Date:
Place:
Reminders

# 黎曼曲面（下册）

## §9. Riemann-Rock定理

设M是一个RS. U是M上的开集. $f: U \to \mathbb{P}^1$ 是U上的亚纯函数(即将$\mathbb{P}^1$视为$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, 且$f(U)\neq\{\infty\}$), 于是 $f^{-1}(\infty)$ 是U的真子集. 它一定是离散的(否则 $\frac{1}{f}$ 在U上的零点集有聚点, 由全纯函数唯一性定理, $\frac{1}{f}$ 必定恒为零, 于是 $f\equiv\infty$).

类似地, 若 $f(U)\neq\{0\}$, 即 f 不恒为零, 则 $f^{-1}(0)$ 也是U的离散子集.

对于 $p\in U$. 考虑 f 在 p 附近的 Laurent 展开. 不妨设 p 附近的局部坐标将 p 映为 $0\in\mathbb{C}$, 于是 $\exists N\in\mathbb{Z}$ (or $\mathbb{N}$)

$$f(z) = a_{-N} z^{-N} + a_{-N+1} z^{-N+1} + \cdots$$

它又可写为 $f(z)=z^m g(z)$. 其中 $m\in\mathbb{Z}$, g 是一个全纯函数且 $g(0)\neq0$, 取充分小的半径 $r>0$, 可使当 $|z|<r$ 时 $g(z)\neq0$. 所以我们证明了如下结果:

引理-定义: 对于 $\forall p\in M$, 以及 p 附近不恒为零的亚纯函数 f. 存在唯一的 $m\in\mathbb{Z}$, 和 p 附近的处处非零的全纯函数 g 使得 $f(z)=z^m\cdot g(z)$. 这个 m 叫 f 在 p 处的阶, 记为 $v_p(f)$.

(唯一是因为, 若 $z^{m_1}g_1(z)=z^{m_2}g_2(z)$, 且 $m_2>m_1$, 则 $g_1(z)=z^{m_2-m_1}g_2(z)$, 取 $z=0$ 得 $g_1(0)=0$, 矛盾)

除子：divisor. 又译为因子.

这个引理还可用层论的语言重写. 设 $\mathcal{M}^*$ 是M上不恒为零的亚纯函数芽构成的乘法群层. $\mathcal{O}^*$ 是 $\mathcal{M}^*$ 中恒不为零的全纯函数构成的子层, 则上述定理等价于

引理：对 $\forall p \in M$, $(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)_p \cong \mathbb{Z}$.

定义. $D = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, 叫 M 的除子层.

对于 $U \overset{开}{\subseteq} M$, $D(U) = \{d : U \to \mathbb{Z} \mid \operatorname{supp} d \text{ 离散}\}$.
d可记为 $d = \sum_{p \in U} d(p) p$. 若M紧, 则对于 $d \in M$, $d = \sum_{p \in M} d(p) p$ 一定是有限和. 设 $\operatorname{supp}(d) = \{p_1, \cdots, p_k\}$, $d(p_i) = m_i$, 则 d 又可写为 $d = \sum_{i=1}^{k} m_i p_i$, 这是除子层 D 的另一种定义. 由这种定义可看出, D显然是一个软层(其实是细层), 于是对于 $q \geq 1$, $H^q(M, D) = 0$.

古典函数论的一个基本问题是: 对于一个RS M, 在M上是否存在足够多的亚纯函数? 在这个问题中, 恒为零的亚纯函数或者仅和已知亚纯函数相差一个倍数的函数显然是我们不感兴趣的, 所以这个问题实际上是在问 $\Gamma(\mathcal{M}^*)/\Gamma(\mathcal{O}^*) = H^0(M, \mathcal{M}^*)/H^0(M, \mathcal{O}^*)$ 有多大? 有何结构?

考虑层的短正合列 $0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to D \to 0$, 它导出上同调的长正合列:

除子层列

$$0 \to H^0(\mathcal{O}^*) \to H^0(\mathcal{M}^*) \to H^0(D)$$
$$\to H^1(\mathcal{O}^*) \to H^1(\mathcal{M}^*) \to H^1(D) = 0.$$

$H^2(\mathcal{O})=0$ 是显然的. $H^1(\mathcal{O})=0$ 也叫 → Mittag-Leffler定理.

定理(Weierstrass) 若M是$\mathbb{C}$的连通开集, 则 $H^1(\mathcal{O}^*)=0$. 于是 $H^1(\mathcal{M}^*)=0$, 且 $0\to\Gamma(\mathcal{O}^*)\to\Gamma(\mathcal{M}^*)\to\Gamma(\mathcal{D})\to 0$ 正合.

证明: 考虑指数层列 $0\to\mathbb{Z}\to\mathcal{O}\to\mathcal{O}^*\to 0$, 长导出 $H^1(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}^*)\to H^2(\mathbb{Z})\to H^2(\mathcal{O})$. 由Dolbeault定理那一章的某推论, $H^1(\mathcal{O})\cong H^2(\mathcal{O})\cong 0$. 于是 $H^1(\mathcal{O}^*)\cong H^2(\mathbb{Z})$. 但 $H^2(\mathbb{Z})\cong 0$, 于是 $H^1(\mathcal{O}^*)\cong 0$. □

注: ① $H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 分类 M上的全纯线丛. 上述定理亦说明在$\mathbb{C}$的连通开集上, 任何全纯线丛都同构于平凡丛.

② 此定理对任意非紧RS亦成立, 因为对于非紧RS同样有 $H^1(\mathcal{O})\cong H^2(\mathcal{O})\cong 0$, $H^2(\mathbb{Z})\cong 0$. 但目前证不了前者. 特别地, 非紧RS上的全纯线丛也都是平凡的.

③ 对于紧RS, 仍有 $H^2(\mathcal{O})\cong 0$ (Dolbeault定理) 但 $H^1(\mathcal{O})$ 一般不是零. 因为 $\dim H^1(\mathcal{O})=h^{1,0}=h^{0,1}$, $h^{10}+h^{01}=b_1=2g$. 于是 $h^{1,0}=g$. 所以指数层列的长正合序列

$$0\to\underset{\mathbb{Z}}{\Gamma(\mathbb{Z})}\to\underset{\mathbb{C}}{\Gamma(\mathcal{O})}\to\underset{\mathbb{C}^*}{\Gamma(\mathcal{O}^*)}\xrightarrow{0}\underset{\mathbb{Z}^{2g}}{H^1(\mathbb{Z})}\to\underset{\mathbb{C}^g}{H^1(\mathcal{O})}\to H^1(\mathcal{O}^*)\xrightarrow{c_1}\underset{\mathbb{Z}}{H^2(\mathbb{Z})}\to 0.$$

所以有 $0\to\mathbb{Z}^{2g}\to\mathbb{C}^g\to H^1(\mathcal{O}^*)\to\mathbb{Z}\to 0$. 这是我们接下来的一个重要研究对象.

对于 $f\in\Gamma(\mathcal{M}^*)$, 可定义 $D(f)=\sum_{p\in M}v_p(f)\,p$

Date:
Place:
Reminders

主除子: principal divisor

Date:
Place:
Reminders

它显然是 M上的 一个除子, 这给出 $H^0(\mathcal{M}^*)$ 到 $H^0(D)$ 的同态.
$\nu$ 在 $H^0(D)$ 中的像叫主除子. 回到除子层列的长正合列

$$0 \to \Gamma(\mathcal{O}^*) \to \Gamma(\mathcal{M}^*) \xrightarrow{\nu} \Gamma(D) \to H^1(\mathcal{O}^*) \to H^1(\mathcal{M}^*) \to 0.$$

后面会证明 $H^1(\mathcal{M}^*) \cong 0$. ~~$\mathrm{Im}\,\nu = P(M)$.~~ ~~$\Gamma(D)/P(M)$~~

再记 $P(M) = \mathrm{Im}(\nu : \Gamma(\mathcal{M}^*) \to \Gamma(D))$. $\Gamma(D)$ 又可写为 $D(M)$

$$C(M) = D(M) / P(M).$$

$D(M)$ 叫 $M$ 的除子群, $P(M)$ 叫主除子群, $C(M)$ 叫 $M$ 的除子类群. $C(M)$ 中的元素叫做除子类. 若 $[d_1]=[d_2]$ 在 $C(M)$ 中, 则存在 $f \in \Gamma(\mathcal{M}^*)$, 使 $d_2 = d_1 + \nu(f)$. 此时也称 $d_1, d_2$ 线性等价. 于是 $C(M)$ 就是 $D(M)$ 模去由线性等价定义的等价关系后的商群. 有了这些记号, 则有

$$0 \to \Gamma(\mathcal{O}^*) \to \Gamma(\mathcal{M}^*) \to P(M) \to 0. \quad (\text{这是平凡的})$$

$$0 \to C(M) \to H^1(\mathcal{O}^*) \to 0.$$

于是 $H^1(\mathcal{O}^*) \cong C(M)$, 即全体线丛的等价类可由除子类群刻画.

现在考虑一个线丛 $L \to M$. 设 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是 $L$ 的一个局部平凡化. 则 $L$ 的截面可用一组全纯函数 $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ 给出. 它们需要满足, 在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时, 有 $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$. 其中 $g_{\alpha\beta}$ 是 $L$ 的转移函数. 我们可类似地定义亚纯截面的概念: 若 $f = \{f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{P}\}$ 是一组亚纯函数, 满足在 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 上, 有 $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$. $L$ 的亚纯截面集也构成一个层, 记为 $\mathcal{m}(L)$. 对于 $f \in \mathcal{m}^*(L)$ 以及 $p \in M$

不恒为零的亚纯截面

Date:
Place:
Reminders

有效除子：effective divisor. 也称正除子. →

Date:
Place:
Reminders

可定义 $v_p(f)=v_p(f_\alpha)$（若 $p\in U_\alpha$）. 若 $p$ 也 $\in U_\beta$. 注意 $v_p(f_\alpha)=v_p(g_{\alpha\beta}f_\beta)=v_p(g_{\alpha\beta})+v_p(f_\beta)=v_p(f_\beta)$. 所以这个定义不依赖于 $U_\alpha$ 的选取. 因此只依赖于 $f$. 特别地. 设 $d=\sum_{p\in M} v_p(f)P=\sum_{i=1}^{N} m_iP_i$. 若对 $i=1,\cdots,N$, $m_i\geq 0$. 这说明 $f$ 其实是一个全纯截面. 因此我们定义, 若 $d=\sum m_iP_i$ 满足 $m_i\geq 0$. 则称 $d$ 是一个有效除子, 并记为 $d\geq 0$.

引理：$H^1(M,\mathcal{M}^*)\cong 0 \iff$ 对 $\forall L\in H^1(M,\mathcal{O}^*)$, $\Gamma(\mathcal{M}(L))\neq 0$.

证明：$\Rightarrow$：设 $(g_{\alpha\beta})$ 是 $L$ 的一组转移函数. 它们给出 $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^*)$ 的元素. 因为 $C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^*)\subseteq C^1(\mathcal{U},\mathcal{M}^*)$. 所以 $(g_{\alpha\beta})$ 也可视为 $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{M}^*)$ 的元素. 因为 $H^1(M,\mathcal{M}^*)=0$. 所以存在 $(f_\alpha)\in C^0(\mathcal{U},\mathcal{M}^*)$, 使 $g_{\alpha\beta}=\frac{f_\beta}{f_\alpha}$. ~~所以~~ $(f_\alpha)$ 构成 $L$ 的非零亚纯截面. 于是 $\Gamma(\mathcal{M}(L))\neq 0$.

$\Leftarrow$：对于 $\xi\in H^1(M,\mathcal{M}^*)$, 因为除子层是细层. 所以必存在 $L\in H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 使 $\xi$ 是 $L$ 的像, 或者说, 可选 $\xi$ ~~应~~ 在 $C^1(\mathcal{U},\mathcal{M}^*)$ 的代表 $(g_{\alpha\beta})$, 使 $g_{\alpha\beta}\in\mathcal{O}^*(U_\alpha\cap U_\beta)$. 现在, $L$ 存在一个亚纯截面 $(f_\alpha)$. [illegible] 它满足 $f_\alpha=g_{\alpha\beta}f_\beta$. 这说明 $g_{\alpha\beta}$ 在 $C^1(\mathcal{U},\mathcal{M}^*)$ 中是恰当的. 所以对 $\forall\xi\in H^1(M,\mathcal{M}^*)$, $\xi=0$. 于是 $H^1(M,\mathcal{M}^*)\cong 0$. □

Date:
Place:
Reminders

推论：若紧RS $M$ 的亏格为0，则 $M$ 同构于 $\mathbb{P}^1$. $\longrightarrow$

证明：由定理证明，对 $\forall p\in M$ $\exists f: M\to\mathbb{P}^1$ 使得它仅在 $p$ 处有一个一阶极点. 于是对 $\forall c\in\mathbb{P}^1$. $f^{-1}(c)$ 也只含一个元素

因此 $f$ 是双射. 于是是同构. $\square$

Date:
Place:
Reminders

上述引理表明 $H^1(M, \mathcal{M}^*)=0$ 等价于 任意全纯线丛存在非零亚纯截面. 这是函数论基本问题的一个更一般形式.

定理：设 $M$ 是紧RS. $L$ 是 $M$ 上的全纯线丛. 则 $\Gamma(\mathcal{M}^*(L))\neq 0$.

证明：任取 $p\in M$. 设 $(U, z)$ 是 $p$ 附近的坐标邻域, $z(p)=0$. 记 $V=M-\{p\}$

则 $A=\{U, V\}$ 构成 $M$ 的开覆盖. 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 定义一个 $C^1(A, L)$

的元素 $f^{(k)}=\{f^{(k)}_{UV}, f^{(k)}_{VU}\}$. 其中 $f^{(k)}_{UV}: U\cap V\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\frac{1}{z^k}$.

$f^{(k)}_{VU}: V\cap U\to\mathbb{C}$. $f^{(k)}_{VU}=-f^{(k)}_{UV}$. $f^{(k)}$ 显然是闭的. 于是定义了

$H^1(M, L)$ 中的同调类 $[f^{(k)}]$. 因为 $M$ 紧. 所以 $H^1(M, L)$ 是有限维的. 记

$\dim_{\mathbb{C}} H^1(M, L)=d$. 则存在 $c_1, \cdots c_{d+1}$ 使 $\sum_{k=1}^{d} c_k[f^{(k)}]=0$.

即存在 $C^0(A, L)$ 的元素 $h=(h_U, h_V)$ 使得在 $U\cap V=U-\{p\}$

上有 $c_1f^{(1)}+\cdots+c_{d+1}f^{(d+1)}=h_V-h_U$. 其中 $h_U\in\mathcal{O}(U)$, $h_V\in\mathcal{O}(M-\{p\})$

注意 $h_V=h_U+c_1f^{(1)}+\cdots+c_{d+1}f^{(d+1)}$. 当 $z\to 0$ 时, 可知 $p$ 是 $h_V$

的极点. 显然 $h_V$ 不会恒为零, 所以它给出 $\Gamma(\mathcal{M}(L))$ 的一个

非零元素. $\square$

特别地, 当 $L$ 为平凡丛时, 上述证明表明在亏格 $g$ 的RS上.

对 $\forall p$, 存在一个仅在 $p$ 处有极点的亚纯函数且 $f$ 在 $p$ 处的阶

$\leq g+1$. ($H^1(M, \mathcal{O})=g$).

$D \mapsto L(D)$ 即连接同态 $\Gamma(D) \to H^1(\mathcal{O}^*)$。Narasimhan书中 $\delta$ 定义与 Gunning 相差一个负号，这导致上述连接同态也相差负号。

此外亦可任取开覆盖，只要每个 $U_\alpha$ 同胚于 $\mathbb{C}$ 中的开集，就可用此处理。

$\{f_i^{-1}\}$ 显然定义了 $L(D)$ 的一个亚纯截面，我们将之记为 $L(D)$ 的一个标准截面，记为 $s_D$。根据定义 $\nu(s_D) = -D$。

注：① 若在定义 $L(D)$ 时选不同的坐标（但 $U_i$ 不变），则新的 $g_{ij}$ 和原 $g_{ij}$ 相差一个 $\delta(h_i)$，$(h_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$，所以不改变 $L(D)$。

② 若 $s_1, s_2$ 是 $L(D)$ 的两个亚纯截面，都满足 $\nu(s_i) = -D$，则 $\nu(s_1/s_2) = 0$。于是 $s_1/s_2$ 是 $M$ 上的无零点全纯函数，所以只能是非零常数。换句话说，标准截面在相差一个常数倍的意义下是唯一的。

③ 对一个 $D \in \mathcal{D}(M)$，设 $U$ 是 $M$ 的开集，定义

$\mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) \mid f=0 \text{ or } \nu(f) \geq D\}$，则 $\mathcal{O}_D$ 是一层。

且映射 $\mathcal{O}_D(U) \to \Gamma(U, L(D))$，$f \mapsto f \cdot s_D$ 是一个同构。

所以 $\mathcal{O}_D$ 同构于 $L(D)$ 的全纯截面芽层。

$\nu(f s_D) \geq D + (-D) = 0 \Rightarrow f s_D$ 全纯。

Date:
Place:
Reminders

前面的引理和定理表明紧RS上的全纯线丛总可由除子来给出。下面给出一种更直接的对应方式。（$P_i \neq P_j$，$i \neq j$）

设 $D \in \mathcal{D}(M)$ 是一个除子（$M$ 紧），$D = \sum_{i=1}^{N} n_i P_i$。现在在每个 $P_i$ 附近取局部坐标邻域 $U_i$，使 $U_i \cap U_j = \emptyset$ ($i \neq j$)。设 $U_i$ 上的坐标为 $z_i$，满足 $z_i(P_i) = 0$。再设 $U_0 = M - (U_1 \cap \cdots \cap U_N)$

定义一些亚纯函数 $f_i = \begin{cases} z_i^{n_i} & i = 1, \cdots, N \\ 1 & i = 0 \end{cases}$ : $U_i \to \mathbb{P}$

在 $U_i \cap U_j$ 上，定义 $g_{ij} = f_j / f_i$，则 $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$，且满足 cocycle 条件。因此 $g_{ij}$ 定义了一个 $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 的元素，因此对应一个全纯线丛，或者说一个 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ 的元素。我们记它为 $L(D)$。

引理：$D_1, D_2$ 线性等价 $\iff L(D_1) \cong L(D_2)$。

证明：若 $L(D_1) \cong L(D_2)$，选相同的坐标覆盖和转移函数，则 $s_{D_1}/s_{D_2}$ 是 $M$ 上的整体亚纯函数，且有 $\nu(s_{D_1}/s_{D_2}) = D_2 - D_1$，即 $D_1, D_2$ 线性等价。反之，设 $f$ 是一个 $M$ 上的亚纯函数，且 $\nu(f) = D_1 - D_2$。由标准截面的唯一性可知，可选 $f$ 使 $f = s_{D_1}/s_{D_2}$。

设 $s_{D_1}$ 对应一个局部平凡化 $\{U_i\}$，$s_{D_1} = \{f_i^{(1)} \in \mathcal{M}(U_i)\}$，且在 $U_i \cap U_j$ 上有 $f_i^{(1)} = g_{ij}^{(1)} f_j^{(1)}$，$g_{ij}^{(1)} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$。

设 $s_{D_2}$ 对应另一个局部平凡化 $\{V_j\}$，$s_{D_2} = \{f_j^{(2)} \in \mathcal{M}(V_j)\}$

在 $V_i \cap V_j$ 上有 $f_i^{(2)} = g_{ij}^{(2)} f_j^{(2)}$，$g_{ij}^{(2)} \in \mathcal{O}^*(V_i \cap V_j)$。

Date:
Place:

Reminders

$$\in H^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{dR} H^2_{dR}(M)$$

对于L，设 $c_1(L)$ 对应 M 上的2形式，则可定义 $\int_M c_1(L)$，结果是一个整数，记为 $c(L)$，称为L的第一陈类.

对于 $D\in \mathcal{D}(M)$. $D=\sum_{i=1}^{N} m_iP_i$. 定义 $\deg D=\sum_{i=1}^{N} m_i$.
则 $\deg: \mathcal{D}(M)\to\mathbb{Z}$ 是一个群同态.

根据定理，$c_1(L)$ 又可叫 L 的 degree (次数).

Date:
Place:

Reminders

因为 $s_{D_1}=f\cdot s_{D_2}$，所以在 $U_i\cap V_j$ 上有 $f_i^{(1)}=f\cdot f_j^{(2)}$.
记 $W_{ij}=U_i\cap V_j$，于是 $\{W_{ij}\}$ 构成另一个局部平凡化，相应的转移函数（在 $L(D_1)$ 和 $L(D_2)$ 的）分别是 $g^{(1)}$ 和 $g^{(2)}$ 的限制. 在 $W_{ij}\cap W_{kl}$ 上即 $U_i\cap V_j\cap U_k\cap V_l$ 上，
有 $f_i^{(1)}=f_j^{(2)}\cdot f^{-1}$, $f_k^{(1)}=f_l^{(2)}\cdot f^{-1}$. $g^{(1)}_{ij,kl}=g^{(1)}_{ik}|_{W_{ij}\cap W_{kl}}=f_i^{(1)}/f_k^{(1)}|_{W_{ij}\cap W_{kl}}$
$=f_j^{(2)}/f_l^{(2)}|_{W_{ij}\cap W_{kl}}=g^{(2)}_{jl}|_{W_{ij}\cap W_{kl}}=g^{(2)}_{ij,kl}$. 所以 $L(D_1)\cong L(D_2)$ □.

上面构造的映射 $D\mapsto L(D)$ 就给出了 $\mathcal{C}(M)$ 到 $H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 的同构. 它显然还是一个群同态，因为
$L(D_1)\otimes L(D_2)\cong L(D_1+D_2)$. $L(-D)\cong L(D)^*$.
特别地，$L(0)=1\in H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 即平凡丛.

定理：设 L 是紧RS M上的全纯线丛，$f\in\Gamma(M^*,L)$.
则 $c_1(L)=\deg v(f)$.
证明：设 $v(f)=\sum_{i=1}^{N} m_iP_i$. 取L的一个局部平凡化 $\mathcal{A}=\{U_\alpha\}$. 不妨设 $\mathcal{A}$ 取得足够细，使得对 $\forall P_i$，存在 $P_i$ 的开邻域 $V_i$ 满足 ① $V_i$ 光滑 ② $\exists\alpha_i$ 使 $V_i\subseteq U_{\alpha_i}$ ③ 对于 $\alpha\neq\alpha_i$，$V_i\cap U_\alpha=\emptyset$. 设 L 关于 $\mathcal{A}$ 的转移函数为 $g_{\alpha\beta}$，f 在 $\mathcal{A}$ 上的局部表示为 $\{f_\alpha\}$. 则 $f_\alpha: U_\alpha\to\mathbb{C}$. $f_\alpha=g_{\alpha\beta}f_\beta$（在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上）.
定义一些光滑函数 $r_\alpha: U_\alpha\to\mathbb{R}$，满足 ① $r_\alpha>0$.

Date: ..............................

Place: ..............................

Reminders

Date: ..............................

Place: ..............................

Reminders

② 在 $U_\alpha - \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ 上 $r_\alpha = |f_\alpha|^2$. ③ 在 $U_\alpha \cap \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ 上随意规定使 $r_\alpha$ 保持 $C^\infty$，且 $r_\alpha > 0$. 则在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上，因为 $V_i \cap U_\alpha \cap U_\beta = \phi$

所以有 $r_\alpha = |g_{\alpha\beta}|^2 r_\beta$.

根据之前证明 $C_1$ 的两种定义等价时的有关计算，我们有

$$c_1(L) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_M \bar\partial\partial \log r_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_M \partial\bar\partial \log r_\alpha$$

(在 $M - \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ 上，$\bar\partial\partial \log r_\alpha = \bar\partial\partial(\log f_\alpha + \log \bar f_\alpha) = 0$.)

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\bigcup_{i=1}^{N} V_i} \bar\partial\partial \log r_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial V_i} \partial \log r_{\alpha_i}$$

(在 $\partial V_i$ 上，$\partial \log r_{\alpha_i} = \partial(\log f_{\alpha_i} + \log \bar f_{\alpha_i}) = \partial \log f_{\alpha_i}$)

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial V_i} \partial \log f_{\alpha_i} = \sum_{p \in M} v_p(f) = \deg v(f).$$ □.

推论：① 对 $\forall f \in \Gamma(m^*(L))$，$\deg v(f)$ 是常数(不依赖f，仅依赖L

② 对 $\forall f \in \Gamma(m^*)$，$\deg v(f) = 0$.(因为 $1 \in \Gamma(m^*)$，$\deg v(1) = 0$)

③ 若 $c(L) < 0$，则 $\Gamma(L) = 0$.

(若 $f \in \Gamma(L)$，f 不恒为零，则 $\deg v(f) \geq 0$，与 $c(L) < 0$ 矛盾).

④ 若 $f \in \Gamma(L)$，则 $c(L) \geq 0$. 且 f 的零点个数按重数计就是 $c(L)$，若不按重数算，则 f 的零点个数不大于 $c(L)$.

Date:
Place:
Reminders

引入 $h^q(L)=\dim_{\mathbb C} H^q(M,L)$. 则有

$$h^0(L)-h^1(L)=c(L)+1-g(M).$$

Date:
Place:
Reminders

⑤ 设 $D\in\mathcal{D}(M)$, $L(D)$为之前定义的全纯线丛, $S_D$是$L(D)$的标准亚纯截面, 则 $\nu(S_D)=-D$. 于是 $c(L(D))=-\deg D$. 特别地, 若 $D=P$, 则 $c(L(P))=-1$.

定理(Riemann-Roch) 设 M是紧Riemann面, L是M上的全纯线丛, 则

$$\dim_{\mathbb C} H^0(M,L)-\dim_{\mathbb C} H^1(M,L)=c(L)+1-g(M).$$

证明: 记 $\chi(L)=\dim_{\mathbb C} H^0(M,L)-\dim_{\mathbb C} H^1(M,L)-c(L)$.

① 对任一 $D\in\mathcal{D}(M)$, $\chi(L(D)\otimes L)=\chi(L)$.

显然只需考虑 $D=P$ 的情形. 记 $L$ 对应的除子类代表为 $D_L$. $L(D)\otimes L=L'$. 则对 $\forall U\subseteq M$.

$$\Gamma(U,L)\cong\{f\in\mathcal{M}(U)\mid f\equiv 0 \text{ or } \nu(f)\geq D_L\},$$

$$\Gamma(U,L')\cong\{f\in\mathcal{M}(U)\mid f\equiv 0 \text{ or } \nu(f)\geq D_L+P\}.$$

显然 $\Gamma(U,L')$是$\Gamma(U,L)$的子群, 于是 $\mathcal{O}(L')$是$\mathcal{O}(L)$的子层.

设 $S=\mathcal{O}(L)/\mathcal{O}(L')$, 则 $S_q=\begin{cases}\mathbb C & q=P\\ 0 & q\neq P\end{cases}$, 所以 $S$是一个摩天层.

考虑层的短正合列 $0\to\mathcal{O}(L')\to\mathcal{O}(L)\to S\to 0$, 则有

$$0\to H^0(L')\to H^0(L)\to H^0(S)\to H^1(L')\to H^1(L)\to H^1(S)\to 0.$$

由正合性可知

$$\dim H^0(L')-\dim H^0(L)+\dim H^0(S)-\dim H^1(L')+\dim H^1(L)-\dim H^1(S)=0.$$

Date:
Place:
Reminders

对于 $S$，易知 $\dim H^0(S)=1$，$\dim H^1(S)=0$。所以

$$\dim H^0(L')-\dim H^1(L')+1=\dim H^0(L)-\dim H^1(L).$$

注意，$c(L')=c(L(D))+c(L)=c(L)-1$。所以有

$$\chi(L')=\dim H^0(L')-\dim H^1(L')-c(L')$$
$$=\dim H^0(L)-\dim H^1(L)-1-c(L)+1=\chi(L).$$

② 对 $\forall L\in H^1(\mathcal{O}^*)$，$\chi(L)$ 是 $L$ 无关的常数。

因为每个线丛都有除子，即 $L=L(D)\otimes 1$，于是 $\chi(L)=\chi(1)$。

③ $\chi(1)=1-g(M)$。

对于平凡丛 $1$，$\dim H^0(\mathcal{O})=1$。$\dim H^1(\mathcal{O})=g(M)$ $c(1)=0$。

□.

定义：设 $M$ 是 $n$ 维复流形。则 $\Omega^n$ 是一个线丛。称为 $M$ 的 canonical 线丛，记为 $K_M$。

推论 设 $M$ 是紧 Riemann 面，则 $c(K_M)=2g-2$。

证明：$H^0(K_M)=H^1(\mathcal{O})=\mathbb{C}^g$ $H^1(K_M)=H^0(\mathcal{O})=\mathbb{C}$。

由 RR $g-1=c(K_M)+1-g$。所以 $c(K_M)=2g-2$。 □.

推论：若 $g(M)=0$，则 $M$ 上没有非零的全纯微分。

证明：$c(K_M)=-2<0$ 所以 $\Gamma(K_M)=0$。□.

Date:
Place:
Reminders

记 $h^0(L)=\dim_{\mathbb{C}} H^0(M,L)$. $h^1(L)=\dim_{\mathbb{C}} H^1(M,L)$.

① 若 $c(L)<0$. 我们已经证过 $h^0(L)=0$. 于是

$$h^1(L)=-c(L)+g-1=|c(L)|+g-1.$$

② 若 $c(L)=0$. 如果 $L$ 是平凡丛, 则显然有 $h^0(L)=1$. $h^1(L)=g$.
若 $h^0(L)>0$, 说明 $L$ 有一个不恒为零的全纯截面, 记 ~~$f$~~
$0=c(L)=\deg \nu(f)$. 这说明 $f$ 处处非零, 于是 $L$ 平凡, 所以实际上只有两种可能:

$$\begin{cases} L\text{ 平凡}: & h^0(L)=1.\ h^1(L)=g \\ L\text{ 不平凡}: & h^0(L)=0.\ h^1(L)=g-1. \end{cases}$$

③ 若 $0\le c(L)\le 2g-2$, 我们现在只能知道

$$h^0(L)\ge c(L)+1-g. \qquad h^1(L)\ge -c(L)+g-1.$$

④ 若 $c(L)=2g-2$. 考虑 $L'=K\cdot L^{-1}$. 则 $c(L')=0$, 于是

$$\begin{cases} \text{若 } L'\text{ 平凡, 即 } L=K. \text{ 则 } & h^0(L)=g.\ h^1(L)=1. \\ \text{若 } L'\text{ 不平凡, 即 } L\ne K. \text{ 则 } & h^0(L)=g-1.\ h^1(L)=0. \end{cases}$$

⑤ 若 $c(L)>2g-2$. 仍考虑 $L'=K\cdot L^{-1}$. 则有

$$h^0(L)=c(L)+1-g. \quad h^1(L)=0.$$

定理: 若 $0<c(L)<2g-2$. 则 $h^0(L)\le \min(g,\ c(L)+1)$. 于是

$$h^1(L)\le \min(g,\ c(L)+1)+g-1-c(L)=\min(2g-1-c(L),\ g).$$

证明: 对 $P\in M$, $m\in\mathbb{Z}$, $m\ge 0$. 考虑 $D_m=-mP$. 记 $L_m=\mathcal{L}(D_m)$.
则 $c(L_m)=-\deg D=m$. 根据RR证明过程中的计算,

若 $g_M=0$，则 $M\cong\mathbb{P}$，之前已经证明 →

$H^1(M,\mathcal{O}^*)\cong H^2(M,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$，即 M 上的全纯线丛完全由其第一陈类决定。所以在这一节中我们假定 $g_M\ge 1$.

可任选一点 $P_0\in M$，则对 $\forall L\in H^1(M,\mathcal{O}^*)$ →

$$L=\underbrace{\left(L\otimes L(c(L)P_0)\right)}_{\in\ker c}\otimes\underbrace{\overset{\mapsto c(L)}{\boxed{L(-c(L)P_0)}}}_{\in\mathbb{Z}}$$

$h^0(L\otimes L_m)\ge h^0(L)$. 而因 $c(L)<2g-2$，取 $m=2g-1-c(L)$,

则 $c(L\otimes L_m)=c(L)+2g-1-c(L)=2g-1$，所以 $h^0(L\otimes L_m)=g$.

所以 $h^0(L)\le g$. 另一方面，若 $0<c(L)<2g-2$，则 $0<c(K\otimes L')<2g-2$.

所以 $h^1(L)=h^0(K\otimes L')\le g$. 由 RR，$h^0(L)\le g+c(L)+1-g=c(L)+1$. □

## §10. Picard簇和Jacobi簇

这一节的主题是一个紧Riemann面 M 上全纯线丛的分类，即研究群 $H^1(M,\mathcal{O}^*)$。对于这个群，之前曾给出过两种刻画：

① 由指数层列 $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{i}\mathcal{O}\xrightarrow{e}\mathcal{O}^*\to 0$，会有

$$0\to\frac{H^1(M,\mathcal{O})}{i^*H^1(M,\mathbb{Z})}\xrightarrow{e^*}H^1(M,\mathcal{O}^*)\xrightarrow{c}\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|}{H^2(M,\mathbb{Z})}}\to 0$$

因为 $H^2(M,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ 是自由群，所以上述短正合列是可分裂的，即 $H^1(M,\mathcal{O}^*)\cong\left(H^1(M,\mathcal{O})/i^*H^1(M,\mathbb{Z})\right)\oplus\mathbb{Z}$。定义

$\mathrm{Pic}(M)=H^1(M,\mathcal{O})/i^*H^1(M,\mathbb{Z})$ 称为 M 的 Picard 簇.

注：一般来说 Picard 簇会定义为 $H^1(M,\mathcal{O}^*)$，我们这里定义的只是它的单位连通分支 $\mathrm{Pic}(M)$。但在 Riemann 面上两者只相差第一陈类给出的整数，我们只考虑 $\mathrm{Pic}(M)$，所以不妨忽略其余陪集，直接按上述定义 $\mathrm{Pic}(M)$.

② 由除子层列 $0\to\mathcal{O}^*\xrightarrow{i}\mathcal{M}^*\xrightarrow{}\mathcal{D}\to 0$，有

Jacobi簇的严格定义应为 $p \mapsto \left( \int_{p_0}^{p} \omega_i \right)_{i=1,\dots,n}$ 的像.

这个说法还是不够好. Jac(M)还是应该定义为 $H^0(M,\Omega)^* / H_1(M)$. 而它和 $D^0(M)/P(M)$ 的同构则是Abel定理和Jacobi定理的内容. $D^0(M)$ 和 $P(M)$ 都是很大的群, 它们本身并不是好的对象, 商才有趣.

Date:
Place:
Reminders

$$H^1(M,\mathcal{O}^*) \cong H^0(M,\mathcal{D}) / v\, H^0(M,\mathcal{M}^*)$$

$$= D(M)/P(M) =: C(M)$$

定义 $D^0(M)$ 为 $D(M)$ 中次数为零的除子构成的子群. 则有 $0 \to D^0(M) \xrightarrow{i} D(M) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$, 注意 $P(M) \subseteq D^0(M)$.

所以
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \frac{D^0(M)}{P(M)} \arrow[r] & \frac{D(M)}{P(M)} \arrow[r, "\deg"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\ & & H^1(\mathcal{O}^*) \arrow[ur, "-c"'] & & \end{tikzcd}$$
于是又有

$$H^1(M,\mathcal{O}^*) \cong \frac{D^0(M)}{P(M)} \oplus \mathbb{Z}.$$ 定义

$$\mathrm{Jac}(M) = D^0(M)/P(M)$$ 称为M的Jacobi簇.

它也可认为是衡量次数为零的除子和主除子相差多少的几何对象.

根据这两种刻画, Pic(M)和Jac(M)描述的都是 $c=0$ 的全体线丛构成的群, 所以它们做为Abel群是一样的. 我们下面要说明的是, 从这两种刻画, 我们可以分别赋予Pic(M)和Jac(M)一个g维复环面的结构, 并且由此得到的两个复环面做为复流形也是同构的. 另外, 从M或者 $M^N$ $(N \geq 1)$ 到Pic(M)或Jac(M)有自然的全纯映射, 它们具有各种良好的性质. 例如当 $g=1$ 时, 我们会证明M与Jac(M)(或Pic(M))实际上是同构的. 由此说明 $g=1$ 的RS一定同构于某个一维复环面. 而一维复环面的分类空间为 $\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$. 这就完成了 $g=1$ 的RS的分类.

上半平面.

Recall: 记 $\Omega^0=\mathcal{O}$, $\Omega^1=\Omega$, 则有

$H^0(M,\mathcal{O})\cong H^{0,0}_{\bar\partial}(M)\cong\{f\in C^\infty(M)\mid\bar\partial f=0\}\cong\mathbb{C}$.

$H^0(M,\Omega)\cong H^{1,0}_{\bar\partial}(M)\cong\{f\,dz\in A^{1,0}\mid\bar\partial f=0\}\cong\mathbb{C}^g$.

$H^1(M,\mathcal{O})\cong H^{0,1}_{\bar\partial}(M)\cong\{f\,d\bar z\in A^{0,1}\}/\bar\partial A^{0}\cong\mathbb{C}^g$.

$H^1(M,\Omega)\cong H^{1,1}_{\bar\partial}(M)\cong\{f\,dz\wedge d\bar z\in A^{1,1}\}/\bar\partial A^{1,0}\cong\mathbb{C}$.

利用Kähler性质, $H^{1,0}_{\bar\partial}(M)\cong H^{0,1}_{\bar\partial}(M)$,

$H^1(M,\mathbb{C})=H^0(M,\Omega)\oplus H^1(M,\mathcal{O})$.

但这两个性质都依赖于度量. 我们不用这种讲法.

根据Serre对偶, $H^1(M,\mathcal{O})\times H^0(M,\Omega)\to\mathbb{C}$ 的配对是非退化的. 这个配对的定义是, 首先考虑

$$\Gamma(M,A^{0,1})\times\Gamma(M,\Omega)\to\mathbb{C}.$$

$$(f\,d\bar z,\ \underset{H^0(M,\Omega)}{g\,dz})\mapsto\int_M(f\,d\bar z)\wedge(g\,dz)$$

当 $f\,d\bar z$ 恰为 $\bar\partial g$ 时, 由Stokes定理可得上述配对为零. 所以它诱导了 $H^1(M,\mathcal{O})\times H^0(M,\Omega)$ 上的配对.

↑

$H^1(M,\mathcal{O})$ 由Dolbeault描述, 是两个无穷维线性空间的商, 不易处理. 但 $H^0(M,\Omega)$ 却简单到它的基就是M上的全纯微分. 所以, 下面就要把 $H^1(M,\mathcal{O})$ 改成 $H^0(M,\Omega)^*$.



$i:\mathbb{Z}\to\mathcal{O}$

首先考虑 $\mathrm{Pic}(M)=H^1(M,\mathcal{O})/i^*H^1(M,\mathbb{Z})$. 虽然 $H^1(M,\mathcal{O})\cong\mathbb{C}^g$, $H^1(M,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{2g}$, 但是我们并不知道 $i^*$ 的像是否还是 $\mathbb{C}^g$ 中的 $\mathbb{Z}^{2g}$. 我们的第一个任务就是证明这一点. 由此可推出 $\mathrm{Pic}(M)$ 作为流形~~[illegible]~~就是个复环面.

引理1. 存在一个短正合列

$$0\to H^0(M,\Omega)\xrightarrow{\delta}H^1(M,\mathbb{C})\to H^1(M,\mathcal{O})\to 0.$$

证明: 考虑 $0\to\mathbb{C}\to\mathcal{O}\xrightarrow{d}\Omega\to 0$. 它的正合性是显然的. 于是有

$$0\to H^0(M,\mathbb{C})\to H^0(M,\mathcal{O})\xrightarrow{d}H^0(M,\Omega)$$
$$\to H^1(M,\mathbb{C})\to H^1(M,\mathcal{O})\xrightarrow{d}H^1(M,\Omega)$$
$$\to H^2(M,\mathbb{C})\to H^2(M,\mathcal{O})=0.$$

其中 $H^0(M,\mathbb{C})\cong\mathbb{C}$, $H^0(M,\mathcal{O})\cong\mathbb{C}$, $H^2(M,\mathbb{C})\cong\mathbb{C}$, $H^1(M,\Omega)\cong\mathbb{C}$. 将长正合列断开, 即得所求的短正合列. □

由引理1, $H^1(M,\mathcal{O})\cong H^1(M,\mathbb{C})/\delta H^0(M,\Omega)$.

于是
$$\mathrm{Pic}(M)\cong\frac{H^1(M,\mathbb{C})}{i^*H^1(M,\mathbb{Z})+\delta H^0(M,\Omega)}$$

↑ $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$.

引理2. 设 $j^*:H^1(M,\mathbb{R})\to H^1(M,\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 诱导的上同调的映射. 显然有 $i^*H^1(M,\mathbb{Z})\subseteq j^*H^1(M,\mathbb{R})$.

Date:
Place:
Reminders

若 $\varphi\in H^0(M,\Omega)$ 满足 $\delta\varphi\in j^*H^1(M,\mathbb{R})$，则 $\varphi=0$.

证明：首先考虑 $\delta$ 是如何作用的。我们用 Čech 上同调来描述 $H^1(M,\mathbb{C})$. 取一个足够细的开覆盖 $A=\{U_\alpha\}$，$\varphi_\alpha=\varphi|_{U_\alpha}$，则在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上会有 $\varphi_\alpha=\varphi_\beta$. 由 $\partial$ 的 Poincaré 引理，存在 $f_\alpha\in\Gamma(U_\alpha,\mathcal{O})$，使 $\varphi_\alpha=df_\alpha$. 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上，则有 $d(f_\beta-f_\alpha)=\varphi_\beta-\varphi_\alpha=0$. 所以 $f_\beta-f_\alpha$ 是一个常数，它显然满足 cocycle 条件。所以给出一个 $H^1(M,\mathbb{C})$ 中的元素，它就是 $(\delta\varphi)_{\alpha\beta}$.

现在，若 $\delta\varphi\in j^*H^1(M,\mathbb{R})$，意味着我们可找到一个开覆盖 $A$，使上面的 $f_\beta-f_\alpha\in\mathbb{R}$. 考虑函数 $g_\alpha=e^{2\pi i f_\alpha}$ 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上，$|g_\alpha|=|g_\beta|$，所以 $|g|$ 是一个整体定义的光滑函数。因为 $M$ 紧，所以 $|g|$ 一定在某点达到最大值，但 $g$ 是全纯的，所以 $g$ 是常数，于是 $f_\alpha$ 也会是常数，于是 $\varphi=df_\alpha=0$. □

定理1 $Pic(M)$ 可赋以一个 $g$ 维复环面结构.

证明：引理2表明，在 $H^1(M,\mathbb{C})$ 中，$i^*H^1(M,\mathbb{Z})$ 和 $\delta H^0(M,\Omega)$ 只交于零。因此，$i^*H^1(M,\mathbb{Z})$ 在 $H^1(M,\mathcal{O})$ 中仍是秩为 $2g$ 的整格子。（设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{2g}$ 是 $H^1(M,\mathbb{Z})$ 的生成元，记 $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i+\delta H^0(M,\Omega)$. 若 $\sum_{i=1}^{2g}c_i\tilde{\lambda}_i=0$，则 $\sum_{i=1}^{2g}c_i\lambda_i\in\delta H^0(M,\Omega)$，于是 $\sum_{i=1}^{2g}c_i\lambda_i=0$，所以 $c_i=0$. 这说明 $\tilde{\lambda}_i$ 在 $H^1(M,\mathcal{O})$ 中线性无关） □

Check: $H^0(M,\Omega)\xrightarrow{\delta} H^1(M,\mathbb{C})\xrightarrow[\text{de Rham 同构}]{\cong} H^1_{dR}(M,\mathbb{C})$ 的复合 →

就是 $H^0(M,\Omega)$ 到 $H^1_{dR}(M,\mathbb{C})$ 的包入.

Proof: 设 $\varphi\in H^0(M,\Omega)$. 则 $(\delta\varphi)_{\alpha\beta}=f_\beta-f_\alpha$. 其中 $df_\alpha=\varphi|_{U_\alpha}$

考虑 Čech-de Rham 双复形

$$\begin{array}{ccccccc}
C^1(\mathbb{C}) & \to & C^1(A^0) & \to & C^1(A^1) & \to & C^1(A^2)\\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow\\
C^0(\mathbb{C}) & \to & C^0(A^0) & \to & C^0(A^1) & \to & C^0(A^2)\\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow\\
\mathbb{C} & \to & A^0 & \to & A^1 & \to & A^2
\end{array}$$

对于 $f_\beta-f_\alpha\in C^1(\mathbb{C})$, 它自动也是 $C^1(A^0)$ 的元素. 它正是 $f_\alpha\in C^0(A^0)$ 的 $\delta$. $d$ 一下则得 $df_\alpha=\varphi_\alpha\in C^0(A^1)$

它们满足 $\varphi_\alpha=\varphi_\beta$. 所以 $\varphi\in A^1$ 就是 $f_\beta-f_\alpha$ 对应的 de Rham 同调类. □

接下来我们给 Pic(M) 另一种刻画. 由 Serre 对偶 $H^1(M,\mathcal{O})\cong H^0(M,\Omega)^*$, 它可以用另一种方式来刻画. 利用 $H^1(M,\mathcal{O})=H^1(M,\mathbb{C})/H^0(M,\Omega)$. 先定义一个配对 $\langle\,,\rangle: H^1(M,\mathbb{C})\times H^0(M,\Omega)\to\mathbb{C}$. 把 $H^1(M,\mathbb{C})$ 的元素利用 de Rham 定理解释为复值微分1形式. 于是 对 $\alpha\in H^1(M,\mathbb{C})$, $\beta\in H^0(M,\Omega)$. $\langle\alpha,\beta\rangle:=\int_M\alpha\wedge\beta$. $H^0(M,\Omega)$ 的元素当然也是 $H^1(M,\mathbb{C})$ 的元素. 若 $\alpha\in H^0(M,\Omega)$. 则显然有 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$. 所以 $\ker(H^1(M,\mathbb{C})\to H^0(M,\Omega))$ 正是 $H^0(M,\Omega)$ (利用 Serre 对偶可说明 ker 不会更大).

设 $\phi: H^1(M,\mathcal{O})\to H^0(M,\Omega)^*$ 是 Serre 对偶

$\Phi: H^1(M,\mathbb{C})\to H^0(M,\Omega)^*$ 是由 $\langle\,,\rangle$ 诱导的映射.

现在的问题是 $\phi(i^*H^1(M,\mathbb{Z}))$ 或 $\Phi(i^*H^1(M,\mathbb{Z}))$ 对应 $H^0(M,\Omega)^*$ 中的什么样的子群.

我们需要知道一些微分拓扑和代数拓扑的结论.

对于 $\gamma\in H_1(M,\mathbb{Z})$. $\gamma$ 可由 M 的一个一维子流形代表. 即 M 上的一个圈. 对于任意的 $\alpha\in H^1_{dR}(M,\mathbb{C})$ 闭, 可定义 $\int_\gamma\alpha$, 它不依赖于 $\gamma$ 和 $\alpha$ 的代表的选取. 于是 $\gamma$ 定义了 $H^1_{dR}(M,\mathbb{C})^*$ 中的一个元素. 根据 Poincaré 对偶, 存在唯一的 $\eta_\gamma\in H^1_{dR}(M,\mathbb{C})$, 使

$$\int_\gamma\alpha=\int_M\alpha\wedge\eta_\gamma.$$

$\eta_\gamma$ 叫 $\gamma$ 的 Poincaré 对偶.

Date:

Place:

Reminders

Poincaré对偶可定义在紧可定向光滑闭流形 或者说在 →

同下同调类上.

Date:

Place:

Reminders

若 $\gamma_1, \gamma_2 \in H_1(M, \mathbb{Z})$. 则有 $\eta_{\gamma_1 \cap \gamma_2} = \eta_{\gamma_1} \wedge \eta_{\gamma_2}$.

于是 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 的相交数 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \int_M \eta_{\gamma_1} \wedge \eta_{\gamma_2}$.

$H_1(M, \mathbb{Z})$ 上的相交乘积是非退化的,它诱导一个映射 $I: H^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) \to H_1(M, \mathbb{Z})$ 满足对 $\forall \gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$, $f \in H^1(M, \mathbb{Z})$. $f(\gamma) = \gamma \cap I(f)$. 假如,在 $H_1(M, \mathbb{Z})$ 中选一组辛基,即 $a_1, \cdots a_g, b_1 \cdots b_g$. 满足 $a_i \cap a_j = 0$. $b_i \cap b_j = 0$. $a_i \cap b_j = \delta_{ij}$ $b_i \cap a_j = -\delta_{ij}$. 再设 $\alpha_1 \cdots \alpha_g$ $\beta_1 \cdots \beta_g$ 是它们在 $H^1(M, \mathbb{Z})$ 中的对偶基,则有

$I(\alpha_i) = b_i$. $I(\beta_i) = -a_i$.

引理: 设 $f \in H^1(M, \mathbb{Z})$, $i^*: H^1(M, \mathbb{Z}) \to H^1(M, \mathbb{C})$ $\overset{\shortparallel}{H^1_{dR}(M, \mathbb{C})}$.

则有 $i^*(f) = -\eta_{I(f)}$

证明: $i^*(f)$ 可定义为使 $f(\gamma) = \int_\gamma i^*(f)$ 成立的微分1-形式. 另一方面, $f(\gamma) = \gamma \cap I(f) = \int_M \eta_\gamma \wedge \eta_{I(f)} = \int_M (-\eta_{I(f)}) \wedge \eta_\gamma = \int_\gamma (-\eta_{I(f)})$. □.

对于 $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$. 可定义 $\int_\gamma: H^0(M, \Omega) \to \mathbb{C}$, $\alpha \mapsto \int_\gamma \alpha$.

于是 $\int$ 给出 $H_1(M, \mathbb{Z})$ 到 $H^0(M, \Omega)^*$ 的同态.

它显然是单射. 于是 $H_1(M, \mathbb{Z})$ 可视为 $H^0(M, \Omega)^*$ 的子群.

定义 $\mathrm{Jac}(M) = \dfrac{H^0(M, \Omega)^*}{H_1(M, \mathbb{Z})}$.

Date:
Place:
Reminders

$\mathrm{I}$ 显然是自由 Abel 群的同构. 所以可取"=". →

$c_k(\gamma)=\int_\gamma \omega_k$. →

Date:
Place:
Reminders

定理2. $\mathrm{Pic}(M) \cong \mathrm{Jac}(M)$

证明: 前面已经说明, $H^1(M,\mathcal{O}) \to H^0(M,\Omega)^*$ 的同构由 $\Phi: H^1(M,\mathbb{C}) \to H^0(M,\Omega)^*$ 诱导. 要证等式两面的同构, 只需证 $\Phi(H^1(M,\mathbb{Z}))=H_1(M,\mathbb{Z})$

考虑如下图表

$$\begin{tikzcd} H^1(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathrm{I}"] \arrow[d, "i^*"] & H_1(M,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\int"] \\ H^1(M,\mathbb{C}) \arrow[r, "\Phi"] & H^0(M,\Omega)^* \end{tikzcd}$$

对于 $f\in H^1(M,\mathbb{Z})$.

$$\Phi(i^*f)(\beta)=\int_M i^*f\wedge\beta=\int_M \beta\wedge\eta_{I(f)}=\int_{I(f)}\beta$$

所以图表交换, 于是 $\Phi(i^*H^1(M,\mathbb{Z}))=\int(H_1(M,\mathbb{Z}))$ $\square$.

$\mathrm{Jac}(M)$ 中的元素有一个直观的解释. 设 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 是 $H^0(M,\Omega)$ 的基, $\omega_1^*,\cdots,\omega_g^*$ 是对偶基. 于是 $H^0(M,\Omega)^*\cong \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\omega_1^*,\cdots,\omega_g^*)\cong\mathbb{C}^g$ 对于 $\gamma\in H_1(M,\mathbb{Z})$

$\int_\gamma\in H^0(M,\Omega)^*$, 于是

$\int_\gamma=\sum c_i(\gamma)\omega_i^*$. 令 $\gamma$ 跑遍 $a_1\cdots a_g, b_1\cdots b_g$. 则得到 $2g$ 个 $\mathbb{C}^g$ 中的向量 $\begin{pmatrix} c_1(a_k)\\ \vdots \\ c_g(a_k)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1(b_k)\\ \vdots \\ c_g(b_k)\end{pmatrix}$

它们构成了一个整格子 $L$.

$\mathrm{Jac}(M)$ 就是 $\mathbb{C}^g/L$.

这样的丛叫平坦丛. 问题:这和它与Hermite度量的平坦性有关吗? →



接下来考虑 $Pic(M)$ 或 $Jac(M)$ 与 ~~$D^0(M)$~~ $C^0(M)=\frac{D^0(M)}{P(M)}$ 的关系. 对于 $D\in D^0(M)$, $D\mapsto L(D)$ 给出 $D^0(M)\to Pic(M)$ 的满射. 于是也诱导了 $D^0(M)\to Jac(M)$ 的满射. 其 kernel 就是 $P(M)$. 下面将给出这个映射的具体形式. 由此得到 Abel Jacobi 定理.

先补充一个 $Pic(M)$ 的刻画

引理1. 若 $L$ 是 $M$ 上的全纯线丛, 且满足 $c(L)=0$, 则存在 $M$ 的局部平凡化 $A=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, 使 $(g_{\alpha\beta})$ 为常数.

证明: 即证明, 若 $c(L)=0$, 则 $L$ 所对应的 $H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 中的元素是 $\mathbb{C}^*\xrightarrow{i}\mathcal{O}^*$ 诱导的 $i^*: H^1(M,\mathbb{C}^*)\to H^1(M,\mathcal{O}^*)$ 的像中的元素. 考虑短正合列 $0\to\mathbb{C}^*\xrightarrow{i}\mathcal{O}^*\xrightarrow{dl}\Omega\to 0$.

其中 $dl(f)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log f$. 它诱导了长正合列:

$$0\to H^0(\mathbb{C}^*)\to H^0(\mathcal{O}^*)\to H^0(\Omega)$$
$$\xrightarrow{\delta_1}H^1(\mathbb{C}^*)\to H^1(\mathcal{O}^*)\to H^1(\Omega)$$
$$\xrightarrow{\delta_2}H^2(\mathbb{C}^*)\to H^2(\mathcal{O}^*)$$

其中 $H^0(\mathbb{C}^*)=\mathbb{C}^*$, $H^0(\mathcal{O}^*)=0$.

由指数层列可知

$H^2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O}^*)\to H^3(\mathbb{Z})$ 正合 其中 $H^2(\mathcal{O})=0$. $H^3(\mathbb{Z})=0$

于是 $H^2(\mathcal{O}^*)=0$. $H^1(\Omega)\cong\mathbb{C}$. $H^2(\mathbb{C}^*)\cong\mathbb{C}^*$. 记 $\ker\delta_2=\tilde{Z}$. 则有

$$0\to H^0(\Omega)\xrightarrow{\delta_1}H^1(\mathbb{C}^*)\xrightarrow{i^*}H^1(\mathcal{O}^*)\xrightarrow{\tilde{c}}\tilde{Z}\to 0.$$

Date:
Place:
Reminders

我们实际上证明了 $\mathrm{Pic}(M) \cong \dfrac{H^1(M,\mathbb{C}^*)}{\delta_1 H^0(M,\Omega)}$ →

从层列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to 0$ 诱导了 $H^1(M,\mathbb{C}) \to H^1(M,\mathbb{C}^*)$ 的映射，它进一步诱导 $\dfrac{H^1(M,\mathbb{C})}{H^1(M,\mathbb{Z}) + H^0(M,\Omega)}$ 到 $\dfrac{H^1(M,\mathbb{C}^*)}{H^0(M,\Omega)}$ 的同构.

Date:
Place:
Reminders

下面证明 $c$ 即 $-c$，于是 $\ker c \subseteq \mathrm{Im}\, i^*$，定理证完.

对于 $g_{\alpha\beta} \in C^1(\mathcal{O}^*)$，它对应 $C^1(\Omega)$ 中的 $\theta_{\alpha\beta} = \dfrac{d\log g_{\alpha\beta}}{2\pi\sqrt{-1}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial \log g_{\alpha\beta}$. 由陈类部分的单位分解，可选恒正光滑函数 $r_\alpha$ 使 $r_\beta = r_\alpha |g_{\alpha\beta}|^2$，于是

$\theta_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(\partial\log r_\beta - \partial\log r_\alpha)$. 设 $\tau_\alpha = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial\log r_\alpha$. 则 $\bar\partial\tau_\alpha = \bar\partial\tau_\beta$，所以它定义了 $A^{1,1}$ 的整体截面 $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\bar\partial\partial\log r_\alpha$，这正是 $-c(L)$ 对应的二形式. □

引理2 设 $p_0, p \in M$，$p_0 \neq p$，$D = p - p_0$，$\gamma$ 是从 $p_0$ 到 $p$ 的光滑道路. 设 $A: D^0(M) \to \mathrm{Pic}(M) \to \mathrm{Jac}(M)$，则

$A(D)(\omega) = \int_\gamma \omega$.

证明：首先假设 $p_0, p$ 都在一个可缩的坐标邻域 $U_0$ 中，且 $\gamma$ 也在 $U_0$ 中，且 $U_0$ 上的坐标函数把 $\bar U_0$ 映为 $\mathbb{C}$ 中的单位闭圆盘. 选一个 $V_0$ 使 $\gamma \subseteq V_0 \subseteq \bar V_0 \subseteq U_0$. 选一个含 $U_0$ 的开覆盖 $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}$ 使得 ① 对 $\alpha \neq 0$，$U_\alpha \cap V_0 = \phi$. ② $\mathcal{A}$ 是关于 $\mathcal{O}$ 和 $\mathbb{C}$ 的 Leray 覆盖.

因为 $\deg D = 0$，所以 $c(L(D)) = 0$. 由引理1，可选 $L(D)$ 的转移函数 $g_{\alpha\beta}$ 为常数. 再选 $L(D)$ 的亚纯截面 $\{f_\alpha\}$，使 $(f_\alpha) = D$. 于是 $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$. 在 $U_\alpha\,(\alpha \neq 0)$ 上，$f_\alpha$ 为处处非零的全纯函数. 于是可定义 $\theta_\alpha = -\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$. 在 $U_0$ 上，

由引理2马上可知 $A_0$ 是~~[illegible]~~全纯映射



$f_0$ 有零点 $P$ 和极点 $P_0$，所以 $-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f_0$ 在 $V$ 内的留数和为零，这意味着它在 $U_0-V_0$ 上也是单值全纯函数。我们选一个 $\sigma_0\in\Gamma(U_0, A^{0,0})$，使 $\sigma_0|_{U_0-V_0}=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f_0$。

然后定义 $\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_\beta-\sigma_\alpha$，于是 $e^{2\pi\sqrt{-1}\sigma_{\alpha\beta}}=f_\alpha/f_\beta=g_{\alpha\beta}$ 是常数，所以 $\sigma_{\alpha\beta}$ 也是，于是定义了 $H^1(M,\mathbb{C})$ 中的元素，它就是 $D^0(M)\to D_{1C}(M)\to H^1(M,\mathbb{C})/(H^1(M,\mathbb{Z})+H^0(M,\Omega))$ 在 $D\in D^0(M)$ 上的像（见第20页的注）。

由 de Rham 同构 $(\sigma_{\alpha\beta})\in H^1(M,\mathbb{C})$ 对应的1形式正是 $(d\sigma_\alpha)\in\Gamma(M,A^1)$。它在 $\omega\in H^0(M,\Omega)$ 上的作用为

$A(D)(\omega)=\int_M d\sigma_\alpha\wedge\omega$. 在 $U_\alpha$ 上 $(\alpha\neq0)$，$\sigma_\alpha$ 是全纯的，于是 $d\sigma_\alpha\wedge\omega=0$.

$=\int_{U_0} d\sigma_0\wedge\omega$. 在 $U_0$ 上选一个全纯函数 $h$，使 $\omega=dh$.

$=-\int_{U_0} d(d\sigma_0\wedge h)=-\int_{\partial U_0} h\, d\sigma_0$. 在 $\partial U_0$ 上 $\sigma_0$ 与 $-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f_0$ 相等，

$=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial U_0} h\, d\log f_0=h(P)-h(P_0)=\int_\gamma dh=\int_\gamma\omega$.

一般地，对 $P_0, P\in M$，以及 $\gamma: P_0\to P$，可将 $\gamma$ 分为有限多个小段，每一段都满足前面的特殊要求，于是

$D=P-P_0=(P_1-P_0)+(P_2-P_1)+\cdots+(\overset{=P_N}{P}-P_{N-1})$.

$A(D)(\omega)=\sum_{i=1}^N A(P_i-P_{i-1})(\omega)=\sum_{i=1}^N\int_{\gamma_i}\omega=\int_\gamma\omega$. □

定义：① 固定 $P_0\in M$，定义 $A_{P_0}: M\to Jac(M)$

$P\mapsto A(P-P_0)=\int_{P_0}^P$，称为以 $P_0$ 为基点的

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

Abel-Jacobi 映射.

② 对于 $D\in D(M)$, $D=\sum_{i=1}^{N} m_i P_i$, 定义

$$A_{P_0}(D)=\sum_{i=1}^{N} m_i A_{P_0}(P_i)$$, 也叫 A-J 映射

引理3. 若 $D\in D^0(M)$, 则 $A_{P_0}$ 与 $P_0$ 无关.

证明: 若选另一基点 $P_1$. 则 $A_{P_1}(P)-A_{P_0}(P)=\int_{P_0}^{P_1}$ 这是 $Jac(M)$ 中的一个常数. 记为 $c$. 于是

$$A_{P_1}(D)-A_{P_0}(D)=\sum_{i=1}^{N} m_i c = c\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)=0.$$ □

之后我们记 $D^0(M)\to Jac(M)$ 的 A-J 映射为 $A$. 它显然是引理2中的 $A$ 的推广. 它在 $D=P_1+\cdots+P_N-Q_1-\cdots-Q_N$ 上的作用可写为 $\int_{Q_1}^{P_1}+\cdots+\int_{Q_N}^{P_N}$ (这里 $P_i$, $Q_i$ 可以调换, 分配方式任意).

因为 $\frac{D_0(M)}{P(M)}\to Pic(M)\to Jac\,M$ 是同构. 所以有以下定理.

定理(Abel-Jacobi) ① $A: D^0(M)\to Jac(M)$ 的核即为 $P(M)$.

② $A$ 是满射.

其中①也可表述为. 给定 $D=\sum_{i=1}^{N}(P_i-Q_i)\in D^0(M)$, 它是亚纯函数的除子当且仅当对 $\forall\,\omega\in H^0(M,\Omega)$, 有 $\sum_{i=1}^{N}\int_{Q_i}^{P_i}\omega=0 \pmod L$.

Date:
Place:
Reminders

Faltings通过如下结果证明了Mordell猜想：→

Faltings定理. 设$g>1$. $G$是$Jac(M)$的有限生成子群，则$G$与$A_{p_0}(M)$只能有有限个交点.

$M^{(d)}$等同于$d$次有效除子构成的集合. 所以我们用除子记号表示其中的点. →

Date:
Place:
Reminders

推论：当$g>0$时，$A_{p_0}: M\to Jac(M)$是单射.

证明：若$A_{p_0}(P)=A_{p_0}(Q)$，则存在$f\in\Gamma(M,\mathcal{M}^*)$使$(f)=P-Q$. 这样的$f$意味着$M\cong\mathbb{P}^1$. □

特别地，当$g=1$时，$A_{p_0}: M\to Jac(M)$既单又满，还是全纯映射，所以是个同构. 于是亏格1的RS总同构于某个复环面.

AJ映射的满性还有更精细的刻画，即Jacobi反演定理.

定理(Jacobi) 设$M$是亏格为$g\geq 1$的Riemann面，$P_0\in M$. 对任意$\lambda\in Jac(M)$，存在$M$上的$g$个点$P_1,\cdots,P_g$，使

$$A\left(\sum_{i=1}^{g}(P_i-P_0)\right)=\lambda.$$

证明：选$H^0(M,\Omega)$的基$\omega_1,\cdots,\omega_g$. 我们将证明，对任意的$\lambda_1,\cdots,\lambda_g\in\mathbb{C}$，存在$P_1,\cdots,P_g$以及从$P_0$到它们的道路$\gamma_1,\cdots,\gamma_g$，使$\sum_{i=1}^{g}\int_{\gamma_i}\omega_j=\lambda_j$，$j=1,\cdots,g$.

首先引入$M$的对称积的概念. 对任何$d\geq 1$，设$M^d$是$\underbrace{M\times\cdots\times M}_{d个}$. 则对称群$S_d$在$M^d$上有一个置换作用. 作为拓扑空间，$M$的$d$重对称积$M^{(d)}$定义为$M^d/S_d$.

映射$\pi: M^d\to M^{(d)}$赋予$M^{(d)}$一个$d$维复流形结构：对于

Date:
Place:
Reminders

练习：验证 $(\mathbb{P}^1)^{(d)} = \mathbb{P}^d$. →

为什么一定要 $g$ 个？因为 $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(M) = g$ →

$\dim_{\mathbb{C}} M^{(d)} = d$. 若 $d<g$，显然不可能满.

若 $g$ 个已经满了，则当 $d>g$ 时显然也满.

Date:
Place:
Reminders

$D = P_1 + \cdots + P_g$，在每个 $P_i$ 附近选取局部坐标系 $(U_i, z_i)$，使得

若 $P_i \neq P_j$，则 $U_i \cap U_j = \emptyset$，若 $P_i = P_j$，则 $U_i = U_j$，且 $z_i = z_j$.

然后定义 $D$ 附近的（$U_1\times\cdots\times U_d$ 上）坐标为 $(e_1(z), \cdots, e_d(z))$. $e_i(z)$ 表示

$z_1, \cdots, z_d$ 的初等对称多项式. 若 $P_i$ 全不相同，$D$ 附近的局部坐标亦可选为 $(z_1, \cdots, z_d)$. 另一方面，若 $P_i$ 全相同，则坐标为

$(z_1 + \cdots + z_d, \cdots, z_1 \cdots z_d)$ ;

有了 $M^{(d)}$ 之后，可定义 $M^{(d)} \to \mathrm{Div}(M)$，$\to \mathrm{Jac}(M)$

$P_1 + \cdots + P_g \mapsto (P_1 - P_0) + \cdots + (P_g - P_0)$，再定义 $A^{(d)} = A \circ i : M^{(d)}$

我们就只需要证明 $A^{(g)}$ 是满射.

设 $D = \sum_{i=1}^{g} P_i$，$D'$ 是 $D$ 附近的一点，$D'$ 的坐标为 $(z_1, \cdots, z_g)$. 考虑 $D'$ 处 $A^{(d)}$ 的 Jacobian（利用 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 取 $\mathrm{Jac}(M)$ 上的坐标）:

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(A^{(d)}_j) = \frac{\partial}{\partial z_i}\int_{P_0}^{z_i} \omega_j = h_j(z_i)$$

设 $\omega_j(z) = h_j(z)dz$. 于是

$$\frac{\partial A^{(d)}}{\partial z} = \begin{pmatrix} h_1(z_1) & \cdots & h_1(z_g) \\ \vdots & & \vdots \\ h_g(z_1) & \cdots & h_g(z_g) \end{pmatrix}.$$

~~……~~ 我们可选一个 $P_1$ 使 $\omega_1(P_1) \neq 0$.（也即 $h_1(0) \neq 0$）.

然后调整 $\omega_2 \cdots \omega_g$ 使 $\omega_i(P_1) = 0$ $(i \geq 2)$.（只要选新的 $\omega_i$ 为 $\omega_i - \frac{h_i(0)}{h_1(0)}\omega_1$ 即可）接下来可找到一点 $P_2$ 使 $\omega_2(P_2) \neq 0$.

紧RS上的单值化亦可用 Ricci flow，就不作为选题了 ↝

再调整 $\omega_3\cdots\omega_g$ 使 $\omega_i(P_i)\neq 0$ $(i\geq 3)$，依次类推，我们可找到 $D=P_1+\cdots+P_g$，使 $\frac{\partial A^{(d)}}{\partial z}(D)=\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$，于是 $\det\left(\frac{\partial A^{(d)}}{\partial z}(D)\right)\neq 0$，即映射 $A^{(d)}$ 的 Jacobian 不恒为零。

最后~~[illegible]~~是紧复流形的一个小性质：若 $M, N$ 是紧连通复流形，且 $\dim_{\mathbb{C}} M=\dim_{\mathbb{C}} N$，若 $f: M\to N$ 的 Jacobian 不恒为零，则 $f$ 一定是满射。与 Riemann 面的情形一样，$f(M)$ 紧 $\Rightarrow f(M)$ 闭，$f$ 全纯 $\Rightarrow f(M)$ 开，于是 $f(M)=N$. □

课程至此结束，下面是期末论文选题：

1. 平面代数曲线正规化与紧 Riemann 面.
2. 紧 Riemann 面总可嵌入到 $\mathbb{P}^3$ 中.
3. 非紧 Riemann 面总可嵌入到 $\mathbb{C}^3$ 中.
4. 单值化定理（Perron 族方法）.
5. 单值化定理（$\bar\partial$ 问题的 $L^2$ 方法）
6. 单值化定理（紧 Riemann 面版）
7. Weierstrass 点与 Hurwitz 自同构定理.
8. 模形式与 Riemann 面.
9. 紧 RS 上全纯丛的 RR 定理与秩为 2 的全纯丛的分类.
10. 拟共形映照与 Teichmüller 理论.

Date:
Place:
Reminders

11. Torelli定理.
12. Riemann双线性关系, Siegel上半平面与Schottky问题.
13. θ函数. KP方程与Novikov猜想(Shiota定理)
14. Hard Lefschetz定理. Primitive分解与Hodge-Riemann双线性关系.
15. Kodaira消没和嵌入定理.
16. Hirzebruch-Riemann-Roch与Noether公式.
17. Grothendieck-Riemann-Roch与Riemann-Hurwitz公式.
18. Hodge定理的热方程证法.
19 Calabi猜想(Yau定理).

其它要求:

1. LaTeX排版. 提交PDF文件. A4纸. 10pt. 10页左右. 中英皆可. 且只限中英.
2. 标准格式: 标题. 作者. 摘要. 引言. 正文. 结论. 参考文献
3. 实质内容. 尽可能证明一切断言. 不要综述. 慎选难题.
4. 用清华邮箱发到我的邮箱, 不接受其它邮箱.
5. 截止日期: 6月30日24:00之前.

0. 每个选题都有参考文献. 见网络学堂课程文件区.