节日对照表

1月	新年元旦[01/01]	腊八节[农历十二月初八]	
2月	世界湿地日[02/02] 除夕[农历十二月三十]	国际气象节[02/10] 春节[农历正月初一]	情人节[02/14] 元宵节[农历正月十五]
3月	全国爱耳日[03/03] 国际警察日[03/14] 世界水日[03/22]	妇女节[03/08] 国际消费日[03/15] 世界气象日[03/23]	植树节[03/12] 世界森林日[03/21] 世界防治结核日[03/24]
4月	愚人节[04/01] 世界地球日[04/22]	清明[04/05]	世界卫生日[04/07]
5月	国际劳动节[05/01] 世界红十字日[05/08] 世界电信日[05/17] 全国学生营养日[05/20] 世界无烟日[05/31]	中国青年节[05/04] 国际护士节[05/12] 国际博物馆日[05/18] 国际生物多样性日[05/22] 端午节[农历五月初五]	全国碘缺乏病[05/05] 国际家庭日[05/15] 全国助残日[05/19] 国际牛奶日[05/23] 母亲节[第二个星期日]
6月	国际儿童节[06/01] 国际奥林匹克日[06/23]	世界环境日[06/05] 父亲节[第三个星期日] 全国土地日[06/25]	全国爱眼日[06/06] 防治荒漠化和干旱日[06/17] 国际反毒日[06/26]
7月	香港回归日[07/01] 中国人民抗日战争纪念日[07/07]	七夕情人节[农历七月初七] 世界人口日[07/11]	建党日[07/01]
8月	八一建军节[08/01]		
9月	劳动节[09/02] 国际臭氧层保护日[09/16] 中秋节[农历八月十五] 重阳节[农历九月九日]	国际扫盲日[09/08] 国际和平日[09/17] 国际聋人节[09/22]	教师节[09/10] 国际爱牙日[09/20] 世界旅游日[09/27]
10月	国庆节[10/01] 世界动物日[10/04] 世界视觉日[10/08] 国际盲人节[10/15] 世界传统医药日[10/22]	国际音乐节[10/01] 国际住房日[10/07] 世界邮政日[10/09] 世界粮食节[10/16] 联合国日[10/24]	国际减轻自然灾害日[10/02] 全国高血压日[10/08] 世界精神卫生日[10/10] 世界消除贫困日[10/17] 万圣节[10/31]
11月	中国记者日[11/08] 国际大学生节[11/17]	消防宣传日[11/09] 感恩节[11/28]	世界糖尿病日[11/14]
12月	冬至节[农历12月22日] 世界足球日[12/09]	世界艾滋病日[12/01] 圣诞节[12/25]	世界残疾人日[12/03]

Date:

Place:

Reminders

可积系统理论.

刘思齐

Date:
Place:
Reminders

§0. 引言

这门课叫可积系统理论，所以第一个问题是：

什么是可积系统？ (*)

在拓扑学或者李代数这类课程中，我们学到的第一个东西就是拓扑空间或者李代数的分类。然后整个学科的目标就是对所有这类数学对象完全地分类。但在可积系统理论中，这却是一个无法回答的问题。这里主要的困难~~不存在~~并不是没有问题的答案，而是答案太多了。传统的常微分方程的可积性还算好，有几个大家公认的定义。但是对于偏微分方程，以及更一般的各种差分方程，有很多种不同的可积性的定义。它们相互之间有共性，也有不同，一般来说并不等价。这些不同的定义往往来自不同的应用场合，所以都是根据某种需要量身订做的。因此，对于某种情况特别做的定义在其它场合可能就不合适了。这样一来就很难找到对所有情况都适合的定义。

在这份引言中，我们先回顾经典的可积性定义，介绍一些PDE的可积性质，然后给出我们对问题(*)的答案。

我们总可引入一些新的变量 →

$x^{1,0}=x^1,\ x^{1,1}=(x^1)',\ \dots,\ x^{1,d-1}=(x^1)^{(d-1)}$,

$x^{2,0}=x^2,\ x^{2,1}=(x^2)',\ \dots,\ x^{2,d-1}=(x^2)^{(d-1)},\ \dots$

$x^{n+1,0}=t$, 然后将方程(1)写为

$F^j_\beta(x,x')=0,\quad (x^{i,k})'=x^{i,k+1}\quad i=1\dots n\quad k=0\dots d-1$

$(x^{n+1,0})'=1$. 所以谈论ODE时, 总可不失一般性地写为如下一般形式:

$x^1,\dots x^N \in \mathbb{R}^N$. $F^j_\beta(x,x')=0,\quad j=1\dots N.$ (2)

即一阶自治系统. 这个(2)可以叫ODE的标准模型. 其中的 N 叫这个问题的相空间维数.

§0.1 常微分方程的可积性.

设 $x^1,\dots,x^n$ 是时间变量 $t\in\mathbb{R}$ 的未知函数. 它们满足一些微分方程: $F^j_\beta(x,x',\dots,x^{(d)},t)=0$, $j=1\dots n$ (1)

(我们只考虑方程个数与未知函数个数相同的系统. 对于超定或欠定的情况, 可将多余的变量视为参数).

什么时候可以说(1)式是可积的呢?

首先, 可积这个词并不是说解可以用积分表示的意思. 只是因为解微分方程时经常要积分, 可积分就意味着可解, 所以可积在这里只是可解的意思.

接下来可解又是什么意思呢? 随便给个ODE, 只要它满足解的存在唯一性定理, 它的解就已经确定了. 我们甚至可以把这个解起个名字, 比如某某函数, 就可以说这个ODE的解就是某某函数. 如果可以这样, 任何ODE都是可积的, 这就把可积变成一个空的概念了.

在继续讨论可积性之前, 我们先看一些不可积的例子.

例 I. (Lorenz 吸引子)

这个~~初值~~通解显然具有初值敏感性。→
但这并非混沌的严格定义，事实上混沌也有很多不同的定义，方程(4)是否是一个混沌系统我并不清楚，熟悉动力系统的人也许可以回答这个问题。

$$(3)\quad\begin{cases} x' = \sigma y - \sigma x \\ y' = \rho x - xz - y \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$$

$x, y, z \in \mathbb{R}$ 是未知函数。

$\sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R}$ 是参数。

它作为一个ODE显然满足解的存在唯一性定理，你甚至可以证明它对任何初值在 t 的充分小的邻域上存在解析解，即解可由收敛的幂级数给出。

例 2.（Jerk系统）形如 $J(x''', x'', x', x) = 0$ 的ODE叫Jerk系统（Jerk即加加速度的英文，并非骂人话），它们经常出现在电路分析中。下面这个例子是精心设计的，也许不是那么有名，但富于启发性：

$$xx''' - x'x'' - 3xx'' + x'^2 + 2xx' = 0. \qquad (4)$$

它的通解可写为 $x(t) = A\cos(\omega e^t) + B\sin(\omega e^t)$。
特别地，当 $B = \frac{1}{\omega}$，$\omega \to 0$ 时有~~特解~~极限解
$x(t) = a + be^t$。

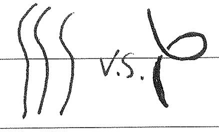
练习1：求解(4)。

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

我们看到，不论是(3)还是(4)，其~~　~~标准型都是3维的，或者说，其相空间维数都是3。这是有原因的。因为动力系统理论中的Poincaré-Bendixson定理已经将2维的光滑动力系统分类清楚了，不可能出现混沌。换句话说，混沌只会出现在3维甚至以及更高维。

为什么3这么特别？或者说2为什么就不能出混沌？直观地想，在3维中ODE的轨线可以互相缠绕，形成复杂的结构，但在2维，



画了一条线之后，平面就被分开了，其它的线只能在它左边或右边，所以想复杂也复杂不起来。

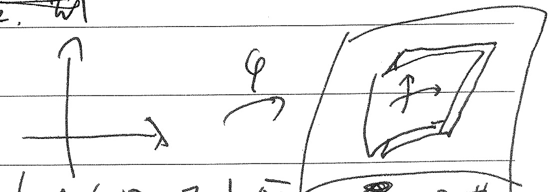
这个事实也可以用更几何的语言来写。首先不妨假设在ODE标准型中 $\det\left(\frac{\partial F_a}{\partial x_i}\right) \neq 0$，于是由隐函数定理可解出 $\dot{x}_a = f_a(x)$. (5) 即将方程化为演化型方程。演化方程定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量场。更一般地，我们可以想象问题的相空间是一个流形 M，$\dim M = n$（例如陀螺问题中，$M = SO_3$）。方程(5)即 M 上的一个向量场 $X \in \Gamma(TM)$ 的局部坐标表示。我们不妨设对 $\forall p \in M$，$X(p) \neq 0$，于是对 M 上任一点 p，都可定义 X 的过 p 点的轨线（即 ~~X~~

$(x^i)' = \gamma^i(x)$, $x^i(0) = p^i$ 的解）这些线给出 $\overset{t}{\underset{\cap}{\mathbb{R}}} \hookrightarrow M$ 的一个单浸入（未必是嵌入，因为其像可能不同胚于 $\mathbb{R}$，如环面无理流）。M 上的点则可按是否在同一轨线上定义等价关系。这样的几何结构叫 foliation。因为浸入子流形是一维的，所以叫一维 foliation。$n-1$ 则叫它的余维数。

前面所说的现象用 foliation 的语言来说，即当 foliation 的余维数为 1 时（即 $n=2$），不可能出现混沌现象。事实上这在 foliation 理论中是一个更一般结论的推论。在 foliation 理论中，余维 1 的 foliation 有个结构理论（theory of levels），它指出这种 foliation 不会太坏，或者说，没有混沌，或者说，是可积的。

一个余维数为 k 的 foliation 可在 M 上定义一个切丛的子丛，或者用 Frobenius 定理的术语，定义一个 k 维可积分布。若用局部坐标来写，设叶子上的坐标向量场为 ~~$X_1, \dots, X_k$~~

$$X_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad i = 1 \dots k$$



则它们也在 M 上定义 k 个向量场 $\varphi(X_i) =: \tilde{X}_i$，且满足 $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = 0$。

Date:
Place:
Reminders

此结论与Hamilton系统的Liouville可积 →
性并相符. 在Hamilton系统中, 由Noether定理,
单参数对称与守恒量一一对应, 所以在Liouville定
理中说的是守恒量的个数, 而不是对称的个
数.

Date:
Place:
Reminders

让我们回到ODE的情形. 如果我们希望一个ODE的轨线不要缠得太厉害, 最简单的做法就是要求它实际上是一个更高维foliation的一部分. 如果想要完全禁止混沌现象, 那么这个轨线一定要落在某个余维一的foliation当中. 所以, 不妨记这个ODE对应的向量场为 X_1, 则存在 $X_2, \dots, X_{n-1}$, 满足 $[X_i, X_j]=0$. 它们的坐标形式为

$$\frac{dx^i}{dt_j} = \xi^i_j(x), \quad i=1,\dots,n, \quad j=1\dots n-1.$$

即 $n-1$ 个相容的ODE. 它们的解即这个foliation的叶子的坐标表示 $\varphi(t)=\{x^i(t_1,\dots,t_{n-1}) \mid i=1\dots n\}$. 这些额外的参数 $t_2,\dots,t_{n-1}$ 可以叫原方程 $\frac{dx^i}{dt_1}$ 的对称. 即若 $x^i(t_1,0,\dots,0)$ 是原方程的解, 则 $x^i(t_1,t_2,\dots,t_{n-1})$ 也是解.

所以我们可以得出这样一个结论: 一个ODE是可积的, 当且仅当能够找到足够多的对称. 用几何的语言来写, 即它的一个 $X_1 \in \Gamma(TM)$ 是可积的, 如果能够找到 $X_2,\dots,X_{\dim M-1} \in \Gamma(TM)$, 使 $[X_i, X_j]=0$.

$X_1 = X$
$i,j=1,\dots,\dim M-1$.

若显含 $x^1,\dots,x^m$，则可通过引入新变量的方法 → 去掉它们，使之成为自治系统。

此外还要假设 F^j 不依赖于 u^i_{tt}, $u^i_{tx_j}, \dots$ → 等含 t 的高阶导数，或者引入新变量 $u^i_t = v^i$，$u^i_{tt} = v^i_t$，…等，然后对新变量要提 $\det(\cdots)\neq 0$ 的条件。

Date:
Place:
Reminders

§0.2 偏微分方程的可积性

设 $x^1,\dots,x^m \in \mathbb{R}^m$，$u^1,\dots,u^n$ 是 $x^1,\dots,x^m$ 的未知函数。一个关于 $u^1,\dots,u^n$ 的偏微分方程可写为

$$F^j(u,u',\dots,u^{(d)})=0,\quad j=1,\dots,n \qquad (1)$$

~~若它是演化型的，且可写为 $\frac{\partial F^j}{\partial x}$~~ 若 $x^1,\dots,x^m$ 中有一个代表时间 t，记它们为 $t, x^1,\dots,x^{m-1}$，再假设 ~~F^j 可写为关于 t 的演化方程~~ $\det\left(\frac{\partial F^j}{\partial u^i_t}\right)\neq 0$，则利用隐函数定理可将 (1) 写为演化型方程

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = X^i(u,u',\dots,u^{(d)}) \qquad (2)$$

我们今后只考虑演化型方程（事实上我也在研究非演化方程的有关问题，但答案尚不明确，所以暂时不考虑这种更一般的情形）

对一个演化型方程 (2)，x 的个数叫空间维数，记为 D，则方程 (2) 叫一个 $1+D$ 维系统，1 代表时间维。本课程将只考虑 $1+1$ 维系统，$D\geq 2$ 的系统人们目前只知道一些例子，并没有较好的一般性理论。从物理角度看，$1+1$ 维描述的正是各种 2 维系统，它们在物理上也常常是精确可解的。3 维以上的问题则

Date:
Place:
Reminders

很少有能精确求解的。 记空间变量为 x

对于一个 1+1 维演化方程，

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = X^i(u^i, u^i_x, u^i_{xx}, \dots, u^i_{N_x}) \tag{3}$$

我们可引入 $u^{i,s} = \partial_x^s u^i$，于是有

$$\frac{\partial u^{i,0}}{\partial t} = X^i, \quad \frac{\partial u^{i,1}}{\partial t} = \partial_x \frac{\partial u^i}{\partial t} = \partial_x X^i = \sum_{\substack{i=1\dots n\\ s=0,\dots,N}} u^{i,s+1}\frac{\partial X^i}{\partial u^{i,s}},$$

$$\frac{\partial u^{i,2}}{\partial t} = \partial_x^2 X^i = \cdots, \quad \cdots \tag{4}$$

所以，若将 $u^{i,s}$ 视为真正的未知函数，则(4)可视为这无穷多个未知函数的一个常微分系统。用几何的语言来说，若将 $u^{i,s}$ 视为一个无穷维流形的坐标，则(4)即这个流形上的向量场。所以一个形如(3)的方程总可视为一个无穷维ODE。

接下来，什么叫可积性呢？对于(3)，按前一节的说法，(3)是可积的当且仅当我们能找到 $\dim M-1$ 个独立的 X_i，使 $[X_i, X_j]=0$。 但是此时真正的 $\dim M=\infty$，所以 $\dim M-1=\infty$，所以应该说有无穷多对称就是可积的充分必要条件吗？

Date:
Place:
Reminders

答案显然没有这么简单. 在有限维, 真正的余维一是 X 的轨线全落在一个余维一的 foliation 中. 但在无穷维流形上, 什么叫余维数呢? 有没有可能我们找到的 X, 实际只给出余维 2, 余维 3 甚至余维 ∞ 的 foliation 呢? 毕竟 $\infty-\infty$ 也可以等于 ∞.

我想这就是偏微分方程可积性定义的真正困难之处. 我们只能知道无穷维对称是一个必要条件, 但它远不是充分的. 下面将介绍的一些可积性定义有的可以保证无穷维对称的存在, 有的甚至不能保证. 但它们都在某些领域被视为某种可积性. 另外, 没有一种可积性涉及到无穷维空间中的 foliation 是否余维一的问题. 我想这也是一个值得研究的问题. 不过它更像无穷维动力系统中的问题, 这里就不多讨论了.

§1 KdV 方程的可积性.

下面我们以 KdV 方程为例讨论各种可积性. KdV 方程即为如下方程

$$\alpha u_t + \beta u u_x + \gamma u_{xxx} = 0 \qquad u(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}. \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ 为参数}.$$

通过 $u \mapsto c_1 u$, $x \mapsto c_2 x$, $t \mapsto c_3 t$, 可以调节参数 α, β, γ 的值. 我们习惯上取

(5)

$$u_t = uu_x + \frac{\varepsilon^2}{12}u_{xxx}.$$

因为这是直接出现在Witten猜想中的形式，~~[illegible]~~ 这是我们主要的应用场合.

§1.1 孤子解.（历史略）.

先考虑(5)的行波解，设 $u(x,t)=f(x+ct)$，记 $\xi=x+ct$

则(5)变为 $cf'(\xi)=f(\xi)f'(\xi)+\frac{\varepsilon^2}{12}f'''(\xi)$，两边积分得

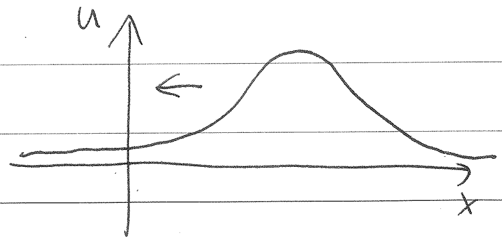
$cf(\xi)=\frac{1}{2}f^2(\xi)+\frac{\varepsilon^2}{12}f''(\xi)+A$. 乘以 $f'(\xi)$ 再积分得

$$\frac{c}{2}f^2(\xi)=\frac{1}{6}f^3(\xi)+\frac{\varepsilon^2}{6}(f'(\xi))^2+Af(\xi)+B$$

考虑 $A=B=0$ 的特殊情况，则可解得

$f(\xi)=3c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3c}\,(\xi-\xi_0)}{\varepsilon}\right)$，于是

$$u(x,t)=3c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3c}}{\varepsilon}(x+ct-\xi_0)\right).$$



这就是KdV方程的单孤子解.

Date:
Place:
Reminders

KdV方程(5)等价于 →

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon^2}{12\tau^2}\left(12(\tau\tau_{xt}-\tau_x\tau_t)-\varepsilon^2(3\tau_x^2-4\tau_x\tau_{3x}+\tau\tau_{4x})\right)\right)=0.$$

所以只需解

$$12(\tau\tau_{xt}-\tau_x\tau_t)=\varepsilon^2(3\tau_x^2-4\tau_x\tau_{3x}+\tau\tau_{4x})\qquad(6)$$

它称为KdV的Hirota双线性方程。

定义 $D_x^n(f\cdot g)=(\partial_{x_1}-\partial_{x_2})^n f(x_1)g(x_2)\big|_{x_1=x_2=x}$,

以及 $D_t^n\cdots$, $D_x^nD_t^m\cdots$ 等. 则方程(6)可写为

$$\left(D_xD_t-\frac{\varepsilon^2}{12}D_x^4\right)\tau\cdot\tau=0.$$

这种方程叫Hirota方程 双线性

($\Leftrightarrow$ $2(\tau\tau_{xt}-\tau_x\tau_t)=\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\tau_x^2-\frac{2}{3}\tau_x\tau_{xxx}+\frac{1}{6}\tau\tau_{4x}\right)$ 与(6)等价)

Date:
Place:
Reminders

上述孤子解亦可写为如下更简单的形式

$$u(x,t)=\varepsilon^2\frac{\partial^2\log\tau(x,t)}{\partial x^2},\quad 其中$$

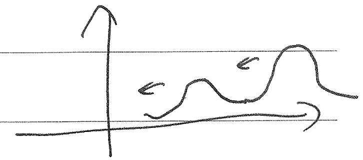
常数

$$\tau(x,t)=1+e^{\xi(x,t;k)},\quad \xi(x,t)=kx+\frac{\varepsilon^2}{12}k^3t-\xi^0.$$

若取

$$\tau(x,t)=1+e^{\xi_1(k_1)}+e^{\xi_2(k_2)}+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2e^{\xi_1(k_1)+\xi_2(k_2)}.$$

其中 $\xi_i(k_i)=k_ix+\frac{\varepsilon^2}{12}k_i^3t-\xi_i^0$ $i=1,2$. 则可以验证相应的u仍是KdV的解



更一般地, 可取

$$\tau(x,t)=1+\sum_{i=1}^n e^{\xi_i}+\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}e^{\xi_i+\xi_j}+\cdots+a_{1\cdots n}e^{\xi_1+\cdots+\xi_n}$$

其中 $\xi_i(k_i)$ 同上, $a_{ij},\cdots,a_{1\cdots n}$ 是一些依赖 $k_1\cdots k_n$ 的常数, 使相应的u是KdV的n孤子解.

练习2: 写出KdV方程(5)的3孤子解.

一般认为, 如果一个演化方程有n孤子解, 则它应该

Hirota 算子. 见前页.

反散射方法. 有限带势解, …

Date:
Place:
Reminders

是可积的 (有的方程只能写出单孤子解或双孤子解, 但找不到 $n\geq 3$ 的 n 孤子解, 这种就不认为是可积的. 一般~~…~~若有 $n=3$ 的多孤子解, 则也会有更多的. 所以也有人将是否有3孤子解做为评判标准).

§1.2 Hirota 双线性方程.

如前所述, KdV 方程的求解可归结为关于函数 $\tau(x,t)$ 的双线性方程. 这也是很多可积系统的共性.

§1.3 Lax 对.

考虑算子 $L=\varepsilon^2\partial_x^2+u$ 的谱问题 $L\psi=\lambda\psi$.
若 ψ 依赖于某参数 t, 使 $L\psi(t)=\lambda\psi(t)$, 则称 $\psi(t)$ 为 ψ 的一个等谱形变. 例如若 $\psi(t)$ 按如下方式演化

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\frac{\varepsilon^2}{3}\partial_x^3+u\partial_x+\frac{1}{2}u_x\right)\psi =: A\psi,$$

则有

$$\frac{\partial(L\psi)}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial t}\psi+LA\psi=\lambda\frac{\partial\psi}{\partial t}=\lambda A\psi=AL\psi.$$

即 $\left(\frac{\partial L}{\partial t}+[L,A]\right)\psi=0$. 其中 $\frac{\partial L}{\partial t}+[L,A]=0$

展开即为 KdV 方程. (L,A) 则称 KdV 方程的 Lax 对.

或者直接计算 $\tilde{u}_t = \tilde{u}\tilde{u}_x + \frac{\varepsilon^2}{12}\tilde{u}_{xxx}$ →

Date:
Place:
Reminders

KdV的Lax方程还可写为一种等价形式：

$$\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x^2+u\right)\psi=\lambda\psi,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{3}(2\lambda+u)\psi_x-\frac{u_x}{6}\psi.$$

KdV方程则由条件 $(\psi_{xx})_t=(\psi_t)_{xx}$ 给出.

Lax形式可以用来证明KdV方程的很多性质. 例如下面的定理经常用来构造KdV方程的多孤子解

定理：若 u 是KdV方程(5)的解，ψ 与 φ 是Lax问题

$$\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x^2+u\right)\psi=\lambda\psi$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\cdots)\psi$$

的两个解，定义算子 $W=\partial_x-\sigma$，$\sigma=\frac{\varphi_x}{\varphi}$，$\tilde{L}=WLW^{-1}$. 则 $\tilde{L}=\frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x^2+\tilde{u}$，$\tilde{u}=u-\varepsilon^2\sigma_x$ 仍是KdV方程的解.

证明：关于 L 的形式只需验证 $WL=\tilde{L}W$. 关于解，只需验证对于 $\tilde{\psi}=W\psi$，$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t}=\tilde{A}\tilde{\psi}$，其中 $\tilde{A}$ 是将原来的 A 中的 u 换成 $\tilde{u}$ 得到的算子. 略 □.

练习：证明上述定理.

Date:
Place:
Reminders

应用：$u=0$ 显然是 KdV 的解，于是可写出两个平凡的波函数，对它们应用上述定理则可得单孤子解。对单孤子解再取两个波函数，于是又可应用一次定理得到双孤子解。如此继续可得 n 孤子解。

一个更好的结果是，一次取 KdV 谱问题的 n 对线性无关解，可将 n 次 Darboux 变换的结果用一个行列式简单地表出，由此可得 n 孤子解的行列式表达式。

§1.4 无穷多对称

所谓对称，即解空间上的群作用。我们这里先只考虑单参数 Lie 群的作用，即 $\varphi: \mathbb{R} \to \mathcal{M}$，$s \mapsto \varphi_s$，其中 $\mathcal{M}$ 表示方程的解空间。或者可写为，若 $u(x,t)$ 是 KdV 方程(5)的解，则存在一个函数 $u(x,t,s)$ 满足 $u(x,t,s=0)=u(x,t)$，且对 $\forall s \in \mathbb{R}$，$u(x,t,s)$ 都是(5)的解。例如 $u_1(x,t,s)=u(x+s,t)$ 就是这样的例子，$u_2(x,t,s)=u(x,t+s)$ 也是。但是更一般地，我们未必能写出 $u(x,t,s)$ 的显式表达式，所以只能寄希望于对称的无穷小生成

Date: Place: Reminders

元 $X = \frac{d}{ds} u(x,t,s)\Big|_{s=0}$. 从几何观点看，有一个对称就意味着给出的积分曲线实际上落在一个更大的积分子流形内（维数加了一）其无穷小生成元即另一个方向的切向量场。对于前面的两个例子

$$X_1 = \frac{d\, u_1(x,t,s)}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d(u(x+s,t))}{ds}\Big|_{s=0} = u_x$$

$$X_2 = \frac{d\, u_2(x,t,s)}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d(u(x,t+s))}{ds}\Big|_{s=0} = u_t = u u_x + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{xxx}.$$

更一般地，我们可直接定义KdV方程(5)的无穷小对称为另一个演化方程 $\frac{\partial u}{\partial s} = X(u, u_x, \dots, u^{(n)})$，

使得 $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = 0$.

例：我们记 X_1 为 $\frac{\partial u}{\partial t_0} = u_x$，原方程为 $\frac{\partial u}{\partial t_1} = u u_x + \frac{\varepsilon^2}{12} u_3$，

则 $\left[\frac{\partial}{\partial t_0}, \frac{\partial}{\partial t_1}\right] u = \frac{\partial}{\partial t_0}\left(u u_x + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{xxx}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}(u_x)$

$= u_x \cdot u_x + u \cdot u_{xx} + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{4x} - \left(u u_x + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{3x}\right)_x$

$= 0$.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

问题：除了 $\frac{\partial}{\partial t_0}$ 与 $\frac{\partial}{\partial t_1}$ 外，KdV 方程是否还有其它对称？

例 $$\frac{\partial u}{\partial t_2}=\frac{1}{2}u^2u_x+\frac{\varepsilon^2}{6}u_xu_{xx}+\frac{\varepsilon^2}{12}uu_{3x}+\frac{\varepsilon^4}{240}u_{5x}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_0},\frac{\partial}{\partial t_2}\right]u=\frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{u^2u_1}{2}+\frac{u_1u_2}{6}+\frac{uu_3}{12}+\frac{u_5}{240}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t_2}(u_{1})=\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)_x$$

（为书写方便，取 $\varepsilon=1$）

$$=(\ )_x-(\ )_x=0$$ （事实上 $\frac{\partial u}{\partial t_0}=u_x$ 是任何方程的对称）

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_1},\frac{\partial}{\partial t_2}\right]u=\frac{\partial}{\partial t_1}\left[\frac{u^2u_1}{2}+\frac{u_1u_2}{6}+\frac{uu_3}{12}+\frac{u_5}{240}\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial t_2}\left[uu_1+\frac{u_3}{12}\right]$$

$$=\Big[uu_1\cdot\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{u^2}{2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)_x+\frac{u_2}{6}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)_x+\frac{u_1}{6}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)_{xx}$$

$$+\frac{u_3}{12}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)+\frac{u}{12}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)_{xxx}+\frac{1}{240}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)_{5x}\Big]$$

$$-\Big[u_1\cdot\frac{\partial u}{\partial t_2}+u\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)_x+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)_{3x}\Big]$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$$\left(uu_1+\frac{u_3}{12}\right)$$

$$=\Bigg(\left(uu_1+\frac{u_3}{12}\right)+\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u_2}{6}\right)\left(uu_2+u_1^2+\frac{u_4}{12}\right)$$

$$+\frac{u_1}{6}\left(uu_3+3u_1u_2+\frac{u_5}{12}\right)+\frac{u}{12}\left(uu_4+4u_1u_3+3u_2^2+\frac{u_6}{12}\right)$$

$$+\frac{1}{240}\left(\cancel{uu_5+5u_1u_4+10u_2u_3+\frac{u_7}{12}}\right)\left(10u_3^2+15u_2u_4+6u_1u_5+uu_6+\frac{u_8}{12}\right)\Bigg)$$

$$-\Bigg[u_1\left(\frac{u^2}{2}u_1+\frac{1}{6}u_1u_2+\frac{1}{12}uu_3+\frac{1}{240}u_5\right)$$

$$+u\left(\frac{u^2}{2}u_2+uu_1^2+\frac{1}{6}u_1u_3+\frac{1}{6}u_2^2+\frac{1}{12}u_1u_3+\frac{1}{12}uu_4+\frac{u_6}{240}\right)$$

$$+\frac{1}{12}\Big[6u_1^2u_2+3uu_2^2+4uu_1u_3+\frac{7}{12}u_3^2+\frac{1}{2}u^2u_4+\frac{11}{12}u_2u_4$$

$$+\frac{5}{12}u_1u_5+\frac{1}{12}uu_6+\frac{1}{240}u_8\Big]$$

$=0.$

更一般地，

$$\frac{\partial u}{\partial t_3}=\frac{u^3}{6}u_1+\varepsilon^2\left(\frac{u^2u_3}{24}+\frac{uu_1u_2}{6}+\frac{u_1^3}{24}\right)$$

$$+\varepsilon^4\left(\frac{u_2u_3}{48}+\frac{u_1u_4}{80}+\frac{uu_5}{240}\right)+\varepsilon^6\cdot\frac{u_7}{6720}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_4} = \frac{u^4 u_1}{24} + \cdots + \frac{\varepsilon^8 u_9}{241920}$$ 也都是对称.

我们后面会证明，对 $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$，存在一个形如

$$\frac{\partial u}{\partial t_f} = f(u)u_1 + \varepsilon^2(\ \ ) + \varepsilon^4(\ \ ) + \cdots$$

的对称. 当 f 为多项式时，这个级数是截断的，于是给出前面的 $\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \cdots$

现阶段如何构造这些 $\frac{\partial}{\partial t_k}$？我们给出两种方法.

(a) 拟微分算子法

引理：对于算子 $L = \frac{\varepsilon^2}{2}\partial^2 + u$，存在一个拟微分算子 $X = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\partial + a_1\partial^{-1} + a_2\partial^{-2} + \cdots$ 使得 $X^2 = L$.

首先解释一下记号的含义. 这里的拟微分算子是指形如 $A = \sum_{i \le N} a_i \partial^i$ 的算子，其中 $i \in \mathbb{Z}$ 可取负值.

两个这样的算子的乘法定义为（A 如上，$B = \sum_{j \le M} b_j \partial^j$

Date:
Place:
Reminders

$$A\cdot B=\Big(\sum_{i\le N} a_i \partial_x^i\Big)\Big(\sum_{j\le M} b_j \partial_x^j\Big)$$

$$=\sum_{i\le N}\sum_{j\le M} a_i\Big(\sum_{k\ge 0}\binom{i}{k} b_j^{(k)}\partial_x^{i-k}\Big)\partial_x^j$$

$$=\sum_{i\le N}\sum_{j\le M}\sum_{k\ge 0}\binom{i}{k} a_i\, b_j^{(k)}\,\partial_x^{i+j-k}$$

记 $i=N-p$，$j=M-q$，则 $p,q\ge 0$，记 $r=p+q+k$，则

$$A\cdot B=\sum_{r\ge 0}\Bigg(\sum_{\substack{p,q\ge 0\\ p+q\le r}} a_p\binom{N-p}{r-p-q} b_q^{(r-p-q)}\Bigg)\partial_x^{M+N-r}$$

每个 ∂_x 的幂次的系数都是有限和，所以这个乘法在拟微分算子空间中定义了一个好的运算，使其成为一个环.

引理的证明：

$$X^2=\Big(\frac{2}{\sqrt{2}}\partial_x+\sum_{i\ge 1} a_i\partial_x^{-i}\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{2}}\partial_x+\sum_{j\ge 1} a_j\partial_x^{-j}\Big)$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x^2 + \sqrt{2}\varepsilon \sum_{i\ge 1} a_i \partial_x^{1-i} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sum_{i \ge 1} a_i' \partial_x^{-i}$$

$$+ \sum_{i,j\ge 1} \sum_{k \ge 0} a_i \binom{-i}{k} a_j^{(k)} \partial^{-i-j-k} = \frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x^2 + u$$

对比两边 ∂_x^{-k} 的系数 $(k\ge 0)$ 得:

∂_x^{0}: $u = \sqrt{2}\varepsilon a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{u}{\sqrt{2}\varepsilon}$.

∂_x^{-1}: $0 = \sqrt{2}\varepsilon a_2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} a_1' \Rightarrow a_2 = -\frac{u'}{2\sqrt{2}\varepsilon}$,

∂_x^{-2}: $0 = \sqrt{2}\varepsilon a_3 + (\cdots) \Rightarrow a_3 = \cdots$

一般地, ∂_x^{-k} 的系数给出 $\sqrt{2}\varepsilon a_{k+1} + P(a_1 \cdots a_k) = 0$,
其中 P 是 $a_1 \cdots a_k$ 的微分多项式, 于是可解出 a_{k+1}. □.

有了这些理论, KdV 方程的对称可直接取为 $$\frac{\partial L}{\partial t_n} = c_n \left[(L^{n+\frac{1}{2}})_+ , L \right].$$

其中 c_n 是无关紧要的常数. 若要使 $\frac{\partial u}{\partial t_n} = \frac{u^n}{n!} u_x + \cdots$,

可取 $$c_n = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \cdot n! \binom{\frac{1}{2}+n}{n}} = \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\varepsilon (2n+1)!!}.$$

Date:
Place:
Reminders

首先需说明 $\frac{\partial L}{\partial t_n}=[(X^{n+\frac{1}{2}})_+, L]$ 的确定义了 → 关于u的方程. 左边显然是 $\frac{\partial u}{\partial t_n}$. 而右边一方面是一个有限项的只含非负项的拟微分算子. 另一方面, 注意 $L=X^2$. 而 $[X^{n+\frac{1}{2}}, X^2]=0$. 所以

$$[(X^{n+\frac{1}{2}})_+, L]=[X^{n+\frac{1}{2}}-(X^{n+\frac{1}{2}})_-, X^2]$$

$$=-[(X^{n+\frac{1}{2}})_-, X^2]$$ 这是一个只含非正项的拟微分算子. 左右两边相等说明这个算子既不能有正幂项, 也不能有负幂项. 所以只能有常数项. 即它确实给出了方程.

Date:
Place:
Reminders

而一个拟微分算子 $A=\sum_{i\le N} a_i\partial^i$ 的正部 $(A)_+$ 定义为 $A_+=\sum_{i=0}^{N} a_i\partial_x^i$.

证明: 不妨设 $c_n=1$. 下证 $\frac{\partial L}{\partial t_n}=[(L^{n+\frac{1}{2}})_+, L]$.
当 $n=1$ 时, 不难证明这就是 KdV 方程. 下证对 $\forall m,n$
$[\frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial t_m}](u)=0$. 这等价于 $[\frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial t_m}](L)=0$.

$$[\frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial t_m}](L)=\frac{\partial}{\partial t_n}[(L^{m+\frac{1}{2}})_+, L]-\frac{\partial}{\partial t_m}[(L^{n+\frac{1}{2}})_+, L]$$

$$=[(\frac{\partial L^{m+\frac{1}{2}}}{\partial t_n})_+, L]+[(L^{m+\frac{1}{2}})_+, [(L^{n+\frac{1}{2}})_+, L]]$$

$$-[(\frac{\partial L^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t_m})_+, L]-[(L^{n+\frac{1}{2}})_+, [(L^{m+\frac{1}{2}})_+, L]]$$

引理: 设 $X=L^{\frac{1}{2}}$, 若 $XA+AX=0$. 则 $A=0$

引理: $\frac{\partial X^N}{\partial t_n}=[(L^{n+\frac{1}{2}})_+, X^N]$ $N=1,2,\cdots$.

(练习)

$$=\Big[[(L^{n+\frac{1}{2}})_+, L^{m+\frac{1}{2}}]_+-[(L^{m+\frac{1}{2}})_+, L^{n+\frac{1}{2}}]_+$$

$$+[[(L^{m+\frac{1}{2}})_+, (L^{n+\frac{1}{2}})_+], L]$$

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

$$=\left[\left[(L^{n+\frac{1}{2}})_+,\ L^{m+\frac{1}{2}}\right]_+ + \left[L^{n+\frac{1}{2}},\ (L^{m+\frac{1}{2}})_+\right]_+ - \left[(L^{n+\frac{1}{2}})_+,\ (L^{m+\frac{1}{2}})_+\right]_+,\ L\right].$$

$$=\left[\left[(L^{n+\frac{1}{2}})_+,\ L^{m+\frac{1}{2}}\right]_+ + \left[(L^{n+\frac{1}{2}})_-,\ (L^{m+\frac{1}{2}})_+\right]_+,\ L\right]$$

$$=\left[\left[(L^{n+\frac{1}{2}})_+ + (L^{n+\frac{1}{2}})_-,\ L^{m+\frac{1}{2}}\right]_+,\ L\right]=0. \quad \square$$

(b) 生成函数法.

考虑另一种 Lax 形式: $\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x^2+u\right)\psi=\lambda\psi.$

$$\psi_t=\frac{1}{3}(2\lambda+u)\psi_x-\frac{u_x}{6}\psi.$$

我们将它改写为

$$\cancel{\frac{\varepsilon^2}{2}\psi_{xx}=\underbrace{(\lambda-u)}_{A}\psi,\quad \psi_t=B\psi_x+C.}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\psi_{xx}+A\psi=0,\quad \psi_t=\frac{B}{2}\psi_x+C\psi.$$

然后考察相容性条件 $\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\psi_{xx}\right)_t=\frac{\varepsilon^2}{2}(\psi_t)_{xx}.$

Date:
Place:

Reminders

或者可由 $\frac{\partial \psi}{\partial t_n} = A_n\psi = \left(L^{n+\frac{1}{2}}\right)_+\psi$ 直接看出. →

Date:
Place:

Reminders

$$左 = (-A\psi)_x = -A_t\psi - A\psi_t$$

$$= -A_t\psi - A\left(\tfrac{1}{2}B\psi_x + C\psi\right).$$

$$右 = \frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x^2\left(\tfrac{1}{2}B\psi_x + C\psi\right)$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\tfrac{1}{2}B\psi_{xxx} + B_x\psi_{xx} + \frac{B_{xx}}{2}\psi_x + C_{xx}\psi + 2C_x\psi_x + C\psi_{xx}\right)$$

$$-A\psi_x - A_x\psi$$

$$= \frac{B}{2}(-A\psi)_x + B_x(-A\psi) + \frac{\varepsilon^2 B_{xx}}{4}\psi_x + \frac{\varepsilon^2}{2}C_{xx}\psi + \varepsilon^2 C_x\psi_x + C(-A$$

对比 ψ 与 ψ_x 的系数可得

$$\psi_x:\ \cancel{-\tfrac{1}{2}AB} = \cancel{-\tfrac{1}{2}AB} + \frac{\varepsilon^2}{4}B_{xx} + \varepsilon^2 C_x \Rightarrow C = -\frac{1}{4}B_x.$$

$$\psi:\ -A_t \cancel{-AC} = -\frac{1}{2}BA_x - AB_x + \frac{\varepsilon^2}{2}C_{xx} \cancel{-AC}$$

$$\Rightarrow A_t = AB_x + \frac{1}{2}A_xB + \frac{\varepsilon^2}{8}B_{xxx} \qquad (*)$$

例如当 $A = u-\lambda$, $B = \frac{2}{3}(2\lambda+u)$ 时上式即KdV方程(5)

对同样的 $A = u-\lambda$, (*) 中的B也可取成更一般的 λ 的多项式. 由此可得KdV的其它对称.

设 $B_n(\lambda) = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_n$ 其中 $b_0 = 1$, 将其代

7.3

Date:
Place:
Reminders

这里每步都需要解形如 $b_k' = P(u, u', \dots, u^{(k)}) \to$ 的方程，巧合的是，右边总是一个全微分，这可通过下面 b_k 的另一种递推公式看出。

Date:
Place:
Reminders

由此得

$$u_t = (u-\lambda)(b_1'\lambda^{n-1} + b_2'\lambda^{n-2} + \dots + b_n')$$

$$+\frac{1}{2}u_x(b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_n)$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{8}(b_1'''\lambda^{n-1} + b_2'''\lambda^{n-2} + \dots + b_n''').$$ 对比系数，

λ^n: $0 = -b_1' + \frac{1}{2}u_x b_0.$ $\Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}u.$

λ^{n-1}: $0 = u b_1' - b_2' + \frac{1}{2}u_x b_1 + \frac{\varepsilon^2}{8}b_1''' \Rightarrow b_2 = \frac{3}{8}u^2 + \frac{\varepsilon^2}{16}u''.$

λ^{n-2}: $0 = u\cdot b_2' - b_3' + \frac{1}{2}u_x b_2 + \frac{\varepsilon^2}{8}b_2'''$ ……

λ^0: $u_t = u b_n' + \frac{1}{2}u_x b_n + \frac{\varepsilon^2}{8}b_n'''.$

注意每一步解出来的 b_k 是不依赖于 n 的，所以将系数生成函数 $b(\lambda) = b_0 + \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2}{\lambda^2} + \dots$，则 $b(\lambda)$ 满足

如下方程 $A b_x + \frac{1}{2}A_x b + \frac{\varepsilon^2}{8}b_{xxx} = 0.$ 两边乘以 $b(\lambda)$

再积分得 $A b^2 + \frac{\varepsilon^2}{8}(2b b_{xx} - b_x^2) = -\lambda.$ (*2)

这个式子给出 b 的系数的一个二次递推关系，而且不需要积

Date: ....
Place: ....

Reminders

C_n 同前. 这可通过将 $\psi_t = \bigcirc\, \psi_{2n+1} + \cdots$

改写为 $\psi_t = \bigcirc\, \lambda^n \psi_x + \cdots$ 看出.

Date: ....
Place: ....

Reminders

令, 于是 $b(\lambda)$ 就定义好了. 下面可取 ~~$B_n(\lambda) = (\lambda^n b(\lambda))_+$~~

$$B_n(\lambda) = \sqrt{2}\,\varepsilon\, C_n \left(\lambda^n b(\lambda)\right)_+ .$$

(此处 $\left(\sum_{i\le n} a_i \lambda^i\right)_+ = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$)

于是每个 $B_n(\lambda)$ 通过(*)可定义一个 $\frac{\partial u}{\partial t_n}$.

下面证明它们也是两两交换的.

引理: $b_{t_n} = \frac{1}{2}\left(B_n b_x - b B_{n,x}\right)$

证明: 对(*2)求关于 t_n 的导数得

$$A_{t_n} b^2 + \left[2Ab + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(b\alpha^2 - b_x \alpha_x + b_{xx}\right)\right] b_{t_n} = 0.$$

设 $b_{t_n} - \frac{1}{2}\left(B_n b_x - b B_{nx}\right) = h$. 即 $b_{t_n} = h + \frac{1}{2}\left(B_n b_x - b B_{n,x}\right)$

代入得 $\left(A B_n' + \frac{1}{2} A' B_n + \frac{\varepsilon^2}{8} B_n'''\right) b^2$

$$+\left[2Ab + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(b\alpha^2 - b'\alpha_x + b''\right)\right]\left[h + \frac{1}{2}\left(B_n b' - b B_n'\right)\right] = 0.$$

整理得

$$b B_n \underbrace{\left(\frac{1}{2} A' b + A b' + \frac{\varepsilon^2}{8} b'''\right)}_{=0} + \left[2Ab + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(b\alpha^2 - b'\alpha_x + b''\right)\right] h = 0.$$

两边再除以 b. 再将 $Ab^2 = -\lambda - \frac{\varepsilon^2}{8}\left(2bb'' - b'^2\right)$ 代入得

$h=\sum_{i=1}\frac{h_i}{\lambda^i}$，代入后依次看λ的幂次即可.

练习.

Date:
Place:
Reminders

$$\left[1-\frac{\varepsilon^2}{8\lambda}\left(b^2\partial_x^2-bb'\partial_x+b'^2-bb''\right)\right]h=0.$$ 所以 $h=0$.

□.

对称性的证明：要证 $\left[\frac{\partial}{\partial t_n},\frac{\partial}{\partial t_m}\right](u)=0$，只需证 $\left[\frac{\partial}{\partial t_n},\frac{\partial}{\partial t_m}\right](A)=0$. 而

$$\frac{\partial}{\partial t_n}\left(\frac{\partial A}{\partial t_m}\right)-\frac{\partial}{\partial t_m}\left(\frac{\partial A}{\partial t_n}\right)=\left(A\partial_x+\frac{1}{2}A_x+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3\right)(Z).$$

其中 $Z=\frac{\partial B_m}{\partial t_n}-\frac{\partial B_n}{\partial t_m}+\frac{1}{2}(B_mB_n'-B_nB_m')$. 所以只需证 $Z=0$.

考虑（不妨去掉定义中的 $\sqrt{2}\varepsilon c_n$ 与 $\sqrt{2}\varepsilon c_m$）

$$2\frac{\partial B_m}{\partial t_n}-B_nB_m'=(\lambda^m 2b_{t_n})_+-B_nB_m'$$

$$=(\lambda^m(B_nb'-bB_n'))_+-B_n(\lambda^m b')_+$$

$$=\left(B_n(\lambda^m b')_++B_n(\lambda^m b')_--\lambda^m b(\lambda^n b)'_+\right)_+-B_n(\lambda^m b')_+$$

$$=\left((\lambda^n b)(\lambda^m b')_-+\lambda^m b(\lambda^n b')_--\lambda^{n+m}bb'\right)_+.$$

最后一行关于 m.n 对称. 所以有

$$2\frac{\partial B_m}{\partial t_n}-B_nB_m'=2\frac{\partial B_n}{\partial t_m}-B_mB_n'.$$

□.

在有限维理论中
若方程是Lagrangian的或Hamiltonian的，则→
无穷小对称性与守恒量是一一对应的（Noether定理）
KdV也是Hamilton系统（见后文），所以④与⑤在某种意义上是等价的。

另一种等价的做法是，将$\mathbb{R}$换成S^1，然后对u附加周期边条件，结果也是将定义域换成下一页的版本，此处略。

↑

因为泛函可能是$\int_{\mathbb{R}}$也可能是$\int_{S^1}$，但实际上哪种都一样，所以后面就只写$\int$了。

⑥ 无穷多守恒律

可积性的另一种重要表现是无穷多守恒律。对于如下形式的演化方程：$\frac{\partial u}{\partial t} = X(u, u', \cdots, u^{(k)})$，我们说一个泛函 $F[u] = \int_{\mathbb{R}} f(u, u', u'', \cdots, u^{(n)})\,dx$ 是 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的守恒律，

如果
$$\frac{\partial F(u)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k\geq 0} \frac{\partial f}{\partial u^{(k)}} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t}\,dx \qquad \frac{\partial u^{(k)}}{\partial t} = \partial^k\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sum_{k\geq 0} \partial^k(X) \frac{\partial f}{\partial u^{(k)}}}_{=G}\,dx = 0.$$

对任意的 $u: \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ 成立。但这样的定义显然太强了，因为涉及到一个反常积分，它的收敛性会带来很大的麻烦。比较负责的一种定义是，只考虑在$x=\pm\infty$处衰减得很快的那些u。如果记 $\frac{\partial F}{\partial t}(u) = \int G(u, u', \cdots)\,dx$，问题就归结为，对于什么样的$G$，$\frac{\partial F}{\partial t}(u) = 0$？这仍然不是一个容易的问题。不过我们知道它的一个充分条件：若$G = \partial g$，则 $\int_{\mathbb{R}} G\,dx = g\big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$。所以在谈论守恒量的时候，我们并不关心这其中的分析问题，而是简单地用代数条件来代替上面的定义：
下面的这个

我们~~渐~~渐渐地意识到，在这种讨论中，f，或 g 或 h 中依赖的 u 的导数的最高阶数其实是不重要的，所以干脆省掉好了。在后面的一般理论中，甚至可以依赖无穷多个导数。→

$\int_{\mathbb{R}} f(\cdots)\,dx$

定义：泛函 $F[u]$ 叫 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的守恒量，如果存在另一个函数 $g(u,u',\cdots)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial t}=\partial_x g$.

注：若 u 满足无穷远衰减的条件，则对任意 $h=h(u,u',\cdots)$，$\int_{\mathbb{R}}(f+\partial_x h)\,dx=F[u]+0=F[u]$.

所以泛函 F 的密度 f 的选取可以有一个全微分的自由度。这个自由度并不影响上述定义，因为若 $f_t=\partial_x g$，则 $(f+\partial_x h)_t=(g+\partial_t h)_x$.

例：对 KdV 方程 $u_t=uu_x+\frac{\varepsilon^2}{12}u_{3x}$，易知 $H_0=\int u\,dx$ 是守恒量，因为 $\frac{\partial H_0}{\partial t}=\int\left(uu_x+\frac{\varepsilon^2}{12}u_{3x}\right)dx=0$.

另外，$H_1=\int\frac{u^2}{2}\,dx$ 也是，因为

$$\frac{\partial H_1}{\partial t}=\int u\cdot u_t\,dx=\int u\left(uu_x+\frac{\varepsilon^2}{12}u_{xxx}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{3}u^3+\frac{\varepsilon^2}{12}uu_{xx}-\frac{\varepsilon^2}{24}u_x^2\right)_x dx=0.$$

但是 $\int\frac{u^3}{6}\,dx$ 就不是了，因为

事实上 dx 也没什么用, 以后就只保留 $\int$ 了. →

Date:
Place:
Reminders

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \frac{u^3}{6}dx\right) = \int \frac{u^2}{2}\left(uu_x + \frac{\varepsilon^2}{12}u_{xxx}\right)dx$$

分部积分

$$= \int \underbrace{\left(\frac{u^4}{8}\right)_x}_{\to 0} + \frac{\varepsilon^2}{24}\left(u^2u_{xxx}\right)dx = \frac{\varepsilon^2}{24}\int\left(-\overbrace{2uu_xu_{xx}}^{(u_x^2)_x}\right)dx$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{24}\int\left(u_x^3\right)dx$$

这不可能是全微分(我们后面会发展一些代数工具来证明这点.

事实上, 正确的下一个守恒律应该是 $H_2 = \int\left(\frac{u^3}{6} - \frac{\varepsilon^2}{24}u_x^2\right)dx$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} = \int\left[\frac{u^2}{2}\left(uu_x + \frac{\varepsilon^2}{12}u_{3x}\right) + \frac{\varepsilon^2}{12}u_{xx}\left(uu_x + \frac{\varepsilon^2}{12}u_{3x}\right)\right]$$

$$= \int\left[\left(\frac{u^4}{8}\right)_x + \frac{\varepsilon^2}{24}\Big[\overbrace{\underline{u^2u_{3x} + 2uu_xu_{xx}}}^{(u^2u_{xx})_x}\Big] + \frac{\varepsilon^4}{144}\overbrace{u_{xx}u_{3x}}^{\frac{1}{2}(u_{xx}^2)_x}\right]$$

$$= 0.$$

KdV 方程有无穷多形如 $H_k = \int\left(\frac{u^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots\right)$ 的守恒律.
接下来的问题是如何找到它们. 我们也将用两种方法(拟微分算子法和生成函数法)来构造这些守恒量并证明之.

Date:
Place:
Reminders

(a) 拟微分算子法.

定理：设 $H_n = c_n' \int \operatorname{res}(L^{n+\frac{1}{2}})$. $c_n' = \varepsilon \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!!}$.

则 H_n 是一切 $\frac{\partial u}{\partial t_m}$ 的守恒量.

这里的 $\operatorname{res}(\sum_{i\in N} a_i \partial^i) := a_{-1}$.

引理：设 A, B 是两个拟微分算子, 则 $\int \operatorname{res}[A, B] = 0$.

证明：设 $A = \sum a_i \partial^i$, $B = \sum b_j \partial^j$, 事实上我们只需证对特定的 i, j, $\operatorname{res}[a_i \partial^i, b_j \partial^j]$ 是全微分即可.

$$\int \operatorname{res}[a_i \partial^i, a_j b^j] = \int \operatorname{res} \sum_{k\geq 0} \left(a_i \binom{i}{k} b_j^{(k)} \partial^{i+j-k} - b_j \binom{j}{k} a_i^{(k)} \partial^{i+j-k} \right)$$

$$= \int a_i \binom{i}{i+j+1} b_j^{(i+j+1)} - b_j \binom{j}{i+j+1} a_i^{(i+j+1)} \quad \text{(分部积分)}$$

$$= \int a_i b_j^{(i+j+1)} \left(\binom{i}{i+j+1} + (-1)^{i+j} \binom{j}{i+j+1} \right) = 0. \quad \square$$

定理的证明：

Date:
Place:
Reminders

$$\frac{\partial H_n}{\partial t_m} = c_n' \frac{\partial}{\partial t_m} \int \operatorname{res}\left(L^{n+\frac{1}{2}}\right) = c_n' \int \operatorname{res}\left(\frac{\partial L^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t_m}\right)$$

$$= c_n' \int \operatorname{res}\left[\left(L^{m+\frac{1}{2}}\right)_+, L^{n+\frac{1}{2}}\right] = 0. \quad \square$$

(b) 生成函数法.

定理：设 $H_n = -\frac{2^{n+1}}{(2n-1)!!} \int \operatorname{res}_{\lambda=0}\left(\frac{\lambda^n}{b}\right)$. 则 H_n 是一切 $\frac{\partial u}{\partial t_m}$ 的生成函数

证明：H_n 的密度其实只是 $\frac{1}{b}$ 展开于 λ^{-1} 的 Taylor 系数差一个常数. 由前面的引理易知

$\frac{\partial}{\partial t_m}\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{B_m}{b}\right)'$ 这说明 $\frac{1}{b}$ 的系数全是守恒密度. 于是 H_n 是守恒量. $\square$

注：(a) 与 (b) 中定义的 H_n 都以 $\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$ 为领头项. 我们后面会证明, 它们一定是相同的泛函. 但一般来说 $\operatorname{res} L^{n+\frac{1}{2}}$ 与 $\operatorname{res}_{\lambda=0}\left(\frac{\lambda^n}{b}\right)$ 是不同的 (去掉一些常数) 它们可能相差一个全微分. ◇

双 Hamilton 结构.

§1.6

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

先回顾一下常微分方程的Hamilton形式. 设M是一个流形 $(u^1,\dots,u^n)$ 是M上的局部坐标系. M上的一个Poisson括号是指 $C^\infty(M)$ 上的一个Lie括号, 且满足 $\{f\cdot g, h\}=\{f, h\}+\{g,h\}$. 利用Hadamard引理可以证明, 一个Poisson括号可由每个坐标系中的 $\{u^i, u^j\}=:p^{ij}$ 决定. 它应该是反称的, 且满足一个二次微分关系, 使得按如下方式定义的括号

$$\{f, g\}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u^i}\{u^i,u^j\}\frac{\partial g}{\partial u^j}$$ 满足Lie括号的Jacobi恒等式.

一个方程 $\frac{du^i}{dt}=X^i(u)$ 称为Hamilton的, 如果存在一个Poisson括号以及一个 $H\in C^\infty(M)$, 使得 $\frac{du^i}{dt}=\{u^i, H\}$, 即

$$\frac{du^i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\{u^i,u^j\}\frac{\partial H}{\partial u^j}=\sum_{j=1}^{n}p^{ij}\frac{\partial H}{\partial u^j}.$$

特别地, 总有 $\frac{dH}{dt}=0$, 即H是X的守恒量.

对于偏微分方程 $\frac{\partial u^i}{\partial t}=X^i(u,u_x,\cdots)$ 我们暂时将 $u^i(x)$ 中的 i 和 x 都视为"指标", 即将其视为一个自由度为不可数无穷多的"ODE". 则此类ODE的Poisson括号应为 $\{u^i(x), u^j(y)\}=p^{ij}(x,y)$. 两个泛函之间的Poisson括号则为 $\{F, G\}=\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\delta F}{\delta u^i(x)}\{u^i(x), u^j(y)\}\frac{\delta G}{\delta u^j(y)}dx\,dy$

Hamilton方程则写为

$$\frac{\partial u^i(x)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\{u^i(x), u^j(y)\}\frac{\delta H[u]}{\delta u^j(y)}dy.$$

Date:
Place:
Reminders

但是若想应用在比如KdV方程这种例子上，我们马上会发现一个问题：KdV的守恒量中可以包含 $u', u'', \dots$ 等 u 的导数。所以在上述公式中还会加入这些项的贡献，即

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \{u^i(x), u^{j,t}(y)\} \frac{\partial H(u)}{\partial u^{j,t}(y)} \, dy$$

Poisson括号会依是双线性的，所以对 y 求导可以拿到外面来，$\{u^i(x), u^{j,t}(y)\} = \partial_y^t \{u^i(x), u^j(y)\}$。再进行一次分部积分可得

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \{u^i(x), u^j(y)\} \sum_{t\geq 0} (-\partial_y)^t \frac{\partial H(u)}{\partial u^{j,t}(y)} \, dy .$$

亦称E-L算子

其中出现的 H 上的运算正好是泛函的变分导数

$$\frac{\delta H}{\delta u^j(x)} = \sum_{t\geq 0} (-\partial_x)^t \frac{\partial H}{\partial u^{j,t}}$$

我们后面还会仔细研究这个算子及其高阶推广。

所以最终的形式是

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \{u^i(x), u^j(y)\} \frac{\delta H}{\delta u^j(y)} \, dy .$$

最后 $P^{ij}(x,y) = \{u^i(x), u^j(y)\}$ 是什么？在物理上，因为有相对论，所以不存在超距作用，即若 $|x-y|>0$,

$\partial_x^s \partial_y^t \{u^i, u^j\}$

$\parallel$

此时的括号为

$$\{F,G\} = \sum_{i,j} \int \frac{\partial F}{\partial u^{i,s}(x)} \{u^{i,s}(x), u^{j,t}(y)\} \frac{\partial G}{\partial u^{j,t}(y)} dxdy$$

$$= \sum_{i,j} \int \frac{\delta F}{\delta u^i(x)} \{u^i(x), u^j(y)\} \frac{\delta G}{\delta u^j(y)} dxdy$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{s=0}^{N} \int \frac{\delta F}{\delta u^i} P^{ij}_s(u,\dots) \partial_x^s\left(\frac{\delta G}{\delta u^j}\right) dx.$$

变分导数代替偏导是容易理解的. 因为 $H(u)$ 是泛函, 其密度可以有个全微分的自由度. 若用~~变分~~偏导数, 结果不是确定的. 若用变分导数, 因为 $\frac{\delta}{\delta u^i(x)} \partial_x \equiv 0$, 所以密度的自由度不影响结果.

~~所以~~ 所以, ~~Hamilton~~ Poisson 括号 $\{u^i(x), u^j(y)\} = \sum_{s=0}^{N} P^{ij}_s \delta^{(s)}(x-y)$ 也记为 $P = \sum_{s=0}^{N} P^{ij}_s \partial^s$, 称为 Hamilton 结构或 Hamilton 算子. 相应的括号记为 $\{F,G\}_P := \sum_{i,j} \int \frac{\delta F}{\delta u^i} P^{ij} \left(\frac{\delta G}{\delta u^j}\right)$.

则 $u^i(x)$ 与 $u^j(y)$ 应该没有关系, 所以 $P^{ij}(x-y)$ 只能取如下形式 $P^{ij}(x,y) = \sum_{s=0}^{N} P^{ij}_s(u(x), u'(x), \dots) \delta^{(s)}(x-y)$

代入得

$$\frac{\partial u^i(x)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \sum_{s=0}^{N} P^{ij}_s(u(x), u'(x), \dots) \delta^{(s)}(x-y) \frac{\delta H}{\delta u^j(y)} dy$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{N} P^{ij}_s(u(x), u'(x), \dots) \partial_x^s\left(\frac{\delta H}{\delta u^j(x)}\right).$$

这与 ODE 情形非常像, 只是要用变分导数代替偏导数. 另外还多了一些求导.

下面来看 KdV 的例子. 首先算几个变分导数

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u} \int \left(\frac{u^2}{2}\right) = u.$$

$$\frac{\delta H_2}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u} \int \left(\frac{u^3}{6} - \frac{\varepsilon^2}{24}(u')^2\right) = \frac{u^2}{2} - \partial\left(-\frac{\varepsilon^2}{24} 2u'\right) = \frac{u^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{12} u''$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \partial_x\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{12} u''\right) = \partial_x \frac{\delta H_2}{\delta u}$$

$$= \frac{2}{3}\left(u\partial_x + \frac{u'}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3\right)(u) = \frac{2}{3}\left(u\partial_x + \frac{u'}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3\right) \frac{\delta H_1}{\delta u}.$$

Leibniz公式不可能满足，因为我们没法谈论两个 →
泛函的乘法.

所以我们看到KdV方程有两种不同的Hamilton形式，不过要完整地说明这个事实，我们还需要说明这里出现的两个算子 $P_1=\partial_x$. $P_2=u\partial_x+\frac{1}{2}u_x+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3$ 的确是Hamilton结构，或者说，它们定义的括号的确是Lie括号。事实上我们能够证明更强的结论.

定理：记 $\{\ \}_{P_1}=\{\ \}_1$. $\{\ \}_{P_2}=\{\ \}_2$.
$\{\ \}_\lambda=\{\ \}_2-\lambda\{\ \}_1$ 则对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\{\ \}_\lambda$ 是一个Lie括号

证明：由定义

$$\{F,G\}_\lambda=\int\left(\frac{\delta F}{\delta u}\left((u-\lambda)\partial_x+\frac{u_x}{2}+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3\right)\frac{\delta G}{\delta u}\right)$$

分部积分得

$$\{F,G\}_\lambda=\int\left((-\partial_x)\left(\frac{\delta F}{\delta u}(u-\lambda)\right)+\frac{u_x}{2}\frac{\delta F}{\delta u}-\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3\frac{\delta F}{\delta u}\right)\frac{\delta G}{\delta u}$$

$$=-\int\frac{\delta G}{\delta u}\left((u-\lambda)\partial_x+\frac{u_x}{2}+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3\right)\frac{\delta F}{\delta u}=-\{G,F\}_\lambda$$

所以是反称的。下证对 $\forall$ F.G.H.有

$$\{\{F,G\}_\lambda,H\}_\lambda+\{\{G,H\}_\lambda,F\}_\lambda+\{\{H,F\}_\lambda,G\}_\lambda=0.$$

下面我们会证明一个一般的Hamilton结构分类定理 →
如果一个Hamilton结构满足一定的非退化条件，则总可找到真实的坐标变换将其化为标准型.

这个变换称为Miura变换，它可将KdV方程族 ↗
变为mKdV方程族.

Date: Place: Reminders

引理：设 $u(x)=\frac{v^2(x)}{4}+\lambda+\frac{\varepsilon i}{2\sqrt{2}}v'(x)$，若 $u(x)$ 满足
$\{u(x),u(y)\}=(u(x)-\lambda)\delta'(x-y)+\frac{1}{2}u'(x)\delta(x-y)+\frac{\varepsilon^2}{8}\delta'''(x-y)$.
当且仅当 $v(x)$ 满足 $\{v(x),v(y)\}=\delta'(x-y)$.

证明：

$$\{u(x),u(y)\}=\left\{\frac{v^2(x)}{4}+\lambda+\frac{\varepsilon i}{2\sqrt{2}}v'(x),\ \frac{v^2(y)}{4}+\lambda+\frac{\varepsilon i}{2\sqrt{2}}v'(y)\right\}$$

$$=\left\{\frac{v^2(x)}{4},\frac{v^2(y)}{4}\right\}+\left\{\frac{v^2(x)}{4},\frac{\varepsilon i}{2\sqrt{2}}v'(y)\right\}+\left\{\frac{\varepsilon i}{2\sqrt{2}}v'(x),\frac{v^2(y)}{4}\right\}-\frac{\varepsilon^2}{8}\{v'(x),v'(y)\}$$

$$=\frac{1}{4}v(x)v(y)\{v(x),v(y)\}+\frac{\varepsilon i}{4\sqrt{2}}v(x)\{v(x),v'(y)\}+\frac{\varepsilon i}{4\sqrt{2}}\{v'(x),v(y)\}v(y)-\frac{\varepsilon^2}{8}\{v'(x),v'(y)\}$$

$$=\frac{1}{4}v(x)v(y)\delta'(x-y)+\frac{\varepsilon i}{4\sqrt{2}}\left[v(x)(-\delta''(x-y))+\delta''(x-y)v(y)\right]+\frac{\varepsilon^2}{8}\delta'''(x-y).$$

引理：引入新的未知函数 $v(x)$，使 $u(x)=\frac{v^2(x)}{4}+\lambda+\frac{\varepsilon i}{2\sqrt{2}}v'(x)$，
则 $\{v(x),v(y)\}_\lambda=\delta'(x-y)$. （以下省略 $\{,\}_\lambda$ 中的 λ）.

证明：$\{u(x),u(y)\}=\left\{\frac{v^2(x)}{4}+\lambda+\frac{\varepsilon i}{2\sqrt{2}}v'(x),\ \frac{v^2(y)}{4}+\lambda+\frac{\varepsilon i}{2\sqrt{2}}v'(y)\right\}$

$$=\frac{1}{16}\{v^2(x),v^2(y)\}+\frac{\varepsilon i}{8\sqrt{2}}\left(\{v^2(x),v'(y)\}+\{v'(x),v^2(y)\}\right)-\frac{\varepsilon^2}{8}\{v'(x),v'(y)\}.$$

其中 $\{v^2(x),v^2(y)\}=4v(x)v(y)\{v(x),v(y)\}=4v(x)v(y)\delta'(x-y)$.

注意 $v(y)\delta(x-y)=v(x)\delta(x-y)$. 两边求 $-\partial_y$ 得

$$v(y)\delta'(x-y)=v(x)\delta'(x-y)+v'(x)\delta(x-y).$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

所以 $\{v^2(x), v^2(y)\} = 4\left(v^2(x)\,\delta'(x-y) + v(x)v'(x)\,\delta(x-y)\right).$

$\{v^2(x), v'(y)\} = 2v(x)\{v(x), v'(y)\} = -2v(x)\,\delta''(x-y).$

$\{v'(x), v^2(y)\} = \overset{2v(y)}{\{v'(x), v(y)\}} = 2v(y)\,\delta''(x-y).$

同理可知 $v(y)\delta''(x-y) = v(x)\delta''(x-y) + 2v'(x)\delta'(x-y) + v''(x)\delta(x-y).$

于是有

$\{v^2(x), v'(y)\} + \{v'(x), v^2(y)\} = 4v'(x)\delta'(x-y) + 2v''(x)\delta(x-y).$

最后 $\{v'(x), v'(y)\} = \partial_x\partial_y\{v(x), v(y)\} = -\delta'''(x-y)$. 于是

$$\{u(x), u(y)\} = \frac{1}{16}\left(4v^2\delta'(x-y) + 4v(x)v'(x)\delta(x-y)\right) + \frac{\varepsilon i}{8\sqrt{2}}\left(4v'(x)\delta'(x-y) + 2v''(x)\delta(x-y)\right) + \frac{\varepsilon^2}{8}\delta'''(x-y)$$

$$= (u(x)-\lambda)\delta'(x-y) + \frac{1}{2}u'(x)\delta(x-y) + \frac{\varepsilon^2}{8}\delta'''(x-y).$$

$\square$.

有了这个引理，我们只需证明~~Hamilton~~结构的Jacobi恒等式.

以下简记 $\frac{\delta}{\delta u} = \delta$，且 $\delta F = f$、$\delta G = g$、$\delta H = h$.

则 $\{F, G\} = \int (f g')$. $\delta\{F, G\} = \delta(f g')$. 所以我们需要知道 $\delta(A \cdot B)$ 的公式.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

引理：定义 $\delta_k f = \sum_{i\geq 0} \binom{k+i}{i} (-1)^i \partial_x^i \frac{\partial f}{\partial u_{k+i}}$．则有

$$\delta(f\cdot g) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \left(\delta_i(f)\cdot g^{(i)} + f^{(i)} \delta_i g \right).$$

证明：$\delta(fg) = \sum_{j\geq 0} (-1)^j \partial_x^j \left(\frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot g + f \frac{\partial g}{\partial u_j} \right)$

$$= \sum_{j\geq 0} (-1)^j \sum_{k\geq 0} \binom{j}{k} \left[\partial^{j-k} \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \partial^k g + \partial^k f \cdot \partial^{j-k} \frac{\partial g}{\partial u_j} \right]$$ 取 $j-k=l$

$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \left[\left(\sum_{l\geq 0} \binom{l+k}{l} (-1)^l \partial^l \frac{\partial f}{\partial u_{k+l}} \right) \cdot \partial^k g + \partial^k f \left(\sum_{l\geq 0} \binom{l+k}{l} (-1)^l \partial^l \frac{\partial g}{\partial u_{k+l}} \right) \right]$$

$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \left[\delta_k f \cdot \partial^k g + \partial^k f \cdot \delta_k g \right].$$ $\square$.

δ_k 称为高阶 Euler 算子．特别地．$\delta_0 = \delta$ 即 Euler-Lagrange 算子．或称变分导数．

引理：δ_k 满足如下恒等式：

(a) $\delta_k \partial = \delta_{k-1}$．特别地，$\delta_0 \partial = 0$．

(b) $\delta_k (f\cdot g) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{k+i}{i} \left(\delta_{i+k} f \cdot g^{(i)} + f^{(i)} \delta_{i+k}(g) \right)$.

(c) $\sum_{i\geq 0} \binom{k+i}{i} \partial^i \delta_{i+k} = \frac{\partial}{\partial u_k}$．(d) $\sum_{i\geq 0} \partial^i (f\cdot \delta_i g) = \sum_{i\geq 0} \partial^i f \cdot \frac{\partial g}{\partial u_i}$.

Date:
Place:
Reminders

(a)

证明: $\delta_k \partial = \sum_{i\ge0}\binom{k+i}{i}(-1)^i \partial^i \frac{\partial}{\partial u_{k+i}}\partial$. 利用

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_k}, \partial\right] = \left[\frac{\partial}{\partial u_k}, \sum_{l\ge0} u_{l+1}\frac{\partial}{\partial u_l}\right] = \frac{\partial}{\partial u_{k-1}} + \sum_{l\ge0} u_{l+1}\frac{\partial}{\partial u_l}\frac{\partial}{\partial u_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_{k-1}} + \partial\frac{\partial}{\partial u_k}.$$

$$\delta_k \partial = \sum_{i\ge0}\binom{k+i}{i}(-1)^i\left[\partial^i\frac{\partial}{\partial u_{k+i-1}} + \partial^{i+1}\frac{\partial}{\partial u_{k+i}}\right]$$

$$= \sum_{i\ge0}\binom{k+i}{i}(-1)^i\partial^i\frac{\partial}{\partial u_{k+i-1}} + \sum_{i\ge0}\binom{k+i}{i}(-1)^i\partial^{i+1}\frac{\partial}{\partial u_{k+i}}$$

$$= \sum_{i\ge0}\left[\binom{k+i}{i} - \binom{k-1+i}{i-1}\right](-1)^i\partial^i\frac{\partial}{\partial u_{k-1+i}} = \sum_{i\ge0}\binom{k-1+i}{i}(-1)^i\partial^i\frac{\partial}{\partial u_{k-1+i}}$$

(b) 与前一引理几乎一样. 只要用一次

$$\binom{k+j+l}{j+l}\binom{j+l}{j} = \binom{k+j}{j}\binom{k+j+l}{l} \text{ 即可.}$$

(c) $\displaystyle\sum_{i\ge0}\binom{k+i}{i}\partial^i\delta_{i+k} = \sum_{i\ge0}\binom{k+i}{i}\partial^i\left(\sum_{j\ge0}\binom{i+k+j}{j}(-1)^j\partial^j\frac{\partial}{\partial u_{k+i+j}}\right)$

$$= \sum_{l\ge0}\left[\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\binom{k+l-j}{l-j}\binom{k+l}{j}\right]\partial^l\frac{\partial}{\partial u_{k+l}} = \frac{\partial}{\partial u_k}.$$

$$\binom{k+l-j}{l-j}\binom{k+l}{j} = \binom{k+l}{k}\binom{l}{j}. \quad \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}(-1)^j = \delta_{l0}$$

(d) $\sum_{i\ge0} \partial^i (f\cdot \delta_i g) = \sum_{i\ge0}\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}\partial^j f \cdot \partial^{i-j}\delta_i g$

$= \sum_{j\ge0}\partial^j f\left(\sum_{k\ge0}\binom{k+j}{k}\partial^k \delta_{j+k}\, g\right) = \sum_{j\ge0}\partial^j f\cdot \frac{\partial g}{\partial u_j}$. □

引理：δ_k 还满足 $\delta_i\circ\delta = (-1)^i \frac{\partial}{\partial u_i}\delta$

证明：$\delta_i\circ\delta = \left(\sum_{k\ge0}\binom{i+k}{i}(-1)^k\partial^k\frac{\partial}{\partial u_{i+k}}\right)\left(\sum_{l\ge0}(-1)^l\partial^l\frac{\partial}{\partial u_l}\right)$

利用恒等式 $\frac{\partial}{\partial u_k}\partial^l = \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\partial^{l-j}\frac{\partial}{\partial u_{k-j}}$ 得

$\delta_i\circ\delta = \sum_{k,l\ge0}\binom{k+i}{i}(-1)^k\partial^k\left(\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}\partial^{l-j}\frac{\partial}{\partial u_{i+k-j}}\right)\frac{\partial}{\partial u_l}$

取 $k'=i+k-j$ ($k=k'+j-i$) 替换掉 k 得

$=\sum_{k',l\ge0}\left(\sum_{j=0}^{l}(-1)^{k'+j+i+l}\binom{l}{j}\binom{k'+j}{i}\right)\partial^{k'+l-i}\frac{\partial}{\partial u_{k'}}\frac{\partial}{\partial u_l}$.

利用组合恒等式 $\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\binom{l}{j}\binom{k'+j}{i} = (-1)^l\binom{k'}{i-l}$ 得

$\delta_i\circ\delta = (-1)^i\sum_{k,l\ge0}(-1)^k\binom{k}{i-l}\partial^{k+l-i}\frac{\partial}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_l}$.

另一方面，

Date: ....
Place: ....

Reminders

Date: ....
Place: ....

Reminders

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\circ\delta=\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sum_{l\ge 0}(-1)^l\partial^l\frac{\partial}{\partial u_l}\right)=\sum_{l\ge 0}(-1)^l\sum_{j\ge 0}^{l}\binom{l}{j}\partial^{l-j}\frac{\partial}{\partial u_{i-j}}\frac{\partial}{\partial u_l}$$

令 $i-j=k$. $=\sum_{k,l\ge 0}(-1)^l\binom{l}{i-k}\partial^{l+k-i}\frac{\partial}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_l}$.

所以有 $\delta_i\circ\delta=(-1)^i\frac{\partial}{\partial u_i}\circ\delta$ □.

有了这些恒等式就可以证明Jacobi恒等式了.

$$\delta\{F,G\}=\delta(f\cdot g')=\sum_{i\ge 0}(-1)^i\left(\delta_i f\cdot\partial^{i+1}g+\partial^i f\cdot\delta_{i+1}g\right)$$

$$\{\{F,G\},H\}\sim\sum_{i\ge 0}(-1)^i\left(\delta_i f\cdot\partial^{i+1}g\cdot h'-\partial^{i+1}f\cdot\delta_i g\cdot h'\right)$$

故 $\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}+\{\{H,F\},G\}$

$$\sim\sum_{i\ge 0}(-1)^i\Big(\delta_i f\cdot\partial^{i+1}g\cdot h'-\partial^{i+1}f\cdot\delta_i g\cdot h'$$
$$+\delta_i g\cdot\partial^{i+1}h\cdot f'-\partial^{i+1}g\cdot\delta_i h\cdot f'$$
$$+\delta_i h\cdot\partial^{i+1}f\cdot g'-\partial^{i+1}h\cdot\delta_i f\cdot g'\Big)$$

注意 $\sum_{i\ge 0}(-1)^i\delta_i f\cdot\partial^{i+1}g\cdot h'\sim\sum_{i\ge 0}\partial^i(\delta_i f\cdot h')\,g'$

$$=\sum_{i\ge 0}\partial^{i+1}h\cdot\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot g'=\sum_{i\ge 0}(-1)^i\left(\partial^{i+1}h\cdot\delta_i f\cdot g'\right)$$

Date:
Place:

Miura

练习、不利用变换，直接证明$\{,\}_\lambda$的 →

Jacobi恒等式.

Date:
Place:

所以 Jacobi恒等式成立. □

将$\{\{F,G\}_\lambda,H\}_\lambda$展开得

$$\{\{F,G\}_\lambda,H\}_\lambda=\{\{F,G\}_2,H\}_2 - \lambda\left(\{\{F,G\}_1,H\}_2+\{\{F,G\}_2,H\}_1\right)+\lambda^2\{\{F,G\}_1,H\}_1.$$

所以$\{,\}_1$与$\{,\}_2$满足

$$\{\{F,G\}_1,H\}_1+\{\{G,H\}_1,F\}_1+\{\{H,F\}_1,G\}_1=0. \quad (\text{Jacobi of } \{,\}_1)$$

$$\{\{F,G\}_2,H\}_2+\{\{G,H\}_2,F\}_2+\{\{H,F\}_2,G\}_2=0. \quad (\text{of } \{,\}_2)$$

$$\{\{F,G\}_1,H\}_2+\{\{F,G\}_2,H\}_1+\{\{G,H\}_1,F\}_2+\{\{G,H\}_2,F\}_1+\{\{H,F\}_1,G\}_2+\{\{H,F\}_2,G\}_1=0. \quad (\text{相容性条件}).$$

这样的Hamilton结构的对叫双Hamilton结构.

KdV方程族中的每个方程都以上述P_1, P_2为其双Hamilton结构. 为证明这一点, 我们需要计算之前的H_n的δ.

$\frac{\delta H_n}{\delta u}$ 与下一个定理亦可用拟微分算子法 → 来计算和证明，但是需要引入较多新记号与概念，且计算不易，此处从略，感兴趣的同学可参见 Dickey 的书。

引理：$\frac{\delta H_n}{\delta u} = \frac{2^n}{(2n-1)!!} b_n$.

证明：因为 $H_n = -\frac{2^{n+1}}{(2n-1)!!}\int \mathrm{res}\,\frac{\lambda^n}{b}$. 所以只需证

$\frac{\delta}{\delta u}\int\frac{1}{b} = -\frac{b}{2\lambda}$. 回忆一下 b 满足方程

$$A b^2 + \frac{\varepsilon^2}{8}(2bb'' - b'^2) = -\lambda. \qquad A = u - \lambda.$$

设 $b = \frac{1}{\eta}$，则 η 满足方程

$$A\eta^2 - \frac{\varepsilon^2}{8}(2\eta\eta'' - 3\eta'^2) = -\lambda\eta^4$$ 两边取变分得

$$\delta u\,\eta^2 + 2\eta A\,\delta\eta - \frac{\varepsilon^2}{8}\left(2\delta\eta\,\eta'' + 2\eta(\delta\eta)'' - 6\eta'(\delta\eta)'\right) = -4\lambda\eta^3\delta\eta$$

$$\Rightarrow \delta u\cdot\eta^2 + \left[2A\eta + 4\lambda\eta^3 - \frac{\varepsilon^2}{4}(\eta\partial^2 - 3\eta'\partial + \eta'')\right]\delta\eta = 0.$$ 两边乘 $\eta/2$

$$\frac{\eta^3}{2}\delta u + \left[A\eta^2 + 2\lambda\eta^4 - \frac{\varepsilon^2}{8}(\eta^2\partial^2 - 3\eta\eta'\partial + \eta\eta'')\right]\delta\eta = 0.$$ 再利用 η 的方程

$$\frac{1}{2\lambda\eta}\delta u + \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{8\lambda}\left(\frac{1}{\eta^2}\partial^2 - 3\frac{\eta'}{\eta^3}\partial + \frac{3\eta'^2 - \eta\eta''}{\eta^4}\right)\right]\delta\eta = 0.$$

注意 $\frac{1}{\eta^2}\partial^2 - 3\frac{\eta'}{\eta^3}\partial + \frac{3\eta'^2 - \eta\eta''}{\eta^4} = \partial b \partial b$，所以

$\delta\eta \sim -\frac{b}{2\lambda}\delta u$ 即 $\frac{\delta}{\delta u}\int\frac{1}{b} = -\frac{b}{2\lambda}$. □

过时了，略。
既然不打算详细讲，不如不讲。
非局部的问题以后再提。

定理：KdV方程族可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = P_1\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}\right) = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} P_2\left(\frac{\delta H_n}{\delta u}\right).$$

其中 $P_1 = \partial_x$. $P_2 = u\partial_x + \frac{u_x}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3$.

证明：由之前生成函数法给出的方程有

$$u_{t_n} = \sqrt{2}\varepsilon \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\varepsilon(2n+1)!!} P_2(b_n) = \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!} P_2\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{\delta H_n}{\delta u}\right]$$

$$= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} P_2\left(\frac{\delta H_n}{\delta u}\right).$$ 另一方面，$P_2 b_n = P_1 b_{n+1}$，所以

$$u_{t_n} = \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!} P_1(b_{n+1}) = \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!} \cdot P_1\left(\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}\right)$$

$$= P_1\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}\right).$$ □.

~~⑦ 递推算子~~

~~利用上述定理易知~~

$$\cancel{u_{t_n} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} P_2 \frac{\delta H_n}{\delta u} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} P_2 \circ P_1(u_{t_{n-1}})}$$ ~~其中的算子~~

$$\cancel{R = P_2 \circ P_1^{-1} = u + \frac{u'}{2}\partial_x^{-1} + \frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^2}$$ ~~称为KdV方程族的~~

~~递推算子. 整个方程族可通过这个算子作用在 $u_0=u_x$ 上得到.~~

~~关于递推算子有一套丰富的理论(请读者对照资料), 但是因为其中出现了 ∂^{-1} 这个并非良定的算子, 我们对它们不做太多的介绍. 所以以~~

~~从kdv这个例子可看出, 只要有双Hamilton结构就可定义递推算子, 但是反之, 有递推算子的方程族未必有双Hamilton结构. 这是因为Hamilton结构只是所谓局部的Hamilton结构. 我们介绍的 除此以外还有非局部的, 即其Hamilton算子中除了 ∂ 以外还可含 ∂^{-1} 及其幂次. 这类结构的定义都是有问题的. 但的确是有用的工具. 所以如何定义它们是值得研究的问题.~~

§1. τ结构.

之前在多孤子解部分和Hirota双线性方程部分介绍过τ函数的概念, 即令 $u=2\partial^2\log\tau$. 在这一节中将介绍整个kdv方程族的tau函数.

首先, 再写一次kdv方程族:

Date:
Place:
Reminders

$$\frac{\partial u}{\partial t_n}=\partial_x\left(\frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!}b_{n+1}\right)=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(u\partial_x+\frac{u_x}{2}+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3\right)\left(\frac{2^n}{(2n-1)!!}b_n\right)$$

若令 $R_n=\frac{2^n}{(2n-1)!!}b_n=\frac{2\cdot 2\cdots 2}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}b_n$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}b_n=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}b_n.$$

则方程可写为 $\frac{\partial u}{\partial t_n}=P_1(R_{n+1})=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}P_2(R_n)$.
其中的 R_n 可由 $R_0=1$, $(n+\frac{1}{2})P_1(R_{n+1})=P_2(R_n)$ 递归地定义(取积分常数为0):

$R_1=u$, $R_2=\frac{u^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{12}u''$.

$R_3=\frac{u^3}{6}+\frac{\varepsilon^2}{24}u_x^2+\frac{\varepsilon^2}{12}u\,u_{xx}+\frac{\varepsilon^4}{240}u^{(4)}$, …

引理: $\{R_k\}$ 满足如下恒等式.

i) $\frac{\delta R_{k+1}}{\delta u}=\frac{\partial R_{k+1}}{\partial u}=R_k$,

ii) $\frac{\partial R_{k+1}}{\partial t_l}=\frac{\partial R_{l+1}}{\partial t_k}$.

证明: i) 这个恒等式等价于 $\frac{\delta b_{n+1}}{\delta u}=\frac{\partial b_{n+1}}{\partial u}=(n+\frac{1}{2})b_n$.

这类计算做得多了，我们发现其中的套路是一样的。——
所以不妨总结一个更一般的结论

引理：仍记 $\tilde b = b/\sqrt{\lambda}$. 于是对任意导子 D, 有

$$\left(1-\frac{\varepsilon^2}{8}\tilde b^2\partial_x\cdot\tilde b\cdot\partial_x\frac{1}{\tilde b}\right)D(\tilde b)=\frac{1}{2}D(u-\lambda)\cdot\tilde b^3$$

$$\left(1-\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x\cdot\tilde b\cdot\partial_x\tilde b\right)D\left(\frac{1}{\tilde b}\right)=-\frac{1}{2}D(u-\lambda)\tilde b.$$

取 $D=\frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial\lambda}, \cdots$ 即得之前诸结果

证明留做练习。

回顾 $b(\lambda)$ 的方程：$(u-\lambda)b^2+\frac{\varepsilon^2}{8}(2bb_{xx}-b_x^2)=-\lambda$.

记 $\tilde b=b/\sqrt{\lambda}$. 于是 $(u-\lambda)\tilde b^2+\frac{\varepsilon^2}{8}(2\tilde b\tilde b_{xx}-\tilde b_x^2)=-1$.

两边对 u 求导得 $\tilde b^2+(u-\lambda)2\tilde b\frac{\partial\tilde b}{\partial u}+\frac{\varepsilon^2}{4}(\tilde b\partial_x^2-\tilde b_x\partial_x+\tilde b_{xx})\frac{\partial\tilde b}{\partial u}=0$

两边对 λ 求导得 $-\tilde b^2+(u-\lambda)2\tilde b\frac{\partial\tilde b}{\partial\lambda}+\frac{\varepsilon^2}{4}(\tilde b\partial_x^2-\tilde b_x\partial_x+\tilde b_{xx})\frac{\partial\tilde b}{\partial\lambda}=0$

相加得

$$\left[2(u-\lambda)\tilde b+\frac{\varepsilon^2}{4}(\tilde b\partial_x^2-\tilde b_x\partial_x+\tilde b_{xx})\right]\left(\frac{\partial\tilde b}{\partial u}+\frac{\partial\tilde b}{\partial\lambda}\right)=0.$$

两边乘 $\tilde b$, 再利用 $\tilde b$ 的方程消去 $(u-\lambda)\tilde b^2$ 可得

$(1+O(\varepsilon^2))\left(\frac{\partial\tilde b}{\partial u}+\frac{\partial\tilde b}{\partial\lambda}\right)=0$. 于是 $\frac{\partial\tilde b}{\partial u}+\frac{\partial\tilde b}{\partial\lambda}=0$. 即

$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{\lambda^{n+\frac12}}\right)=-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{\lambda^{n+\frac12}}\right)$. 展开并比较系数可得 $\frac{\partial b_{n+1}}{\partial u}=(n+\frac12)b_n$.

由之前的某引理可知 $b_n=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{\delta H_n}{\delta u}$. 于是由变分导数的性质 ($\frac{\delta}{\delta u}\frac{\delta f}{\delta u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\delta f}{\delta u}$, 高阶 Euler 算子性质的特例) 可知 $\frac{\delta b_{n+1}}{\delta u}=\frac{\partial b_{n+1}}{\partial u}$. i) 证完.

ii) 由左边的引理可知 $\tilde b$ 是更好用的对象.

$$\tilde b=\sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{\lambda^{n+\frac12}}=\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac12+n)}{\Gamma(\frac12)}\frac{R_n}{\lambda^{n+\frac12}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac32+n)}{\Gamma(\frac12)}\frac{R_{n+1}}{\lambda^{n+\frac32}}$$

$$(\ )' = \frac{\partial}{\partial x}(\ ).$$

→

考虑如下算子 $W(\mu) = \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\mu^{k+\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial t_k}$. 我们偏

$$W(\mu)\tilde{b}(\lambda) = \sum_{k,l\geq 0} \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{\lambda^{k+\frac{3}{2}}\mu^{l+\frac{3}{2}}} \frac{\partial R_{k+1}}{\partial t_l}.$$

若要证明 $\frac{\partial R_{k+1}}{\partial t_l} = \frac{\partial R_{l+1}}{\partial t_k}$, 我们只需证明 $W(\mu)\tilde{b}(\lambda)$

关于 λ, μ 是对称的. ~~W(μ) 显然也是一个算子~~.

$$W(\mu)\tilde{b}(\lambda) = \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\mu^{k+\frac{3}{2}}} \frac{\partial b(\lambda)}{\partial t_k} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\mu^{k+\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{2}\left(B_k(\lambda)\, b(\lambda)' - b(\lambda)\, B_k(\lambda)'\right)\right].$$

$$\left(B_k(\lambda) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\lambda^k b(\lambda)\right)_+ = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} \sum_{i\geq 0}^{k} \lambda^i b_{k-i}.\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} \frac{\cancel{\Gamma(k+\frac{3}{2})}}{\cancel{\Gamma(\frac{1}{2})}} \frac{1}{\mu^{k+\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\cancel{\Gamma(k+\frac{3}{2})}}\left(\lambda^k b(\lambda)\right)_+ \cdot b(\lambda)' - b(\lambda)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\cancel{\Gamma(k+\frac{3}{2})}}(\lambda^k b \ldots$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mu\lambda}} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\mu^{k+1}}\left(\left(\sum_{i\geq 0}^{k} \lambda^i b_{k-i}\right) b(\lambda)' - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mu\lambda}}\, b(\lambda)' \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^i b_j}{\mu^{i+j+1}} - \frac{b(\lambda)}{2\sqrt{\lambda\mu}}\left(\qquad\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}}\left(b'(\lambda)\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\cdot\frac{b(\mu)}{\mu} - b(\lambda)\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{b'(\mu)}{\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2(\mu-\lambda)}\left[\tilde{b}'(\lambda)\tilde{b}(\mu) - \tilde{b}(\lambda)\tilde{b}'(\mu)\right].$$

上式关于λ,μ显然是对称的，所以有

$W(\mu)\tilde{b}(\lambda) = W(\lambda)\tilde{b}(\mu)$，即 $\frac{\partial R_{k+1}}{\partial t_j} = \frac{\partial R_{j+1}}{\partial t_k}$. □

~~由之前的引理(1)，$R_k = \frac{\delta R_{k+1}}{\delta u}$~~

引理：

$$\tilde{b}(\mu)'\tilde{b}(\lambda) = \frac{1}{\mu-\lambda}\left(-\frac{\tilde{b}(\mu)}{\tilde{b}(\lambda)} + \frac{\varepsilon^2}{8}\tilde{b}(\lambda)\left(\tilde{b}(\lambda)\left(\frac{\tilde{b}(\mu)}{\tilde{b}(\lambda)}\right)'\right)'\right)'.$$

证明：由 ~~$W(\lambda)\tilde{b}(\mu)$~~

$$W(\mu)\tilde{b}(\lambda) = \frac{1}{2(\mu-\lambda)}\left[\tilde{b}(\lambda)'\tilde{b}(\mu) - \tilde{b}(\lambda)\tilde{b}(\mu)'\right]$$ 可知

$$W(\mu)\left(\frac{1}{\tilde{b}(\lambda)}\right) = \frac{1}{2(\mu-\lambda)}\left(\frac{b(\mu)}{b(\lambda)}\right)'$$ 注意$W(\mu)$也是导子，所以

可应用之前插播的引理有

$$\left[1-\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x\hat{b}(\lambda)\partial_x\hat{b}(\lambda)\right] W(\mu)\left(\frac{1}{\hat{b}(\lambda)}\right) = -\frac{1}{2} W(\mu)(\mu-\lambda)\cdot\hat{b}(\lambda).$$

而 $W(\mu)(\mu-\lambda) = \left(\sum_{k\ge 0}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{1}{\mu^{k+\frac{3}{2}}}R_{k+1}\right)' = \hat{b}(\mu)'$.

所以 $\hat{b}(\mu)'\, b(\lambda) = \left[-1+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x\hat{b}(\lambda)\partial_x\hat{b}(\lambda)\right]\left\{\frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{b(\mu)}{b(\lambda)}\right)'\right\}$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda}\left[-\frac{\hat{b}(\mu)}{\hat{b}(\lambda)}+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial\hat{b}(\lambda)\left(\hat{b}(\lambda)\left(\frac{\hat{b}(\mu)}{\hat{b}(\lambda)}\right)'\right)'\right]' \quad \square.$$

推论: $\frac{\partial R_{k+1}}{\partial t_l}$ 都是全微分.

证明: 前一引理说明 $b(\mu)'b(\lambda)$ 的系数是全微分. 于是 $W(\mu)(b(\lambda))$ 的系数也是. $\square$.

定义: $\Omega_{kl} = \partial_x^{-1}\left(\frac{\partial R_{k+1}}{\partial t_l}\right)$. 并取积分常数为零.
则 Ω_{kl} 为 $u, u', \dots, u^{(2k+2l)}$ 的多项式. 且 $\Omega(0)=0$.

性质: i) $\Omega_{kl} = \Omega_{lk}$.

ii) $\frac{\partial \Omega_{kl}}{\partial t_m} = \frac{\partial \Omega_{ml}}{\partial t_k}$.

证明: $\partial_x\Omega_{kl} = \frac{\partial R_{k+1}}{\partial t_l} = \frac{\partial R_{l+1}}{\partial t_k} = \partial_x\Omega_{lk}$. 所以存在

若定义

$$\omega(\mu,\lambda)=\sum_{k,l\ge 0}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\mu^{k+\frac{3}{2}}}\frac{\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\lambda^{l+\frac{3}{2}}}\Omega_{kl}.$$

则有

$$\omega(\mu,\lambda)=\frac{1}{2(\mu-\lambda)^2}\left[\frac{\tilde b(\mu)}{\tilde b(\lambda)}+\frac{\tilde b(\lambda)}{\tilde b(\mu)}-\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right]$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{4\tilde b(\mu)\tilde b(\lambda)}\left(\frac{\tilde b(\mu)\tilde b(\lambda)'-\tilde b(\mu)'\tilde b(\lambda)}{2(\mu-\lambda)}\right)^2.$$

$$=\frac{1}{2(\mu-\lambda)^2}\left[\left((\mu-u)+(\lambda-u)\right)\tilde b(\mu)\tilde b(\lambda)-\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}-\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right]$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{8(\mu-\lambda)^2}\left(\tilde b(\mu)\tilde b(\lambda)''-\tilde b(\mu)'\tilde b(\lambda)'+\tilde b(\mu)''\tilde b(\lambda)\right).$$

证明对 $w(\mu)\tilde b(\lambda)=\omega(\mu,\lambda)'$ 积分即可. 常数可由 $u=u'=\cdots=0$ 确定. 略. □

常数 c_{kl} 使 $\Omega_{kl}-\Omega_{lk}=c_{kl}$. 但 $\Omega_{kl}(0)=\Omega_{lk}(0)$

所以 $c_{kl}=0$.

ii) $\partial_x\frac{\partial\Omega_{kl}}{\partial t_m}=\frac{\partial}{\partial t_m}\frac{\partial\Omega_{k+1}}{\partial t_l}=\frac{\partial}{\partial t_l}\frac{\partial\Omega_{k+1}}{\partial t_m}=\partial_x\frac{\partial}{\partial t_l}\Omega_{mk}.$

所以 $\frac{\partial\Omega_{kl}}{\partial t_m}-\frac{\partial\Omega_{ml}}{\partial t_k}$ 为一常数. 但这个

微分多项式次数大于等于1. 所以常数为零. □

$u(t_0,t_1,\cdots)$

这两个性质表明, 若 u 是 KdV 方程族的解 则

存在函数 $F(t_0,t_1,\cdots)$ 使

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2F}{\partial t_k\partial t_l}=\Omega_{kl}(u(t),u'(t),\cdots).$$

(此处加 ε^2 为了使它与标准的 τ 函数相容)

这个函数 F 称为解 u 的自由能, 相应的 $\tau=e^F$ 叫作 u 的 τ 函数, 或配分函数.

例: $\Omega_{0,0}=u$, 即是 $\varepsilon^2\frac{\partial^2\log\tau}{\partial t_0\partial t_0}=u$, 这与之前的 τ 函数定义是相符的.

Date:
Place:
Reminders

定义：如下关于未知函数 u, f_k $(k=0,1,2,\dots)$, f 的偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t_k} = f_k, \quad \dfrac{\partial f_l}{\partial t_k} = \Omega_{kl}(u, u', \dots, u^{(k+l+2)}) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t_k} = \partial_x R_{k+1}(u, u', \dots, u^{(2k)}). \end{cases}$$

(其中 R_k 与 Ω_{kl} 如前定义) 称为 KdV 方程族的 tau 覆盖.

定理：对于 KdV 的 τ 覆盖，$\left[\dfrac{\partial}{\partial t_k}, \dfrac{\partial}{\partial t_l}\right] = 0$.

证明：我们已经知道 $\left[\dfrac{\partial}{\partial t_k}, \dfrac{\partial}{\partial t_l}\right](u) = 0$. 接下来

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial t_l}\right](f_m) = \frac{\partial}{\partial t_k}\Omega_{lm} - \frac{\partial}{\partial t_l}\Omega_{km} = 0.$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial t_l}\right](f) = \Omega_{kl} - \Omega_{lk} = 0.$$

$\square$

由 τ 函数定义易知，若 τ_1, τ_2 是同一个 u 的两个 τ 函数，则存在常数 c_k, d 使 $\log\tau_1 - \log\tau_2 = \sum c_k t_k + d$

所以 u 的 τ 函数在相差一个因子 $e^{\sum c_k t_k + d}$ 的意义下是唯一的.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place: §1.8
Reminders

Virasoro型对称.

之前讨论的KdV的无穷多对称都是u的微分多项式. 除此以外, KdV方程族还可以有显含时空变量 t_k 的对称.

例: ① $\frac{\partial u}{\partial s_{-1}} = 1+\sum_{k\geq 0} t_{k+1}\frac{\partial u}{\partial t_k}$ 是KdV方程族的对称.

证明: $$\left[\frac{\partial}{\partial s_{-1}}, \frac{\partial}{\partial t_k}\right](u) = \frac{\partial}{\partial s_{-1}}\left(R_{k+1}'\right) - \frac{\partial}{\partial t_k}\left(1+\sum_{l\geq 0} t_{l+1}\frac{\partial u}{\partial t_l}\right)$$

$$= \sum_{q\geq 0}\frac{\partial u^{(q)}}{\partial s_{-1}}\frac{\partial R'_{k+1}}{\partial u^{(q)}} - \frac{\partial u}{\partial t_{k-1}} - \sum_{l\geq 0} t_{l+1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_l\partial t_k}$$

$$= \sum_{q\geq 0}\left(1+\sum_{l\geq 0}t_{l+1}\frac{\partial u}{\partial t_l}\right)^{(q)}\frac{\partial R'_{k+1}}{\partial u^{(q)}} - \frac{\partial u}{\partial t_{k-1}} - \sum_{l\geq 0} t_{l+1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_l\partial t_k}$$

$$= \frac{\partial R'_{k+1}}{\partial u} + \sum_{q\geq 0}\sum_{l\geq 0} t_{l+1}\frac{\partial u^{(q)}}{\partial t_l}\frac{\partial R'_{k+1}}{\partial u^{(q)}} - \frac{\partial u}{\partial t_{k-1}} - \sum_{l\geq 0} t_{l+1}\frac{\partial^2 u}{\partial t_l\partial t_k}$$

$$= R_k' - R_k' + \sum_{l\geq 0} t_{l+1}\frac{\partial R'_{k+1}}{\partial t_l} - \sum_{l\geq 0} t_{l+1}\frac{\partial R'_{k+1}}{\partial t_l} = 0 \quad \square.$$

② $\frac{\partial u}{\partial s_0} = u + \sum_{k\geq 0}\left(k+\frac{1}{2}\right)t_k\frac{\partial u}{\partial t_k}$ 也是KdV方程族的对称.

Date:

Place:

Reminders

Date:

Place:

Reminders

证明:

$$\left[\frac{\partial}{\partial s_0}, \frac{\partial}{\partial t_k}\right](u) = \frac{\partial}{\partial s_0} R'_{k+1} - \frac{\partial}{\partial t_k}\left(u + \sum_{l\geq 0}\left(l+\frac{1}{2}\right) t_l \frac{\partial u}{\partial t_l}\right)$$

$$= \sum_{q\geq 0}\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right)^{(q)} \frac{\partial R'_{k+1}}{\partial u^{(q)}} - \frac{\partial u}{\partial t_k} - \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial t_k} - \sum_{l\geq 0}\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t_k \partial t_l}$$

$$= \sum_{q\geq 0}\Big(u + \underbrace{\sum_{l\geq 0}\left(l+\frac{1}{2}\right) t_l \frac{\partial u}{\partial t_l}}_{\frac{1}{2}t_0\frac{\partial u}{\partial t_0}+\sum_{l\geq 1}}\Big)^{(q)} \frac{\partial R'_{k+1}}{\partial u^{(q)}} - \left(k+\frac{3}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial t_k} - \sum_{l\geq 0}\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 R'_{k+1}}{\partial t_l}$$

$$= \sum_{q\geq 0} u^{(q)} \frac{\partial R'_{k+1}}{\partial u^{(q)}} + \sum_{q\geq 0}\frac{q}{2} u^{(q)} \frac{\partial R'_{k+1}}{\partial u^{(q)}} + \sum_{l\geq 1}\left(l+\frac{1}{2}\right) t_l \frac{\partial R'_{k+1}}{\partial t_l}$$

$$- \left(k+\frac{3}{2}\right)\boxed{\frac{\partial u}{\partial t_k}}^{R'_{k+1}} - \sum_{l\geq 0}\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial R'_{k+1}}{\partial t_l}$$

所以只需证 R_k 满足如下齐次性条件:

$$2k R_k = \sum_{q\geq 0}(q+2) u^{(q)} \frac{\partial R_k}{\partial u^{(q)}}.$$

证明: 即证, 若 $\deg u = 2$. $\deg \partial_x = 1$.

则 $\deg R_k = 2k$.

当 $k=0$ 时. $R_0 = u$ 所以 $\deg R_0 = \deg u = 2$ ✓.

若 $\deg R_k = 2k$. 则由递推关系

$\left(n+\frac{1}{2}\right) R'_{n+1} = u R_n' + \frac{1}{2} u' R_n + \frac{\varepsilon^2}{8} R_n'''$ 可知 $\deg R_{n+1} = 2n+2$. □

5.4 □.

这里引入递推算子吧，否则无法解释 ∂^{-1} 的来历。

接下来的问题是，是否还有别的?

原来的对称可通过待定系数法求出。但是若用同样方法去求Virasoro对称，会发现除了 $\frac{\partial}{\partial \tau_{-1}}$ 与 $\frac{\partial}{\partial \tau_0}$ 以外再找不出别的了。事实上还是有别的的，只是其它的Virasoro对称形状比较出人意料会有一些坏的项，所以无法待定系数求出。

下面介绍一种递推算子法，它可以构造KdV方程的各种对称。首先回顾一下，KdV方程组可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = P_1\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}\right) = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} P_2\left(\frac{\delta H_n}{\delta u}\right)$$

若定义算子 $R = P_2 \circ P_1^{-1}$，则有

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial t_n}\right) = P_2 \circ P_1^{-1}\left(P_1 \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}\right) = P_2 \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u} = \left(n+\frac{3}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial t_{n+1}}.$$

或写为 $\frac{\partial u}{\partial t_n} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} R\left(\frac{\partial u}{\partial t_{n-1}}\right)$。所以算子R可以把KdV方程的一个对称 $\frac{\partial}{\partial t_{n-1}}$ 变成另一个对称 $\frac{\partial}{\partial t_n}$。这种算子叫做递推算子。另一方面，R从 $\frac{\partial}{\partial t_0} = u_x$ 推出来的对称们还是相互交换的。这个性质叫遗传强对称。关于遗传强对称有一套丰富的理论，它也是可积性的重要体现。不过在这里我们不想过多地讨论这一理论。因

Date:
Place:
Reminders

但这计算有一个严重的问题. 比如对KdV, 我们有

$$R=\left(u\partial+\frac{1}{2}u_x+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial^3\right)\partial^{-1}=u+\frac{1}{2}u_x\partial^{-1}+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial^2.$$

它含有一个∂^{-1}, 这不是一个良好定义的运算. 对KdV之前的那些对称, 每一次递推出来的东西都恰好可以积出. 因此不会有什么问题. 但是在下面的Virasoro对称中, 这个∂^{-1}并不总能算出来, 结果就出事了.

首先我们先看一下R作用在$\frac{\partial}{\partial s_{-1}}$上等于什么.

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial s_{-1}}\right)=\left(u+\frac{1}{2}u_x\partial^{-1}+\frac{\varepsilon^2}{8}\partial^2\right)\left(1+\sum_{k\ge0}t_{k+1}\frac{\partial u}{\partial t_k}\right)$$

$$=u+\frac{1}{2}u_x\partial^{-1}(1)+\sum_{k\ge0}t_{k+1}\underbrace{R\left(\frac{\partial u}{\partial t_k}\right)}_{(k+\frac{3}{2})\frac{\partial u}{\partial t_{k+1}}}$$

我们规定 $\partial^{-1}(1)=x=t_0$, 于是

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial s_{-1}}\right)=u+\frac{1}{2}t_0\frac{\partial u}{\partial t_0}+\sum_{k\ge0}\left(k+\frac{3}{2}\right)t_{k+1}\frac{\partial u}{\partial t_{k+1}}$$

$$=u+\sum_{k\ge0}\left(k+\frac{1}{2}\right)t_k\frac{\partial u}{\partial t_k}=\frac{\partial u}{\partial s_0}.$$

所以$\frac{\partial u}{\partial s_0}$可以从$\frac{\partial u}{\partial s_{-1}}$推出来.

接下来我们看$R\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right)$是什么.

$R\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right) =: \frac{\partial u}{\partial s_1}$. $\frac{\partial u}{\partial s_2} := R\left(\frac{\partial u}{\partial s_1}\right)$ 比较复杂，特别是含一个积分的运算，此处略。

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right) = R\left(u + \frac{1}{2}xu_x + \sum_{k\geq 1}\left(k+\frac{1}{2}\right)t_k\frac{\partial u}{\partial t_k}\right)$$

$$= R(u) + \frac{1}{2}R(xu_x) + \sum_{k\geq 1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)t_k\frac{\partial u}{\partial t_{k+1}}.$$

$$R(u) = u^2 + \frac{1}{2}u_x\partial^{-1}u + \frac{\epsilon^2}{8}u_{xx}$$

$$R(xu_x) = xuu_x + \frac{1}{2}u_x\partial^{-1}(xu_x) + \frac{\epsilon^2}{8}\partial_x^2(xu_x)$$

$$= xuu_x + \frac{u_x}{2}\left(xu - \partial^{-1}u\right) + \frac{\epsilon^2}{8}\left(xu_{xxx} + 2u_{xx}\right)$$

$$= \frac{3}{2}x\left(uu_x + \frac{\epsilon^2}{12}u_{xxx}\right) - \frac{1}{2}u_x\partial^{-1}u + \frac{\epsilon^2}{8}2u_{xx}.$$

所以有

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right) = u^2 + \frac{1}{2}u_x\partial^{-1}u + \frac{\epsilon^2}{8}u_{xx}$$

$$+ \frac{3}{4}x\left(uu_x + \frac{\epsilon^2}{12}u_{xxx}\right) - \frac{1}{4}u_x\partial^{-1}u + \frac{\epsilon^2}{8}u_{xx} + \Sigma.$$

$$= u^2 + \frac{\epsilon^2}{4}u_{xx} + \frac{1}{4}u_x\partial^{-1}(u) + \sum_{k\geq 0}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)t_k\frac{\partial u}{\partial t_{k+1}}.$$

其中出现了一项 $\partial^{-1}(u)$，它不是微分多项式，所以之前用多项式待定系数不可能得到这样的解。

继续用 R 作用在 $R\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right)$ 上会得到更复杂的项，不过有趣的是，经过一些分部积分后，最终表达式总可写为

此处的 $\frac{\varepsilon^2}{16}$ 并没有什么用, 可以扔掉. 不过下面会看到 →
如果有它, Virasoro 交换关系会更简单. 另外, Witten猜想中也需要它.

注意 $u=\varepsilon^2\partial_x^2 F$. 所以 $\partial u=\varepsilon\,\partial x F$

只含一层 ∂ 的形式. 所以~~这里在注意下~~ 如果用 F 与 工转这类对称应该会有较好的形式.

引理: 如下方程是 KdV 的 τ 覆盖的对称

i)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial s_{-1}}=\dfrac{t_0^2}{2}+\sum\limits_{k\ge 0}t_{k+1}f_k\\[2mm] \dfrac{\partial f_p}{\partial s_{-1}}=t_0\delta_{p0}+f_{p-1}+\sum\limits_{k\ge0}t_{k+1}\Omega_{kp}(u,\dots).\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial s_{-1}}=1+\sum\limits_{k\ge0}t_{k+1}R'_{k+1}(u\cdots)\end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial s_0}=\dfrac{\varepsilon^2}{16}+\sum\limits_{k\ge0}(k+\tfrac12)t_k f_k\\[2mm] \dfrac{\partial f_p}{\partial s_0}=(p+\tfrac12)f_p+\sum\limits_{k\ge0}(k+\tfrac12)t_k\Omega_{pk}(u\cdots)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial s_0}=u+\sum\limits_{k\ge0}(k+\tfrac12)t_k R'_{k+1}(u\cdots).\end{cases}$$

证明: 这两个例子都可以写为如下形式:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\mathcal{L}(f,f_p,u,t_k,\cdots).\quad \frac{\partial f_p}{\partial s}=\frac{d}{dt_p}\mathcal{L}\quad \frac{\partial u}{\partial s}=\left(\frac{d}{dx}\right)^2\mathcal{L}$$

所以 $\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t_k}\right](f)=0$ 是显然的.

$$\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t_k}\right](f_p)=\frac{\partial}{\partial s}\Omega_{kp}-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial t_p\partial t_k}.$$ 这个一会再说.

$$\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t_k}\right](u)=\frac{\partial}{\partial s}R'_{k+1}-\frac{\partial\mathcal{L}_{xx}}{\partial t_k}=\partial_x\Big(\underbrace{\frac{\partial R_{k+1}}{\partial s}-\frac{\partial\mathcal{L}_x}{\partial t_k}}_{\partial\Omega_{0k}-\partial^2\mathcal{L}}\Big).$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

所以我们只需证 $\frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial s} = \frac{\partial^2 L}{\partial t_p \partial t_q}$.

i) $L = \frac{t_0^2}{2} + \sum_{k\geq 0} t_{k+1} f_k$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t_p \partial t_q} = \delta_{p0}\delta_{q0} + \sum_{k\geq 0} t_{k+1} \frac{\partial \Omega_{kp}}{\partial t_q} + \Omega_{p-1,q} + \Omega_{p,q-1}.$$

$$\frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial s} = \sum_{s\geq 0}\left(1 + \sum t_{k+1}\frac{\partial u}{\partial t_k}\right)^{(s)} \frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial u^{(s)}} = \frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial u} + \sum_{k\geq 0} t_{k+1}\frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial t_k}$$

所以只需证 $\frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial u} = \Omega_{p-1,q} + \Omega_{p,q-1} + \delta_{p0}\delta_{q0}$. (*1)

ii) $L = \frac{s^2}{16} + \sum_{k\geq 0}(k+\frac{1}{2}) t_k f_k$ (*2)

与 i) 类似可得, 只需证 $\sum_{s\geq 0}(1+\frac{s}{2}) u^{(s)} \frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial u^{(s)}} = (p+q+1)\Omega_{pq}$.

我们将在下面的引理中证明(*1)和(*2). □

引理: Ω_{pq} 满足

i) $\frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial u} = \Omega_{p-1,q} + \Omega_{p,q-1} + \delta_{p0}\delta_{q0}$.

ii) $\sum_{s\geq 0}(1+\frac{s}{2}) u^{(s)} \frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial u^{(s)}} = (p+q+1)\Omega_{pq}$.

证明: ~~若 $p=q=0$ 时, $\Omega_{p-1,q}=\Omega_{p,q-1}=0$, $\Omega_{pq}=u$, 成立.~~

~~若 $(p,q)\neq(0,0)$ 时~~ 先证 ii), 这个条件等价于. 若 $\deg u^{(s)} = s+2$,

则 $\deg \Omega_{pq} = 2p+2q+2$, 或等价地, $\deg \partial_x \Omega_{pq} = 2p+2q+3$.

$$\partial_x \Omega_{pq} = \frac{\partial R_{q+1}}{\partial t_p} = \sum_{s\geq 0}\left(\frac{\partial u}{\partial t_p}\right)^{(s)} \frac{\partial R_{q+1}}{\partial u^{(s)}} = \sum_{s\geq 0} R_{p+1}^{(s+1)} \frac{\partial R_{q+1}}{\partial u^{(s)}}$$

之前已证过 $\deg R_p = 2p+2$. 可得上式右边的 deg 为

Date:
Place:
Reminders

$2p+2+2q+2+s+1-(s+2)=2p+2q+3$. i) 证毕.

再看 ii) 先证 $\partial_x(左)=\partial_x(右)$.

$$\partial_x\frac{\partial\Omega_{pq}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left[\sum_{t\geq 0}\left(R_{p+1}^{(t+1)}\frac{\partial R_{q+1}}{\partial u^{(t)}}\right)\right]$$

$$=\sum_{t\geq 0}\left[R_p^{(t+1)}\frac{\partial R_{q+1}}{\partial u^{(t)}}+R_{p+1}^{(t+1)}\frac{\partial R_q}{\partial u^{(t)}}\right]\qquad\left(\frac{\partial R_{p+1}}{\partial u}=R_p\right).$$

$$=\partial_x\Omega_{p-1,q}+\partial_x\Omega_{p,q-1}.$$

接下来确定 $c=\frac{\partial\Omega_{pq}}{\partial u}-(\Omega_{p-1,q-1}+\Omega_{p,q-1})$ 我们取 $u=0$. 则 $\Omega_{p-1,q}$ 与 $\Omega_{p,q-1}$ 根据定义为零. $\frac{\partial\Omega_{pq}}{\partial u}\Big|_{u=0}$ 则给出 Ω_{pq} 中 u 的线性项的系数. 注意 $\deg\Omega_{pq}=2p+2q+2$. $\deg u=2$. 所以只有当 $p=q=0$ 时 Ω_{pq} 中才有线性项. 此时 $c=\frac{\partial u}{\partial u}=1$. 所以 $c=\delta_{p0}\delta_{q0}$. $\square$

由 $\frac{\partial}{\partial s_{-1}}$ 和 $\frac{\partial}{\partial s_0}$ 的经验可知, 讨论τ覆盖的 Virasoro 对称时, 只需写出 $\frac{\partial f}{\partial s}=L$ 其他两个将一定是 $\frac{\partial f_p}{\partial s}=\frac{\partial L}{\partial t_p}$. $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial^2 L}{\partial t_0^2}$. 然后. 要验证是对称 则只需验算 $\frac{\partial\Omega_{pq}}{\partial s}=\frac{\partial^2 L}{\partial t_p\partial t_q}$.

先记 $\frac{\partial u}{\partial s_1}=R^2\left(\frac{\partial u}{\partial s_{-1}}\right)=R\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right)$. 注意 $f_0=\frac{\partial f}{\partial t_0}$. $u=\Omega_{00}=\frac{\partial f_0}{\partial t_0}$.

所以有

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = u^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} u_{xx} + \frac{u_x}{4} f_0 + \sum_{k\geq 0} (k+\tfrac{1}{2})(k+\tfrac{3}{2}) t_k \frac{\partial u}{\partial t_{k+1}}$$

它的τ覆盖可写为

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{8}(\varepsilon^2 u + f_0^2) + \sum_{k\geq 0} (k+\tfrac{1}{2})(k+\tfrac{3}{2}) t_k f_{k+1}.$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial s_1} = \frac{1}{8}(\varepsilon^2 R'_{p+1} + 2 f_0 \Omega_{0p}) + (p+\tfrac{1}{2})(p+\tfrac{3}{2}) f_{p+1} + \sum_{k\geq 0} (k+\tfrac{1}{2})(k+\tfrac{3}{2}) t_k \Omega_{p,k+1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = u^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} u_{xx} + \frac{u_x}{4} f_0 + \sum_{k\geq 0} (k+\tfrac{1}{2})(k+\tfrac{3}{2}) t_k \frac{\partial u}{\partial t_{k+1}}$$

要验证它的确是对称，需要证明如下恒等式：

$$\sum_{s\geq 0}\left[(u^2)^{(s)} + \frac{\varepsilon^2}{4} u^{(s+2)} + \frac{1}{4}(u_x f_0)^{(s)} + \frac{3}{4} s R_2^{(s)}\right]\frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial u^{(s)}}$$

$$= (p+\tfrac{1}{2})(p+\tfrac{3}{2})\Omega_{p+1,q} + (q+\tfrac{1}{2})(q+\tfrac{3}{2})\Omega_{p,q+1}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^2 \Omega_{pq} + \frac{1}{4} R_{p+1} R_{q+1} + \frac{1}{4} f_0 \partial_x \Omega_{pq}.$$

这个恒等式的证明就复杂了。另外，即使能够证出来，后面还有无穷多的 $\frac{\partial u}{\partial s_m} = R^m\left(\frac{\partial u}{\partial s_0}\right)$，应该找一个统一的办法去处理。

Date:
Place:
Reminders

应为 $\frac{3}{8} f_0 f_1$. $\rightarrow$

这个口是 $m=3$ 的项.

Date:
Place:
Reminders

用K再作用几次可以得到更高阶的 $\frac{\partial f}{\partial s_m}$. 再把它们提升到τ覆盖上可得

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{8}(\varepsilon^2 \Omega_{00} + f_0^2) + \sum_{k\geq 0}(k+\tfrac{1}{2})(k+\tfrac{3}{2}) t_k f_{k+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s_2} = \boxed{\frac{15}{16}(\varepsilon^2 \Omega_{02} + f_0 f_2) + \frac{9}{32}(\varepsilon^2 \Omega_{11} + f_1 f_1)} + \sum_{k\geq 0}(k+\tfrac{1}{2})(k+\tfrac{3}{2})(k+\tfrac{5}{2}) t_k f_{k+2}$$

$\cdots$

经过一些观察, 我们可以猜想一般的 $\frac{\partial f}{\partial s_m}$ 应有如下公式:

$$\frac{\partial f}{\partial s_m} = \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(m+k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} t_k f_{k+m} + \frac{1}{2}\sum_{k+l=m-1} \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} (\varepsilon^2 \Omega_{kl} + f_k f_l).$$

接下来就是证明它们的确是KdV的对称的τ覆盖.

先定义一个生成函数

$$\frac{\partial f}{\partial s(\lambda)} = \sum_{m\geq -1} \frac{1}{\lambda^{m+2}} \frac{\partial f}{\partial s_m} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial s_{-1}} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial f}{\partial s_0} + \sum_{m\geq 0}\frac{1}{\lambda^{m+2}}\frac{\partial f}{\partial s_m}$$

$$= \frac{t_0^2}{2\lambda} + \frac{\varepsilon^2}{16\lambda^2} + \left(J(\lambda) W(\lambda) f_1\right)_- + \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 W(\lambda)^2 (f) + W(\lambda)(f)^2\right].$$

$$=: L(\lambda)$$

太复杂了，证不出来了，应该是对的，留做练习吧……

↓

以下将只用 $\tilde{b}(\lambda)=\sum_{k\ge0}\frac{1}{\lambda^{k+\frac12}}\,b_k$，所以记 $b:=\tilde{b}$.

↓

一个简单的事实：$b(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+W(\lambda)(f_0)$. $\left(f_0=\frac{\partial f}{\partial t_0}\right)$. →

接下来的目的是计算 →

$$W(\mu)(K(\lambda))=\left(W(\mu)(J(\lambda))\cdot b(\lambda)\right)_-+\left(J(\lambda)\cdot W(\mu)(b(\lambda))\right)_-$$

$$+\,W(\mu)W(\lambda)(f)\cdot b(\lambda)+W(\lambda)(f)\cdot W(\mu)(b(\lambda))$$

$$+\,\frac{\varepsilon^2}{2}W(\mu)\left(W(\lambda)(b(\lambda))\right).$$

然后证明：$\frac{\partial b(\mu)}{\partial s(\lambda)}=W(\mu)(K(\lambda))$. 进而得 $\frac{\partial}{\partial s(\lambda)}\omega(\mu,\nu)$.

其中 $W(\lambda)=\sum_{k\ge0}\frac{\Gamma(k+\frac32)}{\Gamma(\frac12)}\frac{1}{\lambda^{k+\frac32}}\frac{\partial}{\partial t_k}$.

$$J(\lambda)=\sum_{k\ge0}\frac{\Gamma(\frac12)}{\Gamma(k+\frac12)}\lambda^{k-\frac12}t_k.$$

要证明 $\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial t_p\partial t_q}=\frac{\partial \Omega_{pq}}{\partial s(\lambda)}$，也做一个生成函数，即为

$$W(\mu)W(\nu)(L(\lambda))=\frac{\partial}{\partial s(\lambda)}\omega(\mu,\nu).\quad (*)$$

(略)

引理1. 记 $K(\lambda)=L'(\lambda)$ 则

$$K(\lambda)=\left(J(\lambda)b(\lambda)\right)_-+\frac{\varepsilon^2}{2}W(\lambda)(b(\lambda))+W(\lambda)(f)\cdot b(\lambda).$$

引理2. 对任意 Laurent 级数 $\beta(\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\lambda^k$.

i) $(\mu-\lambda)(\beta)_- -((\mu-\lambda)\beta)_- = -\beta_{-1}$.

ii) $(\mu-\lambda)^2(\beta)_- -((\mu-\lambda)^2\beta)_- = \beta_{-2}+\lambda\beta_{-1}-2\mu\beta_{-1}$.

引理3.

i) $W(\mu)(J(\lambda))=\frac{1}{2(\mu-\lambda)^2}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}+\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)$.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

ii) $\left(W(\mu)(J(\lambda))\, b(\lambda)\right)_-$

$$= \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}+\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)b_{(\lambda)} - (\lambda-\mu)\,\partial_\mu b(\mu) - b(\mu)\right].$$

引理4. i) $\operatorname*{Res}_{\lambda=0} J(\lambda)\, b(\lambda) = \frac{\partial f_0}{\partial s_{-1}}$

ii) $\operatorname*{Res}_{\lambda=0} J(\lambda) W(\mu)(b(\lambda)) = W(\mu)\left(\frac{\partial f_0}{\partial s_{-1}}\right) + \partial_\mu b(\mu).$

$$= \frac{\partial b(\mu)}{\partial s_{-1}} + \partial_\mu b(\mu).$$

引理5. i) $\left(J(\lambda)\, b(\lambda)'\right)_- = K(\lambda)' - \frac{\varepsilon^2}{2} W(\lambda)(b(\lambda)) - b(\lambda)^2 - W(\lambda)(f)\cdot b(\lambda)'.$

ii) $\left(J(\lambda) W(\mu)(b(\lambda))\right)_- = \frac{1}{\mu-\lambda}\Big[-\partial_\mu b_\mu - \partial_{s_{-1}} b(\mu) - \frac{1}{2} b(\mu)\, b(\lambda)^2$

$+ \frac{1}{2}\left(b(\mu)\, K(\lambda)' - b(\mu)' K(\lambda)\right) + W(\lambda)(f)\cdot \frac{b(\mu)' b(\lambda) - b(\mu)\, b(\lambda)'}{2}$

$+ \frac{\varepsilon^2}{4}\left(b(\mu)' W(\lambda)(b(\lambda)) - b(\mu)\, W(\lambda)(b(\lambda)')\right)\Big]$

引理6. $W(\mu)(W(\lambda)\, b(\lambda))$

$$= \frac{1}{2(\mu-\lambda)}\Big[b(\mu)\, W(\lambda)(b(\lambda)') - b(\mu)' W(\lambda)\, b(\lambda) + b'(\lambda)\, \frac{b(\lambda)' b(\mu) - b(\lambda)\, b(\mu)'}{2(\mu-\lambda)}$$

$$- b(\lambda)\, \frac{b(\lambda)'' b(\mu) - b(\lambda)\, b(\mu)''}{2(\mu-\lambda)}\Big]$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

将 $f=\varepsilon^2\log\tau$ 代入 $\frac{\partial f}{\partial s_\lambda}$ 可得

$$\frac{\partial\tau}{\partial s(\lambda)}=\left(\frac{t_0^2}{2\varepsilon^2\lambda}+\frac{1}{16\lambda^2}\right)\tau+\left(J(\lambda)W(\lambda)(\tau)\right)_-+\frac{\varepsilon^2}{2}W(\lambda)^2(\tau)$$

$$=\frac{1}{16\lambda^2}+\frac{1}{2}:\left(\varepsilon W(\lambda)+\frac{1}{\varepsilon}J(\lambda)\right)^2_-:(\tau).$$

其中 $:t_p\frac{\partial}{\partial t_q}:=:\frac{\partial}{\partial t_q}t_p:=t_p\frac{\partial}{\partial t_q}$ 叫做正规积. 所以 Virasoro 对称性可写为

$$\frac{\partial\tau}{\partial s_m}=L_m,\quad m\geq -1.$$

其中 $L_{-1}=\frac{t_0^2}{2\varepsilon^2}+\sum_{k\geq 0}t_{k+1}\frac{\partial}{\partial t_k}.$

$L_0=\frac{1}{16}+\sum_{k\geq 0}(k+\frac{1}{2})t_k\frac{\partial}{\partial t_k}$

$$L_m=\sum_{k\geq 0}\frac{\Gamma(m+k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}t_k\frac{\partial}{\partial t_{k+m}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k+l=m-1}\frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\partial}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial t_l}\quad(m\geq -1).$$

定理: $[L_n, L_m]=(n-m)L_{n+m}\quad m,n\geq -1.$

证明: 首先 L_0 就是数 degree 的.

$[L_0, L_m]=\left[\sum(k+\frac{1}{2})t_k\frac{\partial}{\partial t_k}, L_m\right].$

注意 $\left[\sum(k+\frac{1}{2})t_k\frac{\partial}{\partial t_k}, t_l\right]=\underbrace{(l+\frac{1}{2})}_{\deg t_l}t_l$

$\left[\sum(k+\frac{1}{2})t_k\frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial t_l}\right]=\underbrace{-(l+\frac{1}{2})}_{\deg\frac{\partial}{\partial t_l}}\frac{\partial}{\partial t_l}$

$\left[\sum_{k\geq 0}(k+\frac{1}{2})t_k\frac{\partial}{\partial t_k}, AB\right]=(\deg A+\deg B)AB$ (若 A,B 齐次).

由 L_{-1} 与 L_m $(m\geq 1)$ 的定义易知. $\deg L_{-1}=1$, $\deg L_m=-m$.

于是 $[L_0, L_{-1}]=L_{-1}=(0-(-1))L_{0+(-1)}$. 所以 $n=0$ 时证完.

$[L_0, L_m]=-mL_m=(0-m)L_{0+m}$

Date:
Place:
Reminders

当 $n=-1$ 时，显然只需考虑 $m\geq 1$ 的情况，为了方便我们计算 $[L_m, L_{-1}]$

$$[L_m, L_{-1}] = \left[\sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(m+k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} t_k \partial_{m+k} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{p+q=m-1} \frac{\Gamma(p+\frac{3}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} \partial_p \partial_q, \right.$$

$$\left. \frac{t_0^2}{2\varepsilon^2} + \sum_{l\geq 1} t_{l+1} \partial_l \right]$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{p+q=m-1} \frac{\Gamma(p+\frac{3}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} [\partial_p \partial_q, t_0^2]$$

$$+ \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(m+k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \left[t_k \partial_{m+k}, \sum_{l\geq 0} t_{l+1} \partial_l \right]$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{p+q=m-1} \sum_{l\geq 0} \frac{\Gamma(p+\frac{3}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} [\partial_p \partial_q, t_{l+1} \partial_l]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p+q=m-1} \frac{\Gamma(p+\frac{3}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} (t_0 \delta_{p0} \partial_q + t_0 \delta_{q0} \partial_p + \delta_{p0} \delta_{q0})$$

$$+ \sum_{k,l\geq 0} \frac{\Gamma(m+k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} (t_k \delta_{m+k, l+1} \partial_l - t_{l+1} \delta_{kl} \partial_{m+k}).$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{p+q=m-1} \sum_{l\geq 0} \frac{\Gamma(p+\frac{3}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} (\delta_{q,l+1} \partial_p \partial_l + \delta_{p,l+1} \partial_q \partial_l)$$

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} t_0 \partial_{m-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} t_0 \partial_{m-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\delta_{m1}\right)$$

$$+ \sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(m+k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} t_k \partial_{k+m-1} - \sum_{l\geq 0} \frac{\Gamma(m+l+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+\frac{1}{2})} t_{l+1} \partial_{m+l}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{p+q=m-1} \frac{\Gamma(p+\frac{3}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\partial_p \partial_{q-1} + \partial_q \partial_{p-1}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\delta_{m1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} t_0 \partial_{m-1} + \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} t_0 \partial_{m-1}$$

$$+ \sum_{k\geq 1} \left[\frac{\Gamma(m+k+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} - \frac{\Gamma(m+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\right] t_k \partial_{k+m-1}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{p+q=m-2} \frac{\Gamma(p+\frac{5}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2}) + \Gamma(p+\frac{3}{2})\Gamma(q+\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \partial_p \partial_q$$

$$= \frac{1}{8}\delta_{m1} + (m+1)\left[\sum_{k\geq 0} \frac{\Gamma(k+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} t_k \partial_{k+m-1} + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{p+q=m-2} \frac{\Gamma(p+\frac{3}{2})\Gamma(q+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} \partial_p \partial_q\right]$$

$$= (m+1) L_{m-1}.$$

（当 $m=1$ 时，第一项正好是 $2\cdot\frac{1}{16}$，这解释了为什么要在 L_0 中加入这样一项）.

$[L_n, L_m]$ 的计算是类似的，略。 $\square$.

定理中的关系叫 Virasoro 交换关系，因为这是 Virasoro

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

代数交换关系的一部分，所以这种对称叫 Virasoro 对称.

§1.9

拟平凡性.

首先看一个经典的变换：Miura 变换

定理：KdV方程 $u_t = uu_x + \frac{\varepsilon^2}{12}u_{xxx}$ 经变换

$$u = \frac{1}{4}v^2 + \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{2}}v_x \qquad (*)$$

可化为 modified KdV 方程

$$v_t = \frac{1}{4}v^2 v_x + \frac{\varepsilon^2}{12}v_{xxx}.$$

证明：$\mathrm{KdV} = \left(\frac{v}{2} + \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{2}}\partial\right)\mathrm{mKdV}$ □

变换(*)叫 Miura 变换. 它在 $u\neq 0$ 处是可逆的（形式幂级数意义下）：

$$v = 2\sqrt{u} - \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{2}}\frac{u_x}{u} + \varepsilon^2\left(\frac{u_{xx}}{8u^{\frac{3}{2}}} - \frac{5u_x^2}{32u^{\frac{5}{2}}}\right) + \cdots$$

更一般地，我们可以考虑形如

$$\tilde{u} = F_0(u) + \varepsilon F_1(u)u_x + \varepsilon^2\left(F_2(u)u_{xx} + F_{11}(u)u_x^2\right) + \cdots \qquad (1)$$

Date:
Place:
Reminders

的变换，它的领头项 $F(u)$ 在某 $u=u_0$ 附近可逆，而且每一项 ε^k 的系数是 $u', \dots, u^{(k)}$ 的多项式，且其系数为 u_0 附近的光滑函数。易知这样的变换构成一个群，它叫 Miura 变换群。（后面会证明这些断言）

对于任意给定的方程 $u_t = X(u, u_x, \cdots)$，做 rescaling $\partial_t \mapsto \varepsilon \partial_t$，$\partial_x \mapsto \varepsilon \partial_x$，于是方程变为

$$u_t = \frac{1}{\varepsilon} X(u, \varepsilon u_x, \varepsilon^2 u_{xx}, \cdots).$$

Taylor 展开后总有

$$u_t = \frac{1}{\varepsilon} f_0(u) + f_1(u) u_x + \varepsilon \left(f_2(u) u_{xx} + f_{11}(u) u_x^2 \right) + \cdots \quad (2)$$

这样的方程在 Miura 变换下保持形式不变。所以可以考虑相应的分类问题。

不妨先不做 $\partial_t \mapsto \varepsilon \partial_t$，则 (2) 化为 $u_t = f_0(u) + \varepsilon f_1(u) u_x + \cdots$ (3)

定理：若(3)中的 $f_0(u)$ 在某 $u=u_0$ 附近恒不为零，则存在 Miura 变换(1)，使得(2)变为 $\tilde{u}_t = 1$.

证明：先考虑方程 $u_t = f_0(u)$，设 $\tilde{u} = g(u)$，则
$\tilde{u}_t = g'(u) \cdot u_t = g'(u) \cdot f_0(u)$，所以只要 $f_0 \neq 0$，则可定义 $g = \int^u \frac{du}{f_0}$，于是 $\tilde{u}_t = 1$.

Date:
Place:
Reminders

接下来，对于(2) 不妨设已找到变换使 $f_0(u)=1$. 下证一定存在形如 $\tilde{u} = u + \varepsilon g_1(u)u_x + \varepsilon^2(g_2(u)u_{xx} + g_{11}(u)u_x^2) + \cdots$ 的变换，使 $\tilde{u}_t = 1$.

首先考虑第一项，

$$\tilde{u}_t = u_t + \varepsilon(g_1(u)u_x)_t + \varepsilon^2(\cdots)$$

$$= 1 + \varepsilon\Big[f_1(u)u_x + g_1'(u)\underbrace{u_t}_{1+O(\varepsilon)}\cdot u_x + g_1(u)\underbrace{(u_{tx})}_{O(\varepsilon)}\Big] + O(\varepsilon^2) = 1$$

$\Rightarrow g_1'(u) = -f_1(u)$. 所以只要取 $g_1 = -\int^u f_1(u)$ 即可.

现在假设已找到变换使 $u_t = 1 + \varepsilon^k F_k(u, \cdots, u^{(k)}) + O(\varepsilon^{k+1})$.

考虑变换 $\tilde{u} = u + \varepsilon^k G_k(u, u', \cdots, u^{(k)}) + O(\varepsilon^{k+1})$，则有

$$\tilde{u}_t = 1 + \varepsilon^k\Big(F_k + \sum_{q\geq 0}(u^{(q)})_t\frac{\partial G_k}{\partial u^{(q)}}\Big) + O(\varepsilon^{k+1})$$

$$= 1 + \varepsilon^k\Big(F_k + \frac{\partial G_k}{\partial u}\Big) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

所以只需取 $G_k = -\int^u F_k\, du$ 即可. $\square$.

上面的定理表明 $f_0 \neq 0$ 的方程是没什么意思的. 事实上这种方程是很标的，不具有可积性.

命题：$u_s = X(u, u', \cdots)$ 是 $u_t = 1$ 的对称 $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial X}{\partial u} = 0$.　证明：计算同上. 略. $\square$.

而对于形如 $u_s = X(u', u'', \cdots)$ 的方程，我们一般

Date:
Place:
Reminders

会设 $w=u'$，于是 $w_t = \frac{\partial}{\partial x}X(u',u'',\dots)$ 它会化为满足 $f_0=0$ 的方程，然后再做进一步处理。

(3)

从现在起我们假设方程满足 $f_0=0$，于是可做 $\partial_t \mapsto \varepsilon\partial_t$ 使其化为(2)的形式，其中 $f_0=0$。

定义形如 $u_t = f_1(u)u_x + \varepsilon(f_2(u)u_{xx} + f_{11}(u)u_x^2) + \cdots$ 的方程叫流体力学型的，如果 $f_1(u)\neq 0$。$f_1(u)u_x$ 叫方程的色散项。

注：若 $f_1'(u)=0$，即 $f_1(u)=C$，则可通过变换 $\partial_t \mapsto \partial_t + C\partial_x$ 将其吸收掉，得到形如 $u_t = \varepsilon(f_2(u)u_{xx} + f_{11}(u)u_x^2) + \cdots$ 的方程，这种又是坏的方程。绝大多数可积系统都有一个流体力学型的，少数系统不是，但它们可视为其它流体力学型方程的极限。◇

定理：

i) 对于任意光滑函数 f, g，如下 Cauchy 问题
$u_t = f(u)u_x,\quad u(x,0)=g(x)$
局部上总有解。

Date:
Place:
Reminders

ii) $u_s = g(u)u_x$ 总是 $u_t = f(u)u_x$ 的对称.

iii) $H = \int g(u)\,dx$ 总是 $u_t = f(u)u_x$ 的守恒量.

iv) $P = g(u)\partial_x + \frac{1}{2}g(u)u_x$ 总是 $u_t = f(u)u_x$ 的 Hamilton 结构.

证明: i) 考虑隐式方程

$$u(x,t) = g(x + f(u(x,t))t).$$

对 x 求导得: $u_x = g'\cdot(1 + f'\cdot u_x t) \Rightarrow u_x = \frac{g'}{1 - tf'g'}$.

对 t 求导得: $u_t = g'(f + f'u_t t) \Rightarrow u_t = \frac{fg'}{1 - tf'g'}$.

所以 $u_t = f(u)u_x$. 当 t 充分小时 $1 - tf'g' \neq 0$, 所以局部上总有解.

ii), iii), iv) 直接计算即可. $\square$.

上面的定理表明领头项总是可积的. 一般的方程则可视为领头项的形变. 我们理论的核心思想就是利用形变的观点分析可积性.

定义: i) 若一个流体力学型方程可通过 Miura 变换变成另一个, 则称它们等价.

ii) 若一个流体力学型方程等价于它的领头项, 则称它平凡.

Date: ....
Place: ....

Reminders

Ref: JGP 57 (2006), 101–119. -->

LMP 84 (2008), 47–63.

Date: ....
Place: ....

Reminders

流体力学型方程一般来说不是平凡的。因为除第一项以外，方程中的参数个数总比~~可用的~~ Miura 变换中可用的参数个数多：ε^1次 2:1，ε^2次 3:2，…，ε^k次 $P(k+1):P(k)$，所以从维数上就知道能平凡的只占一个零测集（如果有测度的话…）。

另一方面，如果扩大可用的变换群，则可能得到某种推广了的"平凡性"，这就是拟平凡性。

例：对于 KdV 方程 $u_t = uu_x + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{xxx}$，

如下变换 $u = v + \varepsilon^2 \partial_x^2 \left(F_1(v_x) + \varepsilon^2 F_2(v_x, v_{xx}, v_{3x}, v_{4x}) + \cdots \right)$

其中 $F_1 = \frac{1}{24}\log v_x$，$F_2 = \frac{v_{4x}}{1152 v_x^2} - \frac{7 v_{xx} v_{3x}}{1920 v_x^3} + \frac{v_{xx}^3}{360 v_x^4}, \cdots$

可将其变为领头项 $v_t = vv_x$.

定理：对于流体力学型方程

$$u_t = f_1(u) u_x + \varepsilon\left(f_2(u) u_{xx} + f_{11}(u) u_x^2 \right) + \cdots \quad f_1' \neq 0.$$

存在形如

$$\tilde{u} = g_0(u) + \varepsilon g_1(u, \dots, u^{(N_1)}) + \varepsilon^2 g_2(u, \dots, u^{(N_2)}) + \cdots$$

的变换（其中 g_k 是 $\frac{1}{u_x}$, $\log u_x$, u_{xx}, …, $u^{(N_k)}$ 的多项式系数为 u 的光滑函数）使 $\tilde{u}_t = \tilde{u}\tilde{u}_x$.

Date:
Place:
Reminders

定义一组映射 $R: (y_1, y_2, \cdots) \mapsto (z_1, z_2, \cdots)$,

其中 $z_1 = \frac{1}{y_1}$, $z_n = \frac{1}{y_1} \sum_{k \geq 1} y_{k+1} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y_k}$ $(n \geq 2)$.

则当 y_k 是 $f(x)$ 的 k 阶导数时, z_k 是 $f^{-1}(y)$ 的 k 阶导数.

于是 $R^2 = id$.

引理. (*) 的齐次方程的通解可表为

$$G = \frac{1}{\varphi_1} C(u, \varphi_2, \varphi_3, \cdots).$$

命题 (*) 的一个特解可表为

$$G = -u_1 \left(\int^{\varphi_1} \varphi_1 F(u, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots) \, d\varphi_1 \right) \Big|_{(\varphi_1, \varphi_2, \cdots) = R(u_1, u_2, \cdots)}$$

其中 $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots) = R(\varphi_1, \varphi_2, \cdots)$.

证明留作练习.

Date:
Place:
Reminders

证明: 仍然考虑 $u_t = f(u) u_x$, 令 $\tilde{u} = f(u)$, 则

$\tilde{u}_t = f'(u) \cdot u_t = g(u) f(u) u_x = f(u) \tilde{u}_x = \tilde{u} \tilde{u}_x$.

因为 $f' \neq 0$, 所以可逆, 所以取 $\tilde{u} = f(u)$ 是合理的.

接下来考虑方程 $u_t = u u_x + \varepsilon^k F(u, u_x, \cdots, u^{(N)}) + O(\varepsilon^{k+1})$.

设 $\tilde{u} = u - \varepsilon^k G(u, \cdots, u^{(N)}) + O(\varepsilon^{k+1})$, 其逆为 $u = \tilde{u} + \varepsilon^k G + O(\varepsilon^{k+1})$

于是 $\tilde{u}_t = u_t - \varepsilon^k (G)_t$

$$= u u_x + \varepsilon^k F - \varepsilon^k \sum_{q \geq 0} \frac{\partial u^{(q)}}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial u^{(q)}}$$

$$= (\tilde{u} + \varepsilon^k G)(\tilde{u} + \varepsilon^k G)_x + \varepsilon^k \left(F - \sum_{q=0}^{N} (u u_x)^{(q)} \frac{\partial G}{\partial u^{(q)}} \right) + o(\varepsilon^k)$$

$$= \tilde{u} \tilde{u}_x + \varepsilon^k \left[F - \sum_{q=0}^{N} (u u_x)^{(q)} \frac{\partial G}{\partial u^{(q)}} + \tilde{u} G_x + \tilde{u}_x G \right] + o(\varepsilon^k)$$

所以只需解方程:

$$\sum_{q=0}^{N} \left((u u_x)^{(q)} - u u_x^{(q)} \right) \frac{\partial G}{\partial u^{(q)}} - u_x \cdot G = F(u, \cdots, u^{(N)}) \quad (*)$$

注意到 $(u u_x)^{(q)} - u u_x^{(q)} = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} u^{(p)} u^{(q-p+1)} - u u^{(q+1)}$

$= \sum_{p=1}^{q} \binom{q}{p} u^{(p)} u^{(q-p+1)}$ 其中并不会出现 $u^{(q+1)}$, 所以 (*) 是关于未知函数 $G(u, u', \cdots, u^{(N)})$

以及自变量 $u, u', \cdots, u^{(N)}$ 的一阶线性 PDE. 可用特征线法求解. 更进一步的分析可知 G 会含哪些项. 略

□.

Date: ....
Place: ....
Reminders

应用：在Ref中证明，若 $u_s = f(u)u_x + \cdots$ 是 $u_t = uu_x + \cdots$ 的对称，则后者的拟平凡变换也将前者映为其领头项。对Hamilton结构有类似结论。这个结论可以反过来判定一个给定的方程是否具有可积性。

判据：对方程 $u_t = uu_x + \cdots$ 设其拟平凡变换为 $\bar u = u + \cdots$，计算 $\bar u_s = f(\bar u)\bar u_x$ 在 u 下的形式，若对于 $u_s = f(u)u_x + \cdots$ 不含非多项式的项，则称原方程形式可积。（对Hamilton结构有类似判据。

这个方法可以从具有待定参数的方程中筛选出可积的来。也可用于研究一般的可积系统的分类问题。

Open Problem：① 分类所有形式可积方程。
② 多分量拟平凡性。

猜想：① Hamilton形式可积标准型
② τ结构形式可积标准型
③ Hamilton + τ ⇒ Hodge（Hodge万有性猜想）
……

Date: ....
Place: ....
Reminders

推论：a) 若方程为如下形式

$$u_t = f(u)u_x + \varepsilon^2\left(f_3(u)u_{xxx} + f_{21}(u)u_{xx}u_x + f_{111}(u)u_x^3\right)$$

则其拟平凡变换 $\bar u = g_0(u) + \sum \varepsilon^k g_k(u, u_x, \ldots, u^{(N_k)})$ 中不出现 $\log u_x$，即所有 g_k 都是 $\frac{1}{u_x}, u_x, u_{xx}, \ldots, u^{(N_k)}$ 的多项式。

b) 条件同上，若规定 $\deg u^{(k)} = k$，则存在唯一的 g_k 使 $\deg g_k = k$。

推论：KdV方程存在唯一的拟平凡变换

$$u = v + \frac{\varepsilon^2}{24}\left(\frac{v_{xxx}}{v_x} - \frac{v_{xx}^2}{v_x^2}\right) + \varepsilon^4(\cdots) + \cdots$$

满足上述齐次性条件。

问题：为什么KdV的拟平凡变换是 $u = v + \varepsilon^2\partial_x^2(\cdots)$ 的形式？其中的 F_g 是什么？

答案：因为有τ结构和Virasoro，F_g 就叫亏格g自由能。

为了解释这个公式，我们先来看 v 满足的方程：

$\frac{\partial v}{\partial t_n} = \frac{v^n}{n!}v_x$，即 $R^{[0]}_{n+1} = \frac{v^{n+1}}{(n+1)!}$，由此可解出

$\Omega^{[0]}_{k\ell} = \frac{v^{k+\ell+1}}{(k+\ell+1)k!\ell!}$，所以相应的τ覆盖为

Date: ....
Place: ....

Reminders

Date: ....
Place: ....

Reminders

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t_k} = f_k^{(0)}, \quad \frac{\partial f_l^{(0)}}{\partial t_k} = \Omega_{kl}^{(0)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t_k} = (R_{k+1}^{(0)})'.$$

Virasoro 对称的 τ 函数 $\frac{\partial}{\partial s(\lambda)}$ 的 τ 覆盖为

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial s(\lambda)} = \frac{t_0^2}{2\lambda} + \left(J(\lambda)\cdot W(\lambda)(f^{(0)})\right)_- + \frac{1}{2}\left(W(\lambda)(f^{(0)})\right)^2$$

关系式 $u = v + \varepsilon^2 \partial_x^2 (F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots)$ 用 τ 函数来写就是 $f = f^{(0)} + \varepsilon^2(F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots)$，我们记 $\Delta = F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots$ 接下来就是证明 Δ 可写为 $v, v', \cdots$ 的有理函数。

回忆一下 $\frac{\partial f}{\partial s(\lambda)}$ 的方程:

$$\frac{\partial f}{\partial s(\lambda)} = \frac{t_0^2}{2\lambda} + \frac{1}{16\lambda^2} + \left(J(\lambda) W(\lambda)(f)\right)_- + \frac{\varepsilon^2}{2} W(\lambda)\left(W(\lambda)(f)\right) + \frac{1}{2}\left(W(\lambda)(f)\right)^2,$$ 即

$$\frac{\partial (f^{(0)} + \varepsilon^2 \Delta)}{\partial s(\lambda)} = \frac{t_0^2}{2\lambda} + \frac{1}{16\lambda^2} + \left(J(\lambda)\cdot W(\lambda)(f^{(0)} + \varepsilon^2\Delta)\right)_- + \frac{\varepsilon^2}{2} W(\lambda)\left(W(\lambda)(f^{(0)} + \varepsilon^2 \Delta)\right) + \frac{1}{2}\left(W(\lambda)(f^{(0)}) + \varepsilon^2 W(\lambda)(\Delta)\right)^2$$

其中 ε^0 的系数恰为 $\frac{\partial f^{(0)}}{\partial s(\lambda)}$，所以消去了，剩下的方程除以 ε^2 后为

Date:
Place:
Reminders

$$\frac{\partial \Delta}{\partial s(\lambda)} = \frac{1}{16\lambda^2} + \left(J(\lambda)\cdot W(\lambda)(\Delta)\right)_- + \frac{1}{2} W(\lambda)\left(W(\lambda)(f^{(0)})\right)$$

$$+ W(\lambda)(f^{(0)})\cdot W(\lambda)(\Delta) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[W(\lambda)\left(W(\lambda)(\Delta)\right)$$

$$+ \left(W(\lambda)(\Delta)\right)^2\Big].$$

其中

$$\frac{1}{2} W(\lambda)\left(W(\lambda)(f^{(0)})\right) + \frac{1}{16\lambda^2} = \frac{1}{16\lambda^2} + \sum_{k,l\geq 0} \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{3}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2})^2 \lambda^{k+l+3}} \Omega^{(0)}_{k,l}$$

$$= \frac{1}{16\lambda^2} + \frac{2v\lambda - v^2}{16(\lambda-v)^2\lambda^2} = \frac{1}{16(\lambda-v)^2}.$$

记 $D(\lambda) = \frac{\partial}{\partial s(\lambda)} - \left(J(\lambda)\cdot W(\lambda)(\cdot)\right)_- - W(\lambda)(f^{(0)})\cdot W(\lambda)(\cdot)$

它是一个导子，则关于Δ的方程可写为

$$D(\lambda)(\Delta) = \frac{1}{16(\lambda-v)^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[W(\lambda)\left(W(\lambda)(\Delta)\right) + \left(W(\lambda)(\Delta)\right)^2\Big].$$

接下来是对Δ换元，将导子$D(\lambda)$与$W(\lambda)$等的作用在$v, v', \cdots$坐标下写出来.

Date:
Place:

Reminders

Date:
Place:

Reminders

首先，$\frac{1}{2}\left(w(\lambda)^2(\Delta)+w(\lambda)(\Delta)^2\right)$

$$=\frac{1}{2}w(\lambda)\left(\sum_{p\geq 0} w(\lambda)(v^{(p)})\frac{\partial\Delta}{\partial v^{(p)}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{p,q\geq 0} w(\lambda)(v^{(p)})w(\lambda)v^{(q)}\frac{\partial\Delta\,\partial\Delta}{\partial v^{(p)}\partial v^{(q)}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{p\geq 0} w(\lambda)^2(v^{(p)})\frac{\partial\Delta}{\partial v^{(p)}}+\frac{1}{2}\sum_{p,q\geq 0} w(\lambda)(v^{(p)})w(\lambda)(v^{(q)})\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial v^{(p)}\partial v^{(q)}}+\frac{\partial\Delta}{\partial v^{(p)}}\frac{\partial\Delta}{\partial v^{(q)}}\right)$$

$$\frac{1}{2}w(\lambda)^2(v^{(p)})=\left(\frac{1}{2}w(\lambda)^2(f^{[0]})\right)^{(p+2)}=\left(\frac{1}{16(\lambda-v)^2}\right)^{(p+2)}.$$

$$w(\lambda)(v^{(p)})=\left(b^{[0]}(\lambda)\right)^{(p+1)}=\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda-v}}\right)^{(p+1)}.$$ 所以

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\left[w(\lambda)^2(\Delta)+w(\lambda)(\Delta)^2\right]=\varepsilon^2\left(\sum_{p\geq 0}\left(\frac{1}{16(\lambda-v)^2}\right)^{(p+2)}\frac{\partial\Delta}{\partial v^{(p)}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{p,q\geq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda-v}}\right)^{(p+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda-v}}\right)^{(q+1)}\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial v^{(p)}\partial v^{(q)}}+\frac{\partial\Delta}{\partial v^{(p)}}\frac{\partial\Delta}{\partial v^{(q)}}\right)\right).$$

另一方面，由 $\frac{\partial t}{\partial s(\lambda)}$ 的方程可导出

$$\frac{\partial v}{\partial s(\lambda)}=\left(\tau(\lambda)\cdot w(\lambda)(v)\right)_-+w(\lambda)(f^{[0]})\cdot w(\lambda)(v)+\frac{1}{\lambda-v},$$ 即

$D_{(\lambda)}(v)=\frac{1}{\lambda-v}$. 两边求 λ^2 可得

Date:
Place:

Reminders

注：通过圈方程解 $F_1, F_2, \dots$ 比之前拉普拉斯的方法更快得多。通过 之前拉格朗日细节 → 中出现的积分公式快得多。

Date:
Place:

Reminders

$$\left(\frac{1}{\lambda-v}\right)^{(q)} = \frac{\partial v^{(q)}}{\partial s_\lambda} - q\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}} W(\lambda)(v^{(q+1)}) - (J(\lambda) W(\lambda)(v^{(q)}))$$

$$- \sum_{r\geq 0}^{q} \binom{q}{r} (W(\lambda)(\theta^{(0)}))^{(r)} \cdot W(\lambda)(v^{(q-r)}) \text{，即}$$

$$D(\lambda)(v^{(q)}) = \left(\frac{1}{\lambda-v}\right)^{(q)} + \sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda-v}}\right)^{(r-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda-v}}\right)^{(q-r+1)}.$$

而 $D(\lambda)(\Delta) = \sum_{q\geq 0} D(\lambda)(v^{(q)})\frac{\partial \Delta}{\partial v^{(q)}}$.

将上面的计算结果汇总，可得到（取 $B = \frac{1}{\sqrt{\lambda-v}}$）

$$\sum_{q\geq 0}\left((B^2)^{(q)} + \sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r} B^{(r-1)}B^{(q-r+1)}\right)\frac{\partial \Delta}{\partial v^{(q)}}$$

$$= \frac{B^4}{16} + \varepsilon^2\left(\sum_{q\geq 0}\left(\frac{B^4}{16}\right)^{(q+2)}\frac{\partial \Delta}{\partial v^{(q)}} + \frac{1}{2}\sum_{p,q\geq 0} B^{(p+1)}B^{(q+1)}\left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial v^{(p)}\partial v^{(q)}} + \frac{\partial \Delta}{\partial v^{(p)}}\frac{\partial \Delta}{\partial v^{(q)}}\right)\right)$$

这个方程称为KdV方程族的圈方程（loop equation）。从它可解出所有 $F_1, F_2, \dots$。

例如，将 $\Delta = F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^4 F_3 + \cdots$ 代入并比较 ε 的系数，可得

$$\varepsilon^0: \sum_{q\geq 0}\left[(B^2)^{(q)} + \sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r} B^{(r-1)}B^{(q-r+1)}\right]\frac{\partial F_1}{\partial v^{(q)}} = \frac{B^4}{16}$$

Date:
Place:
Reminders

通过提取 $\frac{1}{(\lambda-v)^{n}}$ 的系数得到.

↑

首先 L_{-1} 对称给出 $\frac{\partial F_1}{\partial v}=0$. 然后 L_0 给出

$$\frac{1}{(\lambda-v)^2}\left[\frac{3}{2}v_x\frac{\partial F_1}{\partial v_x}+2v_{xx}\frac{\partial F_1}{\partial v_{xx}}+\frac{5}{2}v_{3x}\frac{\partial F_1}{\partial v_{xx}}+3v_{4x}\frac{\partial F_1}{\partial v_{4x}}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{(\lambda-v)^3}\left[-\frac{15}{4}v_x^2\frac{\partial F_1}{\partial v_{xx}}-\frac{55}{4}v_xv_{xx}\frac{\partial F_1}{\partial v_{3x}}-\left(\frac{87}{4}v_xv_{xxx}+16v_{xx}^2\right)\frac{\partial F_1}{\partial v_{4x}}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{(\lambda-v)^4}\left[\frac{105}{8}v_x^3\frac{\partial F_1}{\partial v_{3x}}+\frac{735}{8}v_x^2v_{xx}\frac{\partial F_1}{\partial v_{xx}}+\cdots\right]+\frac{1}{(\lambda-v)^5}\left[-\frac{945}{16}v_x^4\frac{\partial F_1}{\partial v_{4x}}+\cdots\right]+\cdots$$

$$=\frac{1}{16(\lambda-v)^2}\rightarrow\cdots$$

练习: 解一个 F_2 与 F_3.

问题: 目前 $F_1\cdots F_{13}$ 是已知的.

当 $g\geq 14$ 时, 图方程变得十分复杂,

所以尚无人能算出. 通过适当的算法也许可以算出.

留做期末报告(研究)吧.

期末研究报告: 证明下个定理.

根据拟可积性部分的计算可知 $F_1=F_1(v,v',\cdots,v^{(n_1)})$.

代入可知 $\frac{\partial F_1}{\partial v_x}=\frac{1}{24}\frac{1}{v_x}$. $\frac{\partial F_1}{\partial v^{(i)}}=0$ $(2\leq i\leq n_1)$

$\frac{\partial F_1}{\partial v}=0$,

所以 $F_1=\frac{1}{24}\log v_x+c$. c 为任意常数. 它显然不影响拟可积变换 $u=v+\varepsilon^2\cdots$, 所以可舍去.

类似地, 对比 ε^2 的系数可得关于 F_2 的方程. 通过提取 $\frac{1}{(\lambda-v)^n}$ 的系数可得关于 $\frac{\partial F_2}{\partial v}, \frac{\partial F_2}{\partial v_x},\cdots,\frac{\partial F_2}{\partial v^{(n_2)}}$ 的一个线性方程组. 该方程组为三角形的. 于是可解出 F_2 的梯度. 从中可知, 当 $i\geq 5$ 时, $\frac{\partial F_2}{\partial v^{(i)}}=0$, 且有 $\frac{\partial F_2}{\partial v}=0$. 所以 F_2 只是 $v',\cdots,v^{(4)}$ 的函数. 再经过简单积分可得

$$F_2=\frac{v_{4x}}{1152v_x^2}-\frac{v_{xx}v_{xxx}}{1920v_x^3}+\frac{v_{xx}^4}{360v_x^6}.$$

定理: KdV 的圈方程存在唯一的解

$$\Delta=F_1(v_x)+\varepsilon^2F_2(v_x,\cdots,v_{4x})+\cdots$$

$$\cdots+\varepsilon^{2g-2}F_g(v_x,\cdots,v^{(3g-2)})+\cdots$$

证明(略): 唯一性简单, 可通过分析三角形线性方程组的系数矩阵对角线得到. 存在性则需说明解出来的梯度满足闭合性条件. $3g-2$ 性质则通过分析右边可能出现的分母项数. □

遗留问题：前面的计算只表明 拟Miura变换 $u=v+\sum\varepsilon^{2g}$ 可将 dKdV 的 Virasoro 对称 $\frac{\partial v}{\partial s_n}$ 变成 KdV 的 Virasoro 对称 $\frac{\partial u}{\partial s_n}$. 这里一个没有检查的事实是,这个变换是否就是前面拟Miura变换分解出来的那个. 或者反过来说,这个变换是否可将KdV方程族及其 Hamilton 结构变为具领头项? 这个问题的答案应该是肯定的, 但没人能完成这个复杂的计算.

期末研究问题：求证：若 Δ 是 loop equation 的解, 则 $u=v+\varepsilon^2\partial_x^2\Delta$ 将KdV方程族及其双Hamilton结构变为具领头项 (只需证KdV方程本身, 或其双Hamilton结构, 因为 Refs 5 (PAM中的结论).

§1.10 Witten猜想.

先介绍一下量子场论的基本原理. 在一个量子场理论中总有一个空间 $\mathcal{E}$, 它一般是函数或某种映射构成的空间.

例如 ① 基本的量子力学中, $\mathcal{E}=C^\infty(\mathbb{R},M)$, M为空间, $\mathbb{R}$为时间. 一个 $f\in C^\infty$ 即描述经典粒子的运动轨迹的函数.

② 更一般的场论中, $\mathcal{E}=\Gamma(M,E)$, 其中M

是时空. E是M上的向量丛.

③ 如果是规范场, 则 $\mathcal{E} = \{A \mid E \to M$ 上的联络$\}$

④ 如果考虑量子引力, 则 $\mathcal{E} = \{g \mid g: M$ 上的 Lorentz 度量$\}$ (或欧氏度量)

另外还有一个 $\mathcal{E}$ 上的泛函 $S[\varphi]$ ($\varphi \in \mathcal{E}$) 称为系统的作用量.

例 ① $S[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), x'(t))\, dt$.

② $S[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^4} L(\varphi(x,t), \varphi'(x,t))\, dx$.

③ $S[A] = \int_{\mathbb{R}^4} \left(-\frac{1}{2} \mathrm{Tr}(F^2)\right) dx$. F: Curvature of A.

④ $S[g] = \int_M R\sqrt{-g}\, dx$. (or $\int_M R\sqrt{g}\, dx$).

R 是 g 的标量曲率.

接下来, 对一个 QFT 最重要的量是其配分函数

$$Z = \int_{\mathcal{E}} e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]} D\varphi$$

其中 $D\varphi$ 表示对所有 $\varphi \in \mathcal{E}$ 进行积分. 该积分一般是不存在的, 但物理学家们有各种各样的"方法"从中计算出可以存在的部分.

以及 $\langle O_\alpha(\varphi) O_\beta(\varphi) \cdots \rangle = \dfrac{\partial \log Z[J]}{\partial J_\alpha \partial J_\beta \cdots}\Big|_{J=0}$ →

这种量称为关联函数.

实际用的 $S(g)$ 可能不是这个? →

Date:
Place:
Reminders

例如, 若想知道某一可观测量的期望值, 可计算

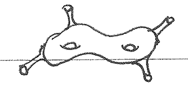
$$\langle O_\alpha(\varphi)\rangle = \frac{1}{Z}\int_{\mathcal{E}} O_\alpha(\varphi)\, e^{\frac{i}{\hbar}S(\varphi)}\, D\varphi$$

另一种写法是记 $Z[J] = \int_{\mathcal{E}} e^{\frac{i}{\hbar}S(\varphi) + iJ_\alpha O_\alpha(\varphi)}\, D\varphi.$

于是 $\langle O_\alpha(\varphi)\rangle = \dfrac{1}{Z[J]}\dfrac{\partial Z[J]}{\partial J_\alpha}\Big|_{J=0} = \dfrac{\partial \log Z[J]}{\partial J_\alpha}\Big|_{J=0}.$

这个 $Z[J]$ 叫系统的配分函数! $F = \log Z[J]$ 也叫自由能.

Witten的出发点是弦理论, 弦理论的 $\mathcal{E}$ 是

$\mathcal{E} = \bigcup_{g,n} \{$  $\longrightarrow X \}$

genus $= g$. marks $= n$. 　　$\subset$ 时空.

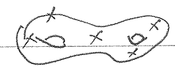
这样就有了一种简单的版本为 $M = pt$, 即时空只有一个点.

此时 $\mathcal{E} = \bigcup_{g,n} \{$  $\}$ 即2维带边Riemannian流形的全体.

其作用量即2D量子引力的标准作用量: $S(g) = \int_M \sqrt{g}\, dx$

~~这里由Gauss-Bonnet~~

再加一些其它的物理上的要求, 可进一步简化

$\mathcal{E} = \bigcup_{g,n} \{$  $\}$ 由Gauss-Bonnet, $S(g) = 2-2g$ 这样的系统具有拓扑不变性,

所以叫拓扑场论。

的模型叫 Gaussian Unitary Ensemble (GUE) →

接下来的问题是如何计算 $Z=\int_{\mathcal{E}} e^{\frac{i}{\hbar}S[g]}\mathcal{D}g$. 一种简单的想法是，将 X 上的 g 离散化，改为对给定拓扑型的多面体求和。这个想法看起来非常不易，但事实上它刚好对应一种物理上很清楚的模型，即矩阵模型。

矩阵模型起源于 't Hooft 关于 QCD 的大 N 极限的研究，它可以看做是某种简化的 QFT. ~~其 $\mathcal{E}$ 即某些矩阵构成的有限维流形，因此积分是良定的。故接下来要考虑~~

在一个矩阵模型中，有一个 $\mathcal{E}_N$ 是某种 N 阶矩阵构成的空间，也有 $S(M)$ 是 $\mathcal{E}_N$ 上的函数，以及 $Z_N=\int_{\mathcal{E}_N} e^{\frac{i}{\hbar}S(M)}dM$, dM 是 $\mathcal{E}_N$ 上的某种测度。这里因为 $\mathcal{E}_N$ 是有限维的，所以积分是良定的。接下来令 $N\to\infty$，各种有趣的现象就会冒出来。

Witten 在 2D 引力中考虑的矩阵模型的 $\mathcal{E}_N$ 为 $N\times N$ Hermit 矩阵构成的 N^2 维实线性空间，对于 $M\in\mathcal{E}_N$，记 $M=(z_{ij})$, $z_{ij}=x_{ij}+\sqrt{-1}\,y_{ij}$，则有 $x_{ij}=x_{ji}$, $y_{ij}+y_{ji}=0$. 记 $\mathcal{E}_N$ 上的体积形式为

$$dM=\prod_{i=1}^{N}dx_{ii}\wedge\prod_{i<j}(2\,dx_{ij}\wedge dy_{ij})$$

系统的配分函数定义为

$$Z_N(\varepsilon)=\frac{1}{\mathrm{Vol}(U(N))}\int_{\mathcal{E}_N} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}M^2\right)}\,dM.$$

这里的归一化因子 $\mathrm{Vol}(U(N))$ 表示 $U(N)$ 群的体积. 引入它是为了让 Z_N 有较好的大 N 渐近行为.

直接计算可知 $\int_{\mathcal{E}_N} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}M^2\right)}dM=(2\pi\varepsilon)^{\frac{N^2}{2}}$

利用正交多项式技术可得 $\mathrm{Vol}(U(N))=(2\pi)^{\frac{N^2+N}{2}}\Big/\prod_{n=1}^{N-1}n!$.

于是 $Z_N(\varepsilon)=\left(\prod_{n=1}^{N-1}n!\right)\cdot\frac{\varepsilon^{\frac{N^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}$.

引入 't Hooft 变量 $x=N\varepsilon$. 则上式有渐近展开

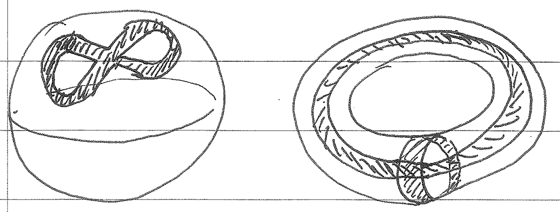
$$\log Z_N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{x^2}{2}\left(\log x-\frac{3}{2}\right)\right)+\left(-\frac{1}{12}\log x+\zeta'(-1)\right)+\frac{1}{12}\log\varepsilon$$
$$+\sum_{g\geq 2}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}x^{2-2g}\varepsilon^{2g-2}$$

重新定义渐近GUE配分函数为 $Z(x,\varepsilon)=Z_N(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{-\frac{1}{12}}$,

则有 $F(x,\varepsilon)=\log Z(x,\varepsilon)=\sum_{g\geq 0}\varepsilon^{2g-2}F_g(x,\varepsilon)$. 其中

$F_0(x)=\frac{x^2}{2}\left(\log x-\frac{3}{2}\right)$. $F_1(x)=-\frac{1}{12}\log x+\zeta'(-1)$. $F_g(x)=\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}x^{2-2g}$

(9.22).



Ref: ① Lando, Zvonkin, →

Graphs on Surfaces and their applications (book)

② Brézin, Hikami (book)

Random Matrix Theory with an External Source.

☆ ③ Morozov

Integrability and Matrix Models.

arXiv: hep-th/9303139.

在GUE模型中，人们关心期望值

$$\langle Tr(M^{j_1})\cdots Tr(M^{j_k})\rangle := \frac{\int_{\mathcal{E}_N} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}Tr(M^2)}\, Tr(M^{j_1})\cdots Tr(M^{j_k})\, dM}{\int_{\mathcal{E}_N} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}Tr(M^2)}\, dM}$$

因此，引入带耦合常数的配分函数

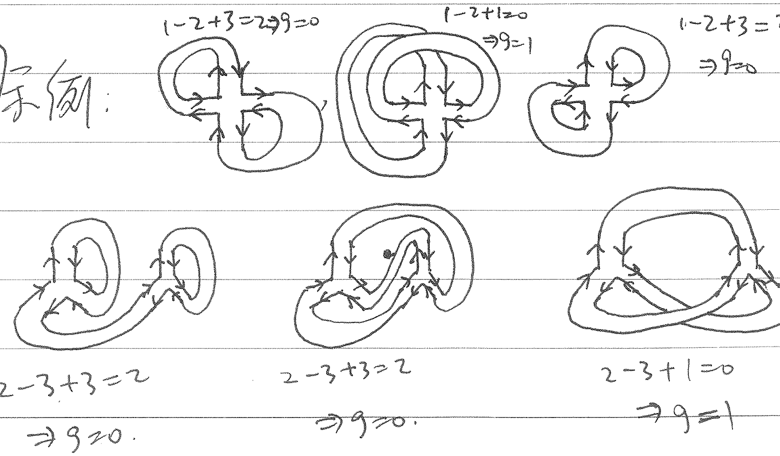
$$Z_N(s,\varepsilon)=\frac{1}{Vol(U(N))}\int_{\mathcal{E}_N} e^{-\frac{1}{\varepsilon}Tr\, V(M)}\, dM$$ 其中

$V(M)=\frac{1}{2}M^2-\sum_{j\geq 1}^{\infty} s_j M^j$. 于是有

$$\frac{Z_N(s,\varepsilon)}{Z_N(0,\varepsilon)}=\sum_{k\geq 0}\frac{\varepsilon^{-k}}{k!}\sum_{j_1\cdots j_k} s_{j_1}\cdots s_{j_k}\langle Tr(M^{j_1})\cdots Tr(M^{j_k})\rangle.$$

定理: $$\frac{Z_N(s,\varepsilon)}{Z_N(0,\varepsilon)}=\sum_{\Gamma:\text{胖图}}\frac{1}{Aut(\Gamma)}\prod_{j\geq 1}(js_j)^{v_j(\Gamma)}\varepsilon^{2g(\Gamma)-2}x^{b(\Gamma)}.$$

胖图示例:



矩阵模型中叫 double scaling limit. →

$v_j(\Gamma)$：Γ中度为j的顶点的个数.

$b(\Gamma)$：Γ的边的个数(即可以贴多少个圆盘使其成为闭曲面)

$g(\Gamma)$：Γ的亏格：$v(\Gamma)-E(\Gamma)+b(\Gamma)=2-2g(\Gamma)$.

↑顶点 ↑腿 边,即面.

推论：① $F_N(s,\varepsilon)=F_N(0,\varepsilon)$

$$+\sum_{\Gamma:\text{连通肥图}}\frac{1}{Aut(\Gamma)}\prod_{j=1}(js_j)^{v_j(\Gamma)}\cdot\varepsilon^{2g(\Gamma)-2}\cdot x^{b(\Gamma)}.$$

② $F(x,s,\varepsilon)=F(x,0,\varepsilon)+\sum_{\Gamma:\text{连通肥图}}(\quad)$

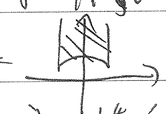
从上面这些结果可知.对多面体的求和可转化为GUE中矩阵模型.但是经研究,GUE对应的可积系统叫Toda方程族.并不是我们所知的kdV. Witten指出.当取N→∞时.还需要对GUE矩阵中的参数 s_j 做重整化,这相当于对Toda取某种连续性极限.之后应该可以得到kdV.在Witten(1990年),这些计算还相当不严格,真正严格的处理直到1992,1995年才由Morozov等人给出.见前面的Ref.

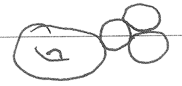
Date: ....
Place: ....
Reminders

Date: ....
Place: ....
Reminders

总之，Witten从矩阵模型方面的知识认识到2D引力应该给出KdV方程族。另一方面，Witten的真正发现是，2D引力还有另一种处理方法，由此得到著名的Witten猜想。

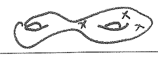
一个熟知的事实是，二维闭曲面上的复结构等价于其上Riemann度量的共形等价类。2D引力要求对所有X上的度量积分。但是从物理上可知，如果两个度量相差一个共形等价的话，作用量是不变的，所以在 $\int_\Sigma \mathcal{D}g$ 中可以先把共形变换积掉，只剩下对复结构的积分，即，将之换成X上的复结构的模空间。这是一个有限维对象，其上的积分是良定的！

具体地说，对 $g \geq 0$，可定义亏格g的Riemann面的模空间 M_g。当 $g=0$ 时，M_0 只有一个点，当 $g=1$ 时 $M_1 = H/SL(2,\mathbb{Z})$ =  $\cong \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$\dim M_g = 3g-3 \ (g \geq 2)$。这些模空间是非紧的，其上的积分不是太好。Deligne与Mumford引入了一种紧化，即不止考虑 ，还可包含  或  ……

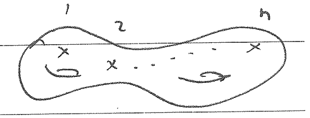
即包含通常二重点的代数曲线。另外，分使

Date:
Place:
Reminders

模空间上每点的自同构群有限。还引入标记点，使每个  的自同构群有限。于是得

$$\overline{M}_{g,n} = \{C:\ 亏格=g,\ 标记点为n,\ 且\ 2g-2+n>0\}/\sim.$$

$\overline{M}_{g,n}$ 总是一个紧的(复) $3g-3+n$ 维光滑 stack (或orbifold).
(类似流形，只不过每个点的邻域同构于 $\mathbb{C}^N/\Gamma_x$，Γ_x 为一有限群) 在其上可以谈论微分形式，以及其积分.



对于 $C\in\overline{M}_{g,n}$，$i=1,\dots,n$.
设它的标记点为 $x_1,\dots,x_n$. 将它在 x_i 处的余切空间 $T^*_{x_i}C$ 取出来，放在 $\overline{M}_{g,n}$ 上的C处，可以证明这样在 $\overline{M}_{g,n}$ 上定义了一个线丛，它叫 $\overline{M}_{g,n}$ 上的第 i 个 tautological 线丛，记为 L_i. 记 $\psi_i = c_1(L_i)$. 则 ψ_i 是 $\overline{M}_{g,n}$ 上的一个 2形式.

接下来可定义

$$\langle\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}\rangle_{g,n} = \int_{\overline{M}_{g,n}} \psi_1^{d_1}\cdots\psi_n^{d_n}$$

它们称为 $\overline{M}_{g,n}$ 上的相交数. 一个基本的问题是如何计算它们.

Date:
Place:
Reminders

Witten的重要观察是，这些相交数应该解释为2D引力中的关联函数，于是应该对应矩阵模型中的东西。进而，应该可以用KdV方程描述！

具体地说，定义

$$F_g(t)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}t_{d_1}\cdots t_{d_n}\langle\tau_{d_1}\cdots\tau_{d_n}\rangle_{g,n}.$$

$F(t)=\sum_{g\geq 0}\varepsilon^{2g-2}F_g(t)$，则 $F(t)$ 应满足

- 令 $u=\varepsilon^2\partial^2F$ ($\partial=\partial_0$，$\partial_k=\frac{\partial}{\partial t_k}$)，则

  $\partial_k u=R'_{k+1}$ （其中 R_k 为 KdV 中的 R_k）

- F还满足如下方程（称为弦方程，string equation，SE）.

$$\frac{\partial F}{\partial t_0}=\frac{t_0^2}{2\varepsilon^2}+\sum_{k\geq 0}t_{k+1}\partial_k F$$

（即 $\frac{\partial F}{\partial s_{-1}}=\frac{\partial F}{\partial t_0}$.）

特别地，上述两条件可唯一地确定F.

（证明：对SE取 $\frac{\partial}{\partial t_0}$ 可得

Date:
Place:
Reminders

$U = t_0 + t_1 U + t_2 \frac{U^2}{2} + \cdots$，此方程的解可直接写出：

$$U = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d_1 + \cdots + d_n = n-1} \frac{t_{d_1}}{d_1!} \cdots \frac{t_{d_n}}{d_n!}.$$

于是 $F_0(t) = \frac{1}{2} \sum_{p,q \geq 0} \tilde{t}_p \tilde{t}_q \Omega^{(0)}_{pq}(U)$　$\tilde{t}_p = t_p - \delta_{p,1}$

$\Omega^{(0)}_{pq}(U) = \frac{U^{p+q+1}}{p!\,q!\,(p+q+1)}.$

接下来，$F_g = F_g(U', \cdots, U^{(3g-2)})$ $(g \geq 1)$　口）

利用上述方法可通过解方程直接算出 $\overline{M}_{g,n}$ 上的相交数.

Witten猜想在1992年由Kontsevich证明. Kontsevich没有从GUE出发，而是考虑了一个不同的矩阵模型.

$$Z_K = \lim_{N \to \infty} \int_{\mathcal{E}_N} e^{\frac{\sqrt{-1}}{6} \mathrm{tr}(M^3) - \frac{1}{2} \mathrm{tr}(M^2 X)} dM / c_X.$$

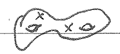
他证明了，若定义 $t_i = -(2i-1)!!\, \mathrm{tr}(X^{-1-2i})$，则

$Z_K \in \mathbb{Q}[[t_0, t_1, t_2, \cdots]]$，且 $F_K = \log Z_K$ 给出上面

的 $F(t)$，且 $U_K = \varepsilon^2 F_K''$ 满足Witten猜想的[illegible]性质.

由此证明了Witten猜想.（见 Brézin & Hikami 的书）

在Witten的原始文章中不止考虑了这种最简单的2D引力，他还考虑了一种类似的拓扑场论，其Σ为

$\Sigma = \{$  $\longrightarrow X \}$

光滑辛流形 或代数簇.

由此得到的即 Gromov-Witten 不变量理论.

~~接下来的问题是，对任意的X~~，经过 Kontsevich, Manin, Ruan, Tian, Li, Liu, Fantechi, 等人的努力，Gromov-Witten不变量有了严格的数学基础.

具体地说，对上述 X, g, n ($2g-2+n>0$)，以及 $\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$，存在一个模空间

$$\overline{M}_{g,n}(X,\beta)=\left\{ f: C\to X \;\middle|\; \begin{array}{l} C: \text{稳定曲线, 亏格g, n个标记点} \\ [C]=\beta \end{array} \right\}$$

且其上有个 virtual 基本类 $[\overline{M}_{g,n}(X,\beta)]^{vir}$.

接下来，可定义 $ev_i: \overline{M}_{g,n}(X,\beta)\to X$, 称为第i个
$(f: C\to X)\longmapsto f(x_i)$ 取值映射.

于是对X上的上同调类 $\alpha\in H^*(X,\mathbb{Q})$，可将其拉回到 $\overline{M}_{g,n}$ 上得 $ev_i^*(\alpha)$.

的基 $\phi_1 \cdots \phi_N$

然后对于 ~~$\alpha_1 \cdots \alpha_n$~~ $H^*(X,\mathbb{Q})$ 以及 $d_1 \cdots d_n \geq 0$, $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1 \cdots N$

可定义 $\langle \tau_{d_1}(\alpha_1) \cdots \tau_{d_n}(\alpha_n) \rangle_{g,n,\beta}$

$$= \int_{[\overline{M}_{g,n}(X,\beta)]^{vir}} (\psi_1^{d_1} ev_1^*(\phi_{\alpha_1})) \cdots (\psi_n^{d_n} ev_n^*(\phi_{\alpha_n})).$$

对这些数做一个生成函数:

$$F_{g,\beta}(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^{\alpha_1,d_1} \cdots t^{\alpha_n,d_n} \langle \tau_{d_1}(\alpha_1) \cdots \tau_{d_n}(\alpha_n) \rangle_{g,n,\beta}.$$

$$F_g(t,Q) = \sum_{\beta \in N(X)} Q^\beta F_{g,\beta}(t)$$

$N(X)$ 为 X 的 Novikov 环, 即 $H_2(X,\mathbb{Z})$ 中可能为 C 的部分. (基本上是一个锥形区域).

$$F(t,Q,\varepsilon) = \sum_{g \geq 0} \varepsilon^{2g-2} F_g(t,Q).$$

接下来的问题是, 如何计算 $F(t,Q,\varepsilon)$, 或 $Z = e^F$.

设 $F(v) = F_0(t,Q)\big|_{Q=1,\ t^{\alpha,d}=0\ (d>0),\ t^{\alpha,0}=v^\alpha}$

再设 ϕ_1 为 $H^*(X,\mathbb{Q})$ 中的 $1 \in H^0(X,\mathbb{Q})$.

则可证明 $\dfrac{\partial^3 F(v)}{\partial v^1 \partial v^\alpha \partial v^\beta} = \langle \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle =: \eta_{\alpha\beta}$

$H^*(X,\mathbb{Q})$ 中的 Poincaré 配对

Date:

Place:

Reminders

Frobenius流形这个对象在更早的 K. Saito 关于奇点的工作中亦出现过，但未获太多重视。在Dubrovin之后，则成为热点，因为它给出镜对称的界定.

Date:

Place:

Reminders

进一步地，记 $c_{\alpha\beta\gamma}(v)=\dfrac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma}$. $c^\alpha_{\beta\gamma}=\eta^{\alpha\delta}c_{\delta\beta\gamma}$.

则可证明如下乘法运算:

$$\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\circ\frac{\partial}{\partial v^\beta}=c^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial v^\gamma}$$

是结合的. ~~用 c 来写，即为~~ 即

$$\left(\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\circ\frac{\partial}{\partial v^\beta}\right)\circ\frac{\partial}{\partial v^\gamma}=\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\circ\left(\frac{\partial}{\partial v^\beta}\circ\frac{\partial}{\partial v^\gamma}\right).$$

用 $c^\gamma_{\alpha\beta}$ 来写，即

$$c^\mu_{\alpha\beta}c^\nu_{\mu\gamma}=c^\nu_{\alpha\mu}c^\mu_{\beta\gamma}$$

或者写为关于F的方程

$$\frac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\mu}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^3 F}{\partial v^\nu \partial v^\gamma \partial v^\delta}=\frac{\partial^3 F}{\partial v^\alpha \partial v^\delta \partial v^\mu}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^3 F}{\partial v^\nu \partial v^\beta \partial v^\gamma}.$$

这称为 Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde (WDVV) 方程.

在 Dubrovin 1994年的文章《Geometry of 2D TFT》中，他将上述方程表达成坐标无关的形式，由此引入了Frobenius流形的概念。他还证明，若定义 $v^\alpha(t)=\eta^{\alpha\beta}\dfrac{\partial^2 F_0}{\partial t^{1,0}\partial t^{\beta,0}}$，则 $v(t)$ 满足如下形式的可积方程组:

Date:
Place:
Reminders

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^{\beta,p}} = A^\alpha_{\beta,p,\gamma}(v)\frac{\partial v^\gamma}{\partial t^{1,0}} \quad (*)$$

其中 $A^\alpha_{\beta,p,\gamma}(v)$ 可由 $F(v)$ 中解出（在相差一些常数的重新线性组合的意义下），或由几何方式定出。他还在一些相关文章中证明，这个方程族拥有~~双~~双 Hamilton 结构，因此也有无穷多守恒量和对称性。进一步地，$F_0(t)$ 可由一个类似的 SE 与上述方程族唯一地决定出来，方程(*)称为相应的 Frobenius 流形的 principal hierarchy.

接下来，Dubrovin 与张友金证明，如果进一步考虑亏格一的自由能，即定义 $u^\alpha = \varepsilon^2 \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^{1,0}\partial t^{\beta,0}}(\varepsilon^{-2}F_0 + F_1 + O(\varepsilon^2))$，则 $u^\alpha(t)$ 满足如下形式的方程：

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t^{\beta,p}} = A^\alpha_{\beta,p,\gamma}(u)\frac{\partial u^\gamma}{\partial t^{1,0}} + \varepsilon^2\Big((\ \ )u^\gamma_{xxx} + (\ \ )u^\gamma_{xx}u^\delta_x + (\ \ )u^\gamma_x u^\delta_x u^\sigma_x\Big) + O(\varepsilon^4).$$

其中的系数都可以显式地由 A 与 F 构造出来（以及亏格一的 G）。

这些方程加上亏格一的 SE 也可唯一地定出 F_1.

与此同时，他们还证明这一方程族也有精确到亏格一（即 ε^2）的 Virasoro ~~对~~对称，且解 F_1 可由 Virasoro 约束

Date:
Place:
Reminders

且原来的 $F = \frac{1}{\varepsilon^2}F_0 + F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots$ 可由适当的定解条件定出.

Date:
Place:
Reminders

唯一决定.

由这些结果不难想象, 对于每个 Gromov-Witten 模型(或靶空间 X) 或更一般地每个上同调场论, 其亏格零部分给出一个 Frobenius 流形, 并有相应的流体力学型方程族 $\frac{\partial v^\beta}{\partial t^{\alpha,p}} = A^\beta_{\alpha p \gamma}(v) v^\gamma_x$. (取 $t^{1,0} = x$). 它的高亏格部分则对应该方程族的一个形变. 若取
$$u^\alpha = v^\alpha + \varepsilon^2 \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t^{\beta,0}} (F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \cdots)$$
则 u^α 应满足
$$\frac{\partial u^\beta}{\partial t^{\alpha,p}} = A^\beta_{\alpha p \gamma}(u) u^\gamma_x + \varepsilon^2(\cdots) + \varepsilon^4(\cdots) + \cdots \quad (*)$$
其中 ε^{2k} 的系数是 u 的 $2k+1$ 阶微分多项式. 这个方程族应该有双 Hamilton 结构和 Virasoro 对称. 接下来的问题就是, 对于给定的 X 或 Frobenius 流形以及它的一个 principal hierarchy, 如何找出这个形变的方程?

2001 年, Dubrovin 和张友金在 arXiv 放出一个重要的预印本, 其中给出了构造这一形变的方法. 他们提出四

Date:
Place:
Reminders

本公理用于刻画对应于半单 Frobenius 流形的可积系统(*)

1. 双 Hamilton 公理

(*)应具有形如

$$\{u^\alpha(x), u^\beta(y)\}_a = P_a^{[0]} + \varepsilon^2 P_a^{[1]} + \varepsilon^4 P_a^{[2]} + \cdots \qquad (*2)$$

$$a=1,2$$

的双 Hamilton 结构. 其中

$$P_a^{[0]} = g^{\alpha\beta}(u)\,\delta'(x-y) + \Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma,a}(u)\,u^\gamma_x\,\delta(x-y),\quad a=1,2$$

是一个半单流体力学型双 Hamilton 结构.(定义见论文)

$$P_a^{[k]} = \sum_{l=0}^{2k+1} A^{\alpha\beta}_{k,l;a}(u, u', \ldots, u^{(2k+1-l)})\,\delta^{(l)}(x-y)$$

$A^{\alpha\beta}_{k,l;a}$ 是次数为 $2k+1-l$ 的微分多项式.

2. 拟平凡性公理:

存在一个拟 Miura 变换

$$u^\alpha = v^\alpha + \varepsilon^2 F_1^\alpha(v) + \varepsilon^4 F_2^\alpha(v) + \cdots$$

其中 F^α 是 $v', \ldots, v^{(N_\alpha)}$ 的有理函数,且系数为 v^α 的光滑函数,使得(*)与双 Hamilton 结构同时变为其领头项.

Date:
Place:
Reminders

方法即 loop equation. →

Date:
Place:
Reminders

3. τ结构公理.

简单地说，即系统应该存在τ函数. 具体地说，~~存在一种特殊的坐标系 u^α (或者在 Miura 变换下的代表元) 使得~~ 领头的 pricipal hierarchy 的 Hamilton 密度满足 $\frac{\partial h^{(0)}_{\alpha,p-1}}{\partial t^{\beta,q}} = \frac{\partial h^{(0)}_{\beta,q-1}}{\partial t^{\alpha,p}}$，于是可定义 $\Omega_{\alpha p \beta q}$，进而定义 pricipal hierarchy 的τ覆盖. 形变后的系统应该也具有相似的性质，即存在 $h_{\alpha,p} = h^{(0)}_{\alpha,p} + \cdots$ 的特定选法，使得 $\frac{\partial h_{\alpha,p-1}}{\partial t^{\beta,q}} = \frac{\partial h_{\beta,q-1}}{\partial t^{\alpha,p}}$ 仍成立. 于是可定义形变后系统的τ覆盖.

4. 线性 Virasoro 对称公理.

上述τ覆盖应具有形如 $\frac{\partial \tau}{\partial s_m} = L_m \tau$ 的 Virasoro 对称. 其中 L_m 是由领头项的信息确定的一组算子. 且它们满足 Virasoro 交换关系.

Dubrovin-Zhang 证明，存在唯一的拟 Miura 变换，使得变换后的系统拥有线性 Virasoro 对称. 因为這是公理4的前提，所以他们相当于证明了满足

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:

终为拓扑形变

Reminders

2,3,4 公理的形变是唯一的。但是，因为拟Miura变换会引入非多项式的项，所以无法证明这样变出来的系统是否是多项式的，也无法证明其Hamilton结构是否是多项式的。

几年前，A. Buryak证明，拓扑形变一定是多项式的，且其第一个Hamilton结构以及Hamilton密度也都是多项式的。但第二个Hamilton结构的多项式性仍是未知的。

这个问题的困难在于人们当时对于双Hamilton结构的了解非常有限，所以无法与其它几条性质衔接起来。特别地，这类系统在各种变换（即Miura型变换与拟Miura型变换）下的分类对Dubrovin-Zhang理论非常重要，但是在2001年人们对此一无所知。

本课程的后半段就是要介绍这一问题最近十几年的进展。我们现在可以说，前三条公理之间的关系已经非常清楚了，它们与最后一条公理的关系也有望在接下来的几年内完全解决。到那时我们就可以得到完整的Dubrovin-Zhang理论，并由此给出最一般形式的Witten猜想。

细节参见电子版讲义 →

《Lecture Notes on Bihamiltonian Structures and their Central Invariants》.

§2. Jet 空间与 Hamilton 结构.

§2.1 有限维 Poisson 几何

设 A 是一个 $\mathbb{R}$ 向量空间. 定义

$$V^* = \mathrm{Hom}(\wedge^* A, A) = \bigoplus_{p\ge 0} V^p, \quad V^p = \mathrm{Hom}(\wedge^p A, A)$$

特别地, $V^0 = A$, $V^{<0} = 0$.

定理: a) 存在唯一的 $\mathbb{R}$-双线性运算

$$[\cdot,\cdot] : V^p \times V^q \to V^{p+q-1}$$

满足: i) $[P, f](f_2, \cdots, f_p) = P(f, f_2, \cdots, f_p)$.

ii) $[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P]$.

iii) $[[P, Q], f] + (-1)^{qp}[[Q, f], P] + [[f, P], Q] = 0$.

其中 $P \in V^p$, $Q \in V^q$, $f, f_2, \cdots, f_p \in A\ (= V^0)$.

这个运算称为 V^* 上的 Nijenhuis-Richardson 括号.

b) NR 括号还满足

$$(-1)^{pr}[[P, Q], R] + (-1)^{qp}[[Q, R], P] + (-1)^{rq}[[R, P], Q] = 0.$$

对任意的 $P \in V^p$, $Q \in V^q$, $R \in V^r$.

证明: a). 唯一性. 对 $p+q$ 归纳. 存在性: 利用 i) (略). b) 对 $p+q+r$ 归纳. □

设 M 为 C^∞ 流形. $A = C^\infty(M)$. 则
如此定义的 Λ^p 即为 M 上的 p-矢量.
Λ^p 上的括号为 M 上多矢量的
Schouten–Nijenhuis 括号.

现在假设 A 还是 $\mathbb{R}$-代数. 定义

$$\Lambda^p = \{P \in V^p \mid [P, f\cdot g] = g[P,f] + f[P,g] \quad \forall f,g \in A\}.$$

定理: 若 $P\in\Lambda^p$, $Q\in\Lambda^q$, 则 $[P,Q]\in\Lambda^{p+q-1}$.

证明: 先验证 $p+q\le 2$ 的情况 然后对 $p+q\ge 3$ 的情况
对 $p+q$ 归纳. □

(for $A=C^\infty(M)$)

引理: 设 $P\in\Lambda^2$ 则以下性质等价

a) P 定义了 M 上的 Poisson 括号.

b) $[P,P]=0$

c) 映射 $d_P: \Lambda^* \to \Lambda^{*+1}$, $Q\mapsto [P,Q]$ 满足 $d_P^2=0$

证明: 对 $\forall f, g, h \in A$.

$$[P,Q](f,g,h) = P(Q(f,g),h) + P(Q(g,h),f) + P(Q(h,f),g) + Q(P(f,g),h) + Q(P(g,h),f) + Q(P(h,f),g)$$

定义 $\{f,g\}_P = P(f,g)$. 则有

$$\{\{f,g\}_P,h\}_P + \{\{g,h\}_P,f\}_P + \{\{h,f\}_P,g\}_P = \frac{1}{2}[P,P](f,g,h).$$

所以 a)$\Leftrightarrow$b).

接下来. 对 $Q\in\Lambda^q$. 有

$$[[P,P],Q] + [[P,Q],P] + [[Q,P],P] = 0.$$

Date:
Place:
Reminders

为什么要两种？因为前一种好定义不好算 →
后一种好算，但是可能不那么好理解.

T^*M 上有标准的辛结构. $\Pi(T^*(M))$ →
上则有奇的标准辛结构. SN 括号即
这一辛结构对应的 Poisson 括号（可能要
调整一下系数和符号）. 这一定理揭示的就
是这个辛结构.

Date:
Place:
Reminders

即 $d_P^{\tau}(Q) = -\frac{1}{2}[[P,P],Q]$. 所以 $b) \Leftrightarrow c)$. □.

第二种描述. $(u^1\cdots u^n)\in U$

令 $\hat{M} = \Pi(T^*M)$. 对 $U\subseteq M$, 选局部坐标于
$\hat{U} = U\times\mathbb{R}^n$. $(u^1,\cdots,u^n;\theta_1,\cdots,\theta_n)\in\hat{U}$, 使
$\tilde{\theta}_\alpha = \frac{\partial u^\beta}{\partial u^\alpha}\theta_\alpha$. 记 $\hat{A} = C^\infty(\hat{M})$.

引理：存在一个同构 $j: \hat{A}\to\Lambda^*$
证明：$j(p)(f_1\cdots f_p) = \frac{\partial^p p}{\partial\theta_{\alpha_p}\cdots\partial\theta_{\alpha_1}}\frac{\partial f_1}{\partial u^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial f_p}{\partial u^{\alpha_p}}$. □.

定理：对于 $P\in\hat{A}^p$, $Q\in\hat{A}^q$. 我们有

$$[P,Q]_{\hat{A}} = \frac{\partial P}{\partial\theta_\alpha}\frac{\partial Q}{\partial u^\alpha} + (-1)^p\frac{\partial P}{\partial u^\alpha}\frac{\partial Q}{\partial\theta_\alpha} = j^{-1}[j(P),j(Q)]$$

证明：只需验证 $[\,,\,]_{\hat{A}}$ 满足 NR 括号的特性质 □.

以后我们可忽略 j，并等同 $\hat{A}$ 上的 $[\,,\,]_{\hat{A}}$ 和
Λ^* 上的 $[\,,\,]$. 现在 M 上的 Poisson 结构可定义为
$P\in\hat{A}^2$，满足 $[P,P]=0$.

Date:
Place:
Reminders

Date:
Place:
Reminders

§2.2 无限 Jet 丛

这一节将考虑形如

$$u^\alpha_t = X^\alpha(u, u', \cdots) = X^\alpha_0(u) + \Sigma X^\alpha_\beta(u) u^\beta_x + \Sigma(\cdot\cdot)+\cdots$$

的方程的几何。这个方程与传统PDE的一个本质的不同是，我们允许它有无穷多项，且其中可以有任意高阶的导数。

（下略，参见某电子版讲义）