

数学分析 (2): 第 3 次习题课

刘思齐

1. 设 D 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 求证: D 连通当且仅当 D 道路连通。
2. (高维 Rolle 定理) 设 D 是 \mathbb{R}^n 中的有界区域, $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且在 D 上可微。求证: 若 f 在 ∂D 上恒为零, 则存在 $x_0 \in D$ 使得 $f'(x_0) = 0$ 。
3. 举例说明: 在反函数定理中, 如果 f 仅可微, 而非连续可微, 则定理不成立。
4. 求如下 \mathbb{R}^n 中的球坐标变换的 Jacobi 行列式:

$$x_1 = r \cos \theta_1,$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3,$$

.....

$$x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1},$$

$$x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}.$$

5. 设 D 是 \mathbb{R}^n 中的区域, K 是 D 中的一个紧集。 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续可微, 满足 f 在 K 上是单射, 且 $\det f'$ 在 K 上恒不为零。求证: 存在 D 中包含 K 的开集 U 、以及 \mathbb{R}^n 中包含 $f(K)$ 的开集 V , 使得 $f: U \rightarrow V$ 是同胚, 且其逆 f^{-1} 连续可微。