta)(R^*Rf).$$

当 $d=2$ 时，

$$f=\frac{1}{2}(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(R^*R(f))$$

这里的 $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ 亦可用Hilbert变换计算，略

§11.A Laplace变换与Mellin变换

设 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ 是足够好的函数，可定义以下两种积分变换。

$$F(s)=\mathcal{L}f(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \qquad \text{称为Laplace变换}$$

$$\varphi(s)=\mathcal{M}f(s)=\int_0^\infty f(t)\,t^{s-1}\,dt \qquad \text{称为Mellin变换.}$$

它们与Fourier变换有密切的联系：对于Laplace变换，将 f 在 $\mathbb{R}$ 上做零延拓，则有

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-i\xi x}\,dx=\int_0^\infty f(t)e^{-(i\xi)t}\,dt=\mathcal{L}f(i\xi)$$

对于Mellin变换，定义 $F(x)=f(e^x)$，$x\in\mathbb{R}$，则

$$\hat{F}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}F(x)e^{-i\xi x}\,dx=\int_0^\infty f(t)\,t^{-i\xi}\,\frac{dt}{t}=\mathcal{M}f(-i\xi).$$

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

由这种关系不难形式地给出这两种积分变换的逆变换：

$$f(t)=L^{-1}F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}F(s)ds$$

其中 γ 是充分大的实数，使得上述积分收敛（复分析中可证明这个积分与 γ 无关）

$$f(t)=M^{-1}\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{-s}\varphi(s)ds$$

c 与 γ 意义类似。L 变换与 M 变换的各种性质也可由它们与 Fourier 变换的关系推出（直接推亦可）

L 变换的性质：

① $L(a_1f_1+a_2f_2)=a_1L(f_1)+a_2L(f_2)$

② $L(tf(t))=-F'(s)$ $\left(\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt=-\left(\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right)'\right)$

③ $L(f'(t))=sF(s)-f(0)$ $\left(\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt=\left(f(t)e^{-st}\right)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)(-se^{-st})dt\right)$

④ $L(t^nf(t))=(-1)^nF^{(n)}(s)$ ⑤ $f^{(n)}(t)=s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$

⑥ $L(\frac{1}{t}f(t))=\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$ $\left(\int_0^\infty\frac{1}{t}f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)\left(\int_s^\infty e^{-\sigma t}d\sigma\right)dt\right)$

⑦ $L(\int_0^t f(t)dt)=\frac{1}{s}F(s)$（利用③式分部积分）

⑧ $L(e^{at}f(t))=F(s-a)$（显然）

⑨ $L(f(t-a)u(t-a))=e^{-as}F(s)$（乘 $u(t-a)$ 为了使 $t<a$ 时有意义）

⑩ $L(f(at))=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ $(a>0)$

$\left(\int_0^\infty f(at)e^{-st}dt=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{s}{a}u}du\right)$

在求概率论中，Mellin卷积给出两个随机变量乘积的 →
pdf.

M变换的性质：

① $M(a_1f_1+a_2f_2)= a_1Mf_1+a_2Mf_2$.

② $M(f(t)\log t)=\varphi'(s)$.

③ $M(f'(t))=-(s-1)\varphi(s-1)\quad (s>1)$.

④ $M(f(t)(\log t)^n)=\varphi^{(n)}(s)$.

⑤ $M(f^{(n)}(t))(s)=(-1)^n(s-1)(s-2)\cdots(s-n)Mf(s-n)\quad (s>n)$

⑥ $M(f(at))(s)=a^{-s}Mf(s)\quad (a>0)$.

⑦ $M(f(t)t^{a})(s)=Mf(s+a)$

⑧ $M(f(t^{\alpha}))(s)=\frac{1}{|\alpha|}Mf(\frac{s}{\alpha})\quad (\alpha\neq 0)$.

对于L变换，可定义卷积：

$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$，于是有

$$L(f*g)(s)=\int_0^{\infty}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\infty}f(p)e^{-sp}dp\cdot\int_0^{\infty}g(q)e^{-sq}dq$$

$$=Lf(s)\,Lg(s).$$

对M变换，可定义Mellin卷积：

$f*g(t)=\int_0^{\infty}f(\tau)g(\frac{t}{\tau})\frac{d\tau}{\tau}$，则有

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

$M(f*g)(s) = M(f)(s)\,M(g)(s).$

例: $L(u(t)) = \frac{1}{s}.$ $L(t\,u(t)) = \frac{1}{s^2}.$ $L(t^{\alpha}u(t)) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$

$L(e^{at}u(t)) = \frac{1}{s-a}.$ $L(t^{\alpha}e^{at}u(t)) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-a)^{\alpha+1}}.$

$L(\sin\omega t\,u(t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$

$L(\cos\omega t\,u(t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$

Euler γ 常数.

$L(\log t\,u(t)) = -\frac{1}{s}(\log s + \gamma).$

$M(e^{-at})(s) = a^{-s}\,\Gamma(s).$

$M(e^{-at^2})(s) = \frac{1}{2}a^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma(\frac{s}{2}).$

$M(u(a-t))(s) = \frac{1}{s}a^s.$ $M(u(t-a))(s) = -\frac{a^s}{s}$ $(s<0.)$

$M(t^n u(a-t))(s) = \frac{a^{n+s}}{n+s}$ $M(t^n u(t-a))(s) = -\frac{a^{n+s}}{n+s}$ $(s<-n)$

$M(\sin t\,u(t))(s) = \Gamma(s)\sin(\frac{1}{2}\pi s).$ $(-1<s<1)$

$M(\cos t\,u(t))(s) = \Gamma(s)\cos(\frac{1}{2}\pi s)$ $(0<s<1).$

$M(\frac{1}{1+t})(s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}.$ $(0<s<1).$

$M(\frac{1}{(1+t)^{\alpha}})(s) = \frac{\Gamma(\alpha-s)\Gamma(s)}{\Gamma(\alpha)}.$ $(0<s<\alpha).$

设 $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$

$$M(\theta(t)-1)(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s-1}\,dt$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{(\pi n^2)^s} = 2\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s). \quad (*)$$

由Poisson求和公式. $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$. $(**)$

利用(*)和(**) ~~可证明~~ 再加上一些复分析的技术. 可证明ζ函数的函数方程.

$$M\left(\frac{1}{e^t-1}\right)(s) = \Gamma(s)\zeta(s). \quad (s>1).$$

应用：考虑如下ODE:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (*)$$

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}.$$

对(*)做Laplace变换. 设 $\mathcal{L}y = Y$, $\mathcal{L}f = F$ 得

$$a_n\left(s^n Y(s) - (s^{n-1}c_0 + s^{n-2}c_1 + \cdots + c_{n-1})\right)$$

$$+ a_{n-1}\left(s^{n-1}Y(s) - (s^{n-2}c_0 + s^{n-3}c_1 + \cdots + c_{n-2})\right)$$

$$+ \cdots + a_0 Y(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}\left(F(s) + P(s)\right). \quad (**)$$

接下来对(**)做反变换即可. 这个反变换一般来说不需要用积分计算. 因为常见的问题中f是周期函数, 于是F是有理的. 因此Y也有理. 特别地, 若 $f \equiv 0$, 则 $Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$. 右边可展开为部分分式之和

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{B_i}{(s-\alpha_i)^{m_i}}.$$

接下来. 对右边反查Laplace变换表即可知Y的反变换是什么.

Date:
Place:
Reminders

Fourier分析复习

1. ~~一般三角级数与Fourier级数~~.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$\longrightarrow f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}$$ （主值意义下）

定理(Abel-Dirichlet) 若 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n-c_{n+1}|$ 收敛（有界变差）且 $c_n\to 0$.

则 $f(x)$ 在 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<\pi)$ 上一致收敛.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log(n+1)}$，… 在相应的区间上一致收敛.

定理(Weierstrass) 若 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|$ 收敛. 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对一致收敛

$\Rightarrow$ i) 若 $|c_n|=O(\frac{1}{n^p})$, $p>1$. 则 f 绝对一致收敛.

ii) 若 $|c_n|=O(\frac{1}{n^p})$, $p>k+1$ $(k\in\mathbb{N})$. 则 f k阶可导. 且

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(in)^ke^{inx}$$

计算：给定 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}$. 欲求和函数（设 $z=e^{ix}$. 则变为 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_nz^n$）

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

2. 均方收敛性.

$R^p[a,b] = \left(R[a,b], \|\cdot\|_p\right)$.

在 $R^2[a,b]$ 上定义 $\langle\, ,\, \rangle : R^2 \times R^2 \to \mathbb{R}$

$(f, g) \longmapsto \langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$

$R(S^1) = \{ f \in R[0, 2\pi] \mid f(0) = f(2\pi) \}$.

$e_n(x) = e^{inx}$. 则 $\hat{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_n$ 构成标准正交向量

$f \in R(S^1) \rightsquigarrow c_n = \frac{\langle e_n, f\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle}$. $f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$

定理 (均方收敛) $f \in R(S^1)$. $S_N = \sum_{n=-N}^{N} \langle \hat{e}_n, f\rangle \hat{e}_n$

则 $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N\|_2 = 0$.

引理1: $C[a,b]$ 在 $R^1[a,b]$ 与 $R^2[a,b]$ 中稠密.

引理2: $\|f - S_N\|_2 \le \|f - T_N\|_2$. $\forall T_N$

证明: 引理2 + 第二 Weierstrass $\Rightarrow$ 连续情形 + 引理1 $\Rightarrow$ R可积情形 □.

$\Rightarrow \|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$. 或写为 (Parseval 等式)

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

$\Rightarrow$ 若 $f \in R(S^1)$. 则 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ 必收敛. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log(n+1)}$ 不是R

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

⇒ 唯一性：若 $f, g \in R(S^1)$ 有相同的 Fourier 级数，则 $f=g$ a.e.

⇒ 连续情形：若 $f \in C(S^1)$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n| < \infty$ 则 f 的 Fourier 级数绝对一致收敛到 f

⇒ $f, g \in R(S^1)$. ~~则~~ $f = \sum c_n e^{inx}$. $g = \sum d_n e^{inx}$

$$\langle f, g\rangle = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{c}_n d_n \quad (\text{Parseval 等式})$$

⇒ $f \in R(S^1)$. 则对 $\forall [a,b] \subseteq [-\pi,\pi]$.

(逐项积分)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_a^b e^{inx}\,dx. \quad (\text{Fourier 级数[illegible]})$$

计算：x^n 在 $[-\pi,\pi]$ 上，x^n 在 $[0,\pi]$ 上 (奇偶延拓)

$e^{\alpha x}$, $e^{i\alpha x}$, $\cos(\alpha x)$ $\sin(\alpha x)$ $\cosh(\alpha x)$, $\sinh(\alpha x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上.

$$\Rightarrow \cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} \cos nx$$

$$x=0 \Rightarrow \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}. \qquad x=\pi \Rightarrow \pi\cot\alpha\pi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha+n}.$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\alpha=\tfrac{1}{2}-\beta \Rightarrow \frac{\pi}{\cos\beta\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}-\beta} \qquad \sum \frac{1}{n^2-\alpha^2} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2+\alpha^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = i\alpha \Rightarrow \frac{\pi}{\cosh\alpha\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}-i\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{\alpha^2+(n+\frac{1}{2})^2}$$

$\pi\,\mathrm{sech}(\alpha\pi)$

$$\sum \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^k}. \quad \sum \frac{1}{(n^2+\alpha^2)^k},$$

$$\zeta(2k) = \sum \frac{1}{n^{2k}}$$

Date:
Place:

Reminders

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Date:
Place:

Reminders

3. Cesàro 与 Abel 可和性.

$$S_N=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \quad \sigma_N=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n.$$

引理: i) $S_N(x)=(f*D_N)(x)$. ii) $\sigma_N(x)=(f*F_N)(x)$.

$$D_N(x)=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}. \quad F_N(x)=\frac{1}{N}\frac{\sin^2\frac{Nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\cancel{A(r)}\ A_r(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

引理: i) 当 $r\in[0,1)$ 时 $A_r(x)$ 绝对且收敛,
ii) $A_r(x)=(f*P_r)(x)$. $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$.

卷积性质: 线性性 ~~乘~~交换性, 结合性. 连续性.（双连续）$\widehat{(f*g)}_n=\hat{f}_n\hat{g}_n$.

好核: $\{K_\alpha(x)\}$ 是好核, 若 $(\alpha\in A\subseteq\mathbb{R}_\infty$, $\alpha_0\in A$ 极限点.

i) $\forall\alpha\in A$. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_\alpha(x)dx=1$. $\quad (K_\alpha\in R(S^1))$

ii) $\exists M>0$ s.t. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\alpha(x)|dx\le M$.

iii) $\forall\delta>0$ $\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_{\delta\le|x|\le\pi}|K_\alpha(x)|dx=0$.

(若 $K_\alpha\ge0$, 则 i) ⇒ ii))

Date:
Place:
Reminders

i) 好核性质: $\{K_\alpha\}$ 好核 $f \in R(S^1)$, f在x_0处连续 则

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} (f * K_\alpha)(x_0) = f(x_0).$$

ii) 若$\{K_\alpha\}$为偶好核, $f \in R(S^1)$, f在x_0左右极限都存在, 则 $\lim_{\alpha \to \alpha_0} (f * K_\alpha)(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+)+f(x_0-)\right)$.

$\Rightarrow$ 若 $f \in C(S^1)$, 则 $f * K_\alpha \rightrightarrows f$.

定理: F_N, P_r 都是好核 (D_N不是好核). 于是有Fejer定理及Abel版.

$\Rightarrow$ i) $f \in R(S^1)$, $c_n = 0$ 则f在连续点处为零 (局部唯一性).

ii) $C(S^1)$中函数可由三角多项式一致逼近 (Fejer定理).

iii) $C[a,b]$中函数可由多项式一致逼近.

4. 函数点收敛.

定理(R-L) $f \in R[a,b]$ (或在$[a,b]$上广义R可积且绝对广义R可积)

则 $$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0.$$

(变化: $f \in R[a,b]$, 则

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) |\cos \lambda x| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx.)$$

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

$$S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x+y)+f(x-y)\big)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\,dy$$

引理：若 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N(x)=S$，则对 $\forall\delta>0$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\big(f(x+y)+f(x-y)\big)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\,dy=S.$$

⇒ 局部化原理：若 f,g 在 x_0 附近相同，则其 Fourier 级数同时收敛或发散，若收敛则收敛到相同的值

定理(Dini) $f\in R(S^1)$，$x\in\mathbb{R}$，$S\in\mathbb{C}$。

$$\varphi(y)=f(x+y)+f(x-y)-2S.$$

若 $\exists\delta>0$ s.t. $\int_0^{\delta}\frac{\varphi(y)}{y}\,dy$ 广义R可积且广义绝对R可积。

则 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N(x)=S$.

⇒ Hölder条件：若 f 在 x_0 处左右极限都存在，且 $\exists\delta>0$，$L>0$，$\alpha\in(0,1]$ s.t. $\forall y\in(0,\delta)$

$$|f(x\pm y)-f(x\pm)|\le Ly^{\alpha}$$

则 $S_N(x)\to\frac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big)$

⇒ i) 若 f 在 x_0 处连续，且左右导数存在，则 $S_N(x_0)\to f(x_0)$

ii) 若 f 在 x_0 处左右极限存在，且左右广义导数存在，则

$$S_N(x_0)\to\frac{1}{2}\big(f(x_0+)+f(x_0-)\big).$$

iii) 若 ……

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

iv) 若 f 分段可微且连续 则 $S_N(x_0)\to f(x_0)$

v) 若 $f\in C^1$. 则 $S_N(x_0)\to f(x_0)$.

5. 应用. 等周不等式, Weyl 等分布定理. (不作要求)

6 $\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换.

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx. \quad (f\in R).$$

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi.$$

定理: $f\in R$. 则 $\hat{f}\in UC$.

性质: ① $f \mapsto \hat{f}$ 是线性的.

② $(f(x-x_0))^\wedge(\xi)=e^{-2\pi i x_0\xi}\hat{f}(\xi)$.

③ $(e^{2\pi i\xi_0 x}f(x))^\wedge(\xi)=\hat{f}(\xi-\xi_0)$.

④ $(f(ax))^\wedge(\xi)=\frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\xi}{a})$

⑤ $(\overline{f(x)})^\wedge(\xi)=\overline{\hat{f}(-\xi)}$

⑥ $\hat{f}(0)=\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

⑦ $\lim_{\xi\to\infty}|\hat{f}(\xi)|=0$. ⑧ $|\hat{f}(\xi)|\le\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx$.

Date:
Place:

Reminders

若 $f, g\in L(\mathbb{R})$ 满足

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|dx=0. \rightarrow$$

则 f 叫在 L^1 意义下可导，且 g 叫 f 的 L^1 导数

Date:
Place:

Reminders

⑨ $\hat{f}(\xi)$ 做为含参变量积分对 $\xi\in\mathbb{R}$ 一致收敛

⑩ 若 $f\in L(\mathbb{R})$. $xf\in L(\mathbb{R})$. 则 $\hat{f}(\xi)$ 可导，且

$$\hat{f}'(\xi)=(-2\pi i)\widehat{xf}(\xi).$$

⑪ 设 f 在 L^1 意义下可导，且 g 是 f 的 L^1 导数，则

$$\hat{g}(\xi)=2\pi i\xi\hat{f}(\xi).$$

⑫ $f, g\in L(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)\hat{g}(x)dx.$$

卷积： $f, g\in L(\mathbb{R})$. $(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy$.

定理：i) 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}$. $(f*g)(x)$ 收敛 (Fubini).

ii) 对 $f*g$ 不存在的点补充定义适当的值 ← 不作要求

则 $f*g\in L(\mathbb{R})$.

iii) $\widehat{f*g}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

不作要求 → 定理：若 $f\in L(\mathbb{R})$. $\hat{f}\in L(\mathbb{R})$. 则

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}dx \quad a.e.$$

~~→ 若 $f\in C\cap L(\mathbb{R})$. $\hat{f}\in L(\mathbb{R})$ 则~~

Date:
Place:
Reminders

固定一个$\varepsilon>0$.

Planchrel公式.

Date:
Place:
Reminders

速降函数

函数

7. Schwartz空间S ε-慢降空间

· $f\in C^\infty(\mathbb{R})$. 若对$\forall k,l\in\mathbb{N}$. $|x^k f^{(l)}(x)|$有界

则称f为速降函数. $\longrightarrow S$

· $f\in C(\mathbb{R})$. 若存在$A>0$ s.t. $|f(x)|<\frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

则称f为ε-慢降函数 $\longrightarrow M_\varepsilon$.

性质: $f\in S\Rightarrow f'\in S$. $xf\in S$.

推论: $f\in S\Rightarrow \hat{f}\in S$.

利用Gauss核的好核性可证S上的Fourier反演公式.

以及$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$ (Plancheral公式)

性质: i) $f\in M_\varepsilon\Rightarrow f\in \mathbb{R}$ (于是$\hat{f}$存在).

ii) 若$f\in M_\varepsilon$. $\hat{f}\in M_\varepsilon$. 则$\exists L>0$ s.t.

$|f(x+h)-f(x)|\le L\cdot|h|^\varepsilon$. (Hölder连续).

iii) 若$f\in M_\varepsilon$. $\hat{f}\in M_\varepsilon$. 则Fourier反演公式成立.

(利用Hölder性质与Dini判据)

iv) 若$f,g\in M_\varepsilon$. 则$f*g\in M_\varepsilon$.

v) 若$f\in M_\varepsilon$. $\hat{f}\in M_\varepsilon$. 则$\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2$.

~~($f\in M_\varepsilon\Rightarrow \hat{f}\in M_\varepsilon$)~~

Date:
Place:

Reminders

$\mathbb{R}^d$ 中的 Fourier 变换以及 Laplace, Mellin 变换不作要求. →

Date:
Place:

Reminders

§8 应用

Poisson 求和公式: $f\in S$ (或 M_ε) 则

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)e^{2\pi i\frac{n}{T}x}$$

例1: ① $\sum f(nT)=\sum\frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{n}{T}\right)$

$\sum f(n)=\sum\hat{f}(n)$.

② 若 $f\in M_\varepsilon$, $\mathrm{supp}\,\hat{f}\subset[-M,M]$, 当 $0<T<\frac{1}{M}$ 时, 有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT)=\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx.$$ 例如 当 $0<T<\pi$ 时,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sin^2(x+nT)}{(x+nT)^2}=\cancel{\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}\frac{s}{x^2}}\ \frac{\pi}{T}.$$

采样定理: $f\in S$, $\mathrm{supp}\,\hat{f}\subseteq[-M,M]$ 则

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(\frac{n}{2M}\right)\mathrm{sinc}(2Mx-n).\qquad \mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

$\Rightarrow$ 若 $f,\hat{f}$ 都紧支, 则 $f\equiv 0$.

Heisenberg 不确定原理 (不作要求).

课堂上讲过 $\sum \frac{\cos nx}{n!}$ 和 $\sum \frac{\sin nx}{n!}$ 的求法. →
此题只不过把那里的计算反过来. 严格来说
这里的展开需要复分析的知识, 但形式
的计算已经可以做了. 这个题其实就是考
出勤, 而非数学知识. 如果课上没见过或
没记住. 想靠积分算出Fourier系数, 几乎是
不可能的. 对于知道答案的人来说, 结论
几乎是显然的.

此题两个结论都是课上讲过的定理 →
和推论, 也属于送分题.

期末试题试做. (卷A).

一.(15分) 求下列函数的Fourier级数.

i) $u(x)=e^{\cos x}\cos(\sin x)$; ii) $v(x)=e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

解: $u(x)+iv(x)=e^{\cos x}\left(\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)\right)$

$$=e^{\cos x}e^{i\sin x}=e^{\cos x+i\sin x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos x+i\sin x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx+i\sin nx}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$$ 所以

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!},\quad v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}; \quad \square.$$

(15分)

二. i) 设 $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是两个周期为 2π 的Riemann可积函数. 求证: 若它们具有相同的Fourier系数, 则它们几乎处处相等.

ii) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是周期为 2π 的连续函数, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是它的Fourier系数. 求证: 若 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|<+\infty$, 则 f 的Fourier级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 f.

Date:

Place:

Reminders

评分标准：i) 7分. ii) 8分.

i)中设 S_N 1分. ~~均方收敛表述~~ 2分.

求出 $\|f-g\|_2=0$ 2分. 结论 a.e. 相等 2分.

ii)中 g一致收敛 2分. g与f有相同的Fourier系数 3分. $f=g$ (a.e.) (f, g 连续) $\Rightarrow f=g$ 3分.

第一题其它解析：

$$e^{\cos x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^n x}{n!}.\quad \cos(\sin x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin^{2m}x}{(2m)!}.$$

$$e^{\cos x}\cdot\cos\sin x=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{n!\,m!}\cos^n x\sin^{2m}x=\cdots$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\cos Nx}{N!},$$

其中用到 $\cos Nx=\sum_{n=0}(\ )\cos^{\cdot}x\cdot\sin^{\cdot}x$.

v(x)同理.

Date:

Place:

Reminders

证明：i) 设 f, g 的 Fourier 系数为 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

定义 $S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{inx}$. 由均方收敛定理.

$\lim_{N\to\infty}\|f-S_N\|_2=0$. $\lim_{N\to\infty}\|g-S_N\|_2=0$. 于是有

$$0\le\|f-g\|_2\le\|f-S_N\|_2+\|g-S_N\|_2\to 0$$

所以 $\|f-g\|_2=0$. 所以 $f=g$ a.e.

~~ii) 因为 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|<+\infty$, 则 $g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}$ 一致收敛到 g, 且 g连续. 现在 f 和 g 具有相同的 Fourier 系数, 所以 $f=g$ a.e. 另一方面 f 和 g 连续~~

ii) 因为 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|<+\infty$. 设 $g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{inx}$, 右边的级数一致收敛 (Weierstrass 判别法). 所以 g 连续.

考虑 g 的 Fourier 系数 (设其为 $\tilde{c}_n$, $n\in\mathbb{Z}$). 有

$$\tilde{c}_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m e^{i(m-n)x}\right)dx$$

因为里面的级数一致收敛, 所以可逐项积分, 于是有

$$\tilde{c}_n=\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)x}dx\right)=c_n.$$

所以 g 和 f 有相同的 Fourier 系数, 所以 $f=g$ a.e.

又因为 f, g 连续. 所以 $f=g$.

(若 $f(x_0)\neq g(x_0)$. 对 $\forall\delta>0$. 必存在 $y\in B_\delta(x_0)$ 使 $f(y)=g(y)$.

17.5

此题所涉函数为Stein书上的原题，这里只 → 增加了两个级数求和，一个是直接取值一个是利用Parseval定理，都是课堂上讲过的标准题目.

评分标准: i) ~~5分~~ 10 ii) S_1 5分 S_2 5分,

(若不然, f和g就不是a.e.相等). 依次取 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 得 $y_1, y_2, \cdots$ 满足 $y_n \to x_0$, 因 $f(y_n) = g(y_n)$, 由f, g连续可知 $f(x_0) = g(x_0)$, 矛盾). $\square$

(20分)
三. 设 f 是周期为2π的奇函数, 且对于 $x \in [0, \pi]$ 有
$$f(x) = x(\pi - x).$$

i) 求 f 的 Fourier 级数.

ii) 计算无穷级数的值
$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

解: i) f为奇函数, 所以其Fourier级数为正弦级数
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} x(\pi - x) \, d\left(\frac{\cos nx}{-n}\right)$$

$$= \cancel{\left[x(\pi - x) \frac{\cos nx}{-n}\right]_0^{\pi}} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, (\pi - 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\cancel{\left[(\pi - 2x) \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, (-2) \, dx \right)$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$$= \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n^2}\left(\frac{\cos nx}{-n}\right)_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right) = \frac{2}{n^3}\left(1+(-1)^{n-1}\right) = \begin{cases} \frac{4}{(2k+1)^3} & n=2k+1 \\ 0 & n=2k \end{cases}$$

于是 $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$.

ii) 取 $x=\frac{\pi}{2}$. 注意 f 在 $\frac{\pi}{2}$ 处连续且可导. 所以 Fourier 级数收敛, 于是有

$$\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{(2k+1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^3}{32} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = S_1.$$

为求 S_2. 对 f 的 Fourier 级数应用 Parseval 等式, 则有 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$.

左边 $= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2(\pi-x)^2 dx = \cancel{\frac{2}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^3}{6}\right)}$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi^2\cdot\frac{\pi^3}{3} - 2\pi\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^5}{5}\right) = \frac{\pi^4}{15}.$$

Date:
Place:

Reminders

此题第i)问几乎是显然的. 只不过表述看着很复杂. 而第ii)问不易想到. 为此卷主要拉分题之一.

Date:
Place:

Reminders

$$\text{左边} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)^6}, \text{ 所以有}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{8^2 \times 15} = \frac{\pi^6}{2^6 \times 15}. \text{ 另一方面}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^6}$$

$$= \frac{\pi^6}{2^6 \times 15} + \frac{1}{2^6} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}, \text{ 即}$$

$$S_2 = \frac{\pi^6}{2^6 \times 15} + \frac{1}{2^6} S_2, \text{ 由此可解得}$$

$$S_2 = \frac{\pi^6}{(2^6-1)\times 15} = \frac{\pi^6}{945}. \qquad \text{D.}$$

四(15分) 设 S 是 Schwartz 速降函数空间, $\mathcal{F}: S \to S$ 是其上的 Fourier 变换. 定义运算 $P: S \to S$, $f \mapsto P(f) = \frac{1}{2}\left(f \cdot \mathcal{F}^2(f) + \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}^3(f)\right)$

其中 $\cdot$ 表示乘法, $*$ 表示卷积.

i) 求证: 对于任意的 $f \in S$, $\mathcal{F}(P(f)) = P(f)$.

ii) 对于 $g(x) = e^{-\pi x^2}$, 试求一个 $f \in S$, 使得 $g = P(f)$.

Date:
Place:
Reminders

评分标准：i) 10分. ii) 5分.

i) 几乎没有做错的可能, 所以是送分的.
ii) 猜不到答案的话肯定做不出来. 所以分值或0或5.

此题其实是Paley-Wiener定理的一种特殊情况. 证明并不难. 但后续发展很多. 可涉及很深的数学. 假设f为偶函数只是为了使f是实的. 其实不是本质的. 在P-W理论中, ξ可取复数那时的结论更有意义一些.

Date:
Place:
Reminders

证明：i)

$F(P(f)) = F\left(\frac{1}{2}\left(f\cdot F^2(f) + F(f) * F^3(f)\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(F(f\cdot F^2(f)) + F(F(f) * F^3(f))\right)$

$= \frac{1}{2}\left(F(f) * F^3(f) + F^2(f)\cdot F^4(f)\right)$

因为 $F^4 = id$. 所以 $F(P(f)) = P(f)$.

ii) 取 $f(x) = e^{-\frac{\pi}{2}x^2} = \sqrt{g(x)}$. 显然 $f\in S$.

$f(x)\cdot F^2(f)(x) = f(x)\cdot f(-x) = f^2(x) = g(x)$.

而 $F(f) * F^3(f) = F^{-1}(f\cdot F^2(f)) = F^{-1}(g) = g$.

所以 $P(f) = \frac{1}{2}(g+g) = g$. □.

五 (15分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是偶函数, 满足 $\mathrm{supp} f \subseteq [-A, A]$ 且 f 在 $[-A, A]$ 上 Riemann 可积. 设 $\hat{f}(\xi)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 变换, 求证：

i) $\hat{f}(\xi)$ 是一个光滑函数.

ii) $\hat{f}(\xi)$ 可在 $\xi=0$ 处展开为收敛半径为无穷大的 Taylor 级数.

Date:
Place:

Reminders

评分标准：i) 7分. ii) 8分. 具体细则 →
看学生答的情况.

Date:
Place:

Reminders

证明：i) $\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$

$=\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi\xi x)dx=2\int_0^A f(x)\cos(2\pi\xi x)dx.$

根据含参积分的性质. ~~上式右端可求任意阶导数.~~
~~于是有~~对上式右端求导运算可与积分交换. 于是有

$$\hat{f}^{(n)}(\xi)=2\int_0^A f(x)\cos^{(n)}(2\pi\xi x)dx. \quad (*)$$

ii) 由(*)可知

$$\hat{f}^{(n)}(0)=\begin{cases}2(-1)^k(2\pi)^{2k}\int_0^A f(x)x^{2k}dx, & n=2k\\ 0 & n=2k+1\end{cases}$$

所以 $\hat{f}$ 在 $\xi=0$ 附近的 Taylor 级数为

$$\hat{f}(\xi)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k(2\pi)^{2k}}{(2k)!}\left(\int_0^A f(x)x^{2k}dx\right)\cdot\xi^{2k}.$$ 记 ξ^{2k} 的系数为 a_{2k}

则有 $|a_{2k}|\leq\frac{2(2\pi)^{2k}}{(2k)!}\cdot M\cdot\frac{A^{2k+1}}{2k+1}=\frac{M}{\pi}\frac{(2\pi A)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(设 $\sup|f(x)|=M$)

于是 $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\xi^{2k}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_{2k}|\,|\xi|^{2k}$

$$\le \frac{M}{\pi|\xi|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\pi A|\xi|)^{2k+1}}{(2k+1)!} < \frac{M}{\pi|\xi|}\left(e^{2\pi A|\xi|}-1\right)$$

所以对任意的 $\xi\in\mathbb{R}$，$\hat{f}(\xi)$ 在 $\xi=0$ 附近的 Taylor 级数都收敛（比较判别法）。再由对 a_k 的阶的估计可知收敛到的极限就是它自己（幂级数中的基本定理） $\square$

这是一个非常著名的 $\mathcal{F}(f)=f$ 的例子。第四的证法是用留数定理算。我这里利用一个特殊的 Fourier 级数。这里的计算与第四题略有重复，不过也没有别的办法。其它类型的计算更难。大定理的证明也不敢考。毕竟这次是打算给水的。

评分标准：i) 5分。ii) 5分（与四一致）
iii) 10分。

六（20分）设 $\alpha\in\mathbb{R}$，f 是周期为 2π 的奇函数，且对于 $x\in(0,\pi)$，有 $f(x)=\cosh(\alpha(2\pi-x))$。

i) 求 f 的 Fourier 级数。

ii) 求证：$\dfrac{\pi}{\cosh\pi\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{\alpha^2+(n+\frac{1}{2})^2}$。

iii) 计算 $g(x)=\dfrac{1}{\cosh\pi x}$ 的 Fourier 变换。

解：i) 与四类似，$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^\pi f(x) \sin nx\,dx = \int_0^\pi \cosh(\alpha(2x-\pi)) \sin nx\,dx$$

$$= \int_0^\pi \cosh(\alpha(2x-\pi))\, d\left(\frac{\cos nx}{-n}\right)$$

$$= \left(\cosh(\alpha(2x-\pi))\cdot\frac{\cos nx}{-n}\right)\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\cdot \sinh(\alpha(2x-\pi))\cdot 2\alpha\,dx$$

$$= \cosh\alpha\pi\cdot\left(\frac{(-1)^{n-1}}{+n} + \frac{1}{+n}\right) + \frac{2\alpha}{n}\int_0^\pi \sinh(\alpha(2x-\pi))\, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \cosh\alpha\pi\cdot\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} + \frac{2\alpha}{n}\left(\cancel{\left(\sinh\alpha(2x-\pi)\cdot\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^\pi}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\cdot\cosh(\alpha(2x-\pi))\cdot 2\alpha\,dx\right)$$

$$= \cosh(\alpha\pi)\cdot\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} - \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}b_n.$$

$$\Rightarrow b_n = \begin{cases} \dfrac{\cosh\alpha\pi}{\pi}\cdot\dfrac{2k+1}{\alpha^2+(k+\frac{1}{2})^2} & n=2k+1 \\ 0 & n=2k\text{，平是} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cosh\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{2k+1}{\alpha^2+(k+\frac{1}{2})^2}\sin(2k+1)x.$$

Date:
Place:

Reminders

此题也可利用一致收敛性将级数与积分 → 换序. 另外. 直接将积分中的 $\cos 2\pi\xi x$ 换成前面的级数也可做出来 但 得用到余弦的 Poisson 积分, 不容易记~~得~~住.

Date:
Place:

Fourier级数

Reminders

的什么收敛

ii) 取 $x=\frac{\pi}{2}$. 注意 f 在 x 处 连续且 可导. 所以有

$$\cosh\alpha\left(2\cdot\frac{\pi}{2}-\pi\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cosh\pi\alpha}{\pi}\frac{2k+1}{\alpha^2+(k+\frac{1}{2})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{\cosh\pi\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{\alpha^2+(n+\frac{1}{2})^2}.$$

iii) $$\hat{g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i\xi x}}{\cosh\pi x}dx=\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos 2\pi\xi x}{\cosh\pi x}dx$$

$$=4\int_0^\infty \cos 2\pi\xi x\, e^{-\pi x}\frac{1}{1+e^{-2\pi x}}dx$$

$$=4\int_0^\infty \cos 2\pi\xi x\, e^{-\pi x}\left(\sum_{n=0}^{N}\left(-e^{-2\pi x}\right)^n+\frac{\left(-e^{-2\pi x}\right)^{N+1}}{1+e^{-2\pi x}}\right)dx$$

$$=4\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^\infty \cos 2\pi\xi x\, e^{-2\pi(n+\frac{1}{2})x}dx$$

$$+\underbrace{4\int_0^\infty \cos 2\pi\xi x\,\frac{(-1)^{N+1}\cdot e^{-2\pi(N+1)x}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx}_{R_N.}$$

Date:
Place:

Reminders

这个双曲三角恒等式不易想到，故先放弃，→

Date:
Place:

Reminders

$$|R_N| \le 4\int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-2\pi(N+1)x}\,dx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2\pi(N+1)} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$ 所以当 $N\to\infty$ 时有 $R_N\to 0$.

于是 $$g(\xi) = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2\pi(n+\frac{1}{2})}{(2\pi\xi)^2+(2\pi(n+\frac{1}{2}))^2}$$

$$= \frac{4}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+\frac{1}{2})}{\xi^2+(n+\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\cosh\pi\xi} = \frac{1}{\cosh\pi\xi} \qquad \square.$$

(耗时约一个半小时，实考时间三个小时).

其他放弃了的题目：

题六

$$(g*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh\pi(x-y)}\,\frac{1}{\cosh\pi y}\,dy$$

$\cancel{\cosh\pi x}$

$$= \frac{1}{\sinh\pi x}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sinh\pi(x-y)}{\cosh\pi(x-y)} + \frac{\sinh\pi y}{\cosh\pi y}\right)dy$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$$= \frac{1}{\pi \sinh \pi x}\left(\log\frac{\cosh \pi y}{\cosh \pi(x-y)}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2x}{\sinh \pi x}.$$

$$\widehat{g^2}(\xi) = \hat{g} * \hat{g}(\xi) = g * g(\xi) = \frac{2\xi}{\sinh \pi \xi}.$$

进一步地，利用 $g^3 = \frac{g}{2} - \frac{g''}{2\pi^2}$, $g^4 = \frac{2}{3}g^2 - \frac{(g^2)''}{6\pi^2}$

$$g^{k+2} = \frac{1}{k(k+1)}\left(k^2 - \frac{\partial_x^2}{\pi^2}\right)(g^k), \ldots$$

可以求出所有 g^k 的 Fourier 变换，或 g^{*k}（k次卷积）。

本题参考 Poisson 求和公式或采样定理。但计算太繁了，就算了。