数学分析（3）：第 2 次习题课

刘思齐

1. 设 $n \in \mathbb{Z}$，定义 n 阶 Bessel 函数为：

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\,\theta - x\,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

求证：

i) $J_{-n}(x) = J_n(-x) = (-1)^n\,J_n(x)$；

ii) $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2\,n}{x}\,J_n(x)$；

iii) $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2\,J_n'(x)$；

iv) $J_n''(x) + \frac{1}{x}\,J_n'(x) + (1 - \frac{n^2}{x^2})\,J_n(x) = 0$。

2. 利用对参数求导法求下列含参积分：

i)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(a^2\,\sin^2 x + b^2\,\cos^2 x\right)\mathrm{d}x;$$

ii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x;$$

iii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1 + a\,\cos x}{1 - a\,\cos x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\cos x};$$

iv)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x.$$

3. 设 $n \in \mathbb{N}$、$t_1, \ldots, t_{2n} \in \mathbb{R}$，且 $t_{2n} < 0$。定义：

$$I(t_1, \ldots, t_{2n}) = \int_{\mathbb{R}} e^{t_1\,x + t_2\,x^2 + \cdots + t_{2n}\,x^{2n}}\,\mathrm{d}x.$$

i) 对于 $1 \le i_1, \ldots, i_k \le 2n$、$i_1 + \cdots i_k \le 2n$，求证：

$$\frac{\partial^k I}{\partial t_{i_1} \cdots \partial t_{i_k}} = \frac{\partial I}{\partial t_{i_1 + \cdots + i_k}};$$

ii) 求证:

$$t_1\, I + 2t_2 \frac{\partial I}{\partial t_1} + \cdots + 2\, n\, t_{2n} \frac{\partial I}{\partial t_{2n-1}} = 0;$$

iii) 求证:

$$I + t_1\, \frac{\partial I}{\partial t_1} + 2t_2 \frac{\partial I}{\partial t_2} + \cdots + 2\, n\, t_{2n} \frac{\partial I}{\partial t_{2n}} = 0;$$

iv) 你还能写出更多像 ii)、iii) 一样的关系吗?

4. Catalan 常数定义为:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots .$$

试证明如下等式:

i)

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2\, y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = G;$$

ii)

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\, \mathrm{d}x = G;$$

iii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\, \mathrm{d}x = 2G;$$

iv)

$$\int_0^1 K(k)\, \mathrm{d}k = 2G,\ \text{其中}\ K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\, \sin^2\theta}}.$$